Séminaire BOURBAKI Janvier 2019
71e année, 2018–2019, nO 1155

RÉDUCTION STABLE EN DIMENSION SUPÉRIEURE [d'après Kollár, Hacon–Xu...]

par **Olivier Benoist**

INTRODUCTION

L'espace de modules M_g des courbes lisses de genre $g \geqslant 2$ construit par Mumford [Mu65] est une variété algébrique dont les points complexes sont naturellement en bijection avec les classes d'isomorphisme de courbes projectives lisses complexes de genre g (nous renvoyons à [AJP16] et à [Ko18a] pour un aperçu de l'histoire de ce sujet).

Que ce soit pour étudier les dégénérescences de familles de courbes lisses ou la géométrie de la variété M_g elle-même, il est utile de disposer d'une compactification projective de M_g qui soit *modulaire*, c'est-à-dire qui paramètre encore des courbes algébriques, éventuellement singulières. Une telle compactification a été construite par Deligne et Mumford [DM69] : c'est l'espace de modules des courbes stables $\overline{M}_g$.

La recherche d'espaces de modules analogues paramétrant des variétés de dimension supérieure a suscité de nombreux travaux. Pour obtenir une théorie similaire, on se restreint aux variétés dont le fibré canonique est ample (1). Le cas des surfaces a alors été résolu par Kollár, Shepherd-Barron et Alexeev [KSB88, Ko90, Al94], et Viehweg [Vi95] a traité le cas des variétés lisses en dimension arbitraire.

Le cas général a fait l'objet d'avancées récentes, décrites dans ce rapport. Ces progrès sont dus au développement du programme des modèles minimaux par Birkar, Cascini, Hacon, McKernan et Xu [BCHM10, HX13, HMX18a], à de nombreux travaux de Kollár [Ko90, Ko08, Ko13a, Ko18b], ainsi qu'à Fujino, Kovács et Patakfalvi [Fu18, KP17].

Nous expliquons tout d'abord une motivation pour ces travaux : obtenir des théorèmes de réduction stable en dimension supérieure (théorèmes 1.6 et 1.7). Nous définissons ensuite les variétés stables qui jouent dans ce cadre le rôle des courbes stables de Deligne et Mumford, et énonçons le théorème d'existence des espaces de modules de variétés stables (théorème 2.6). Dans les troisième et quatrième sections, nous esquissons enfin la preuve du théorème de réduction stable et la construction de ces espaces de modules.

1. Par le biais de leurs modèles canoniques, cela prend en compte toutes les variétés de type général. Des compactifications modulaires ont aussi été construites, par d'autres méthodes que celles expliquées ici, pour d'autres espaces de modules : variétés abéliennes [Al02], certaines variétés de Fano [LWX14].

Conventions. Tous les schémas sont des $\mathbb{Q}$-schémas noethériens. Une variété est un schéma séparé de type fini sur un corps k de caractéristique nulle, par exemple le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

1. RÉDUCTION SEMI-STABLE ET RÉDUCTION STABLE

Fixons dans cette section un morphisme propre et surjectif $f : \mathcal{X} \to B$ entre variétés réduites. Supposons B intègre, et notons η le point générique de B et $\mathcal{X}_\eta$ la fibre générique de f. On voit f comme une famille de variétés algébriques paramétrée par les points de B. Cette famille peut avoir de mauvaises propriétés : les fibres de f peuvent ne pas toutes avoir la même dimension, être très singulières... On est ainsi amené à rechercher des modèles birationnels $f' : \mathcal{X}' \to B'$ de f dont la géométrie et les singularités sont contrôlées. Plus précisément, on recherche un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}' \arrow[r, dashed, "\phi"] \arrow[dr, "f'"'] & \mathcal{X}_{B'} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[d, "f"] \\ & B' \arrow[r, "\pi"] & B. \end{tikzcd} \tag{1}$$

dans lequel B' est une variété intègre de point générique η', le morphisme $\pi : B' \to B$ est propre, génériquement fini et surjectif, le carré est cartésien, $\phi_{\eta'}$ est birationnelle et f' est propre. Quelles propriétés peut-on alors imposer au morphisme f' ?

1.1. Réduction semi-stable

Une première réponse est apportée par le théorème de réduction semi-stable de Kempf, Knudsen, Mumford et Saint-Donat [KKMS73, p. 53].

Théorème 1.1. — *Si* $\dim(B) = 1$*, on peut choisir* $f' : \mathcal{X}' \to B'$ *comme dans* (1) *de sorte que* B' *et* $\mathcal{X}'$ *soient lisses et les fibres de* f' *soient des diviseurs réduits à croisements normaux stricts dans* $\mathcal{X}'$.

L'assertion que les fibres sont réduites (c'est-à-dire sans multiplicités) est ici essentielle. Quand la base a dimension arbitraire, on dispose encore d'un théorème de réduction semi-stable, démontré dans une variante faible par Abramovich et Karu [AK00] et en toute généralité par Adiprasito, Liu et Temkin [ALT18].

Théorème 1.2. — *On peut choisir* $f' : \mathcal{X}' \to B'$ *comme dans* (1) *de sorte que* B' *et* $\mathcal{X}'$ *soient lisses, et* f' *soit plat à fibres réduites.*

Les énoncés de [AK00, ALT18] sont plus précis : on peut garantir que f' soit munie d'une structure toroïdale. On en déduit par exemple que les fibres de f' sont Gorenstein [AK00, Proposition 6.5].

Les théorèmes de réduction semi-stable ci-dessus ont l'avantage de donner lieu à des familles $f' : \mathcal{X}' \to B'$ dont l'espace total $\mathcal{X}'$ est lisse. Ils ont cependant plusieurs inconvénients. Ils sont fortement non uniques. Par exemple, dans le cadre du théorème 1.1, on peut sans dommage éclater un point de $\mathcal{X}'$ en lequel f' est lisse. De cette manière, même si le morphisme f est lisse (si $\mathcal{X}_\eta$ a *bonne réduction*), il se peut que f' ne le soit pas. Ainsi, si les singularités des fibres sont très contrôlées, leur géométrie ne l'est pas du tout. Les théorèmes de réduction stable apportent une solution à ce problème.

1.2. Réduction stable pour les familles de courbes

Le premier tel énoncé, pour les familles à un paramètre de courbes, est dû à Deligne et Mumford [DM69] (d'autres preuves ont été données, par exemple dans [AW71, Te10]).

DÉFINITION 1.3. — *Une* ***courbe stable*** *est une variété projective connexe C de dimension* 1 *dont les singularités sont au plus nodales et dont le faisceau dualisant ω_C est ample. Le genre de C est l'entier $g(C) = h^0(C, \omega_C)$.*

THÉORÈME 1.4. — *Si* $\dim(B) = 1$ *et si $\mathcal{X}_\eta$ est une courbe stable, on peut choisir $f' : \mathcal{X}' \to B'$ comme dans* (1) *de sorte que f' soit plat à fibres des courbes stables, et $\phi_{\eta'}$ soit un isomorphisme.*

De plus, si B' est fixée, un tel $f' : \mathcal{X}' \to B'$ est unique.

Le théorème 1.4 s'applique en particulier quand $\mathcal{X}_\eta$ est une courbe lisse de genre $\geqslant 2$. À la différence du théorème 1.1, il ne restreint pas les singularités de $\mathcal{X}'$. La géométrie des fibres de f' est en revanche très contrainte.

Les énoncés d'unicité et d'existence dans le théorème 1.4 reflètent la séparation et la propreté de l'espace de modules des courbes stables $\overline{M}_g$ (et même, plus précisément, du champ de modules $\overline{\mathcal{M}}_g$ des courbes stables). La propreté de $\overline{\mathcal{M}}_g$ implique à son tour un théorème de réduction stable sur des bases de dimension arbitraire.

THÉORÈME 1.5. — *Si $\mathcal{X}_\eta$ est une courbe stable, on peut choisir $f' : \mathcal{X}' \to B'$ comme dans* (1) *de sorte que f' soit plat à fibres des courbes stables, et $\phi_{\eta'}$ soit un isomorphisme.*

Preuve. — Soit g le genre de $\mathcal{X}_\eta$. Il n'existe pas de famille universelle de courbes stables sur l'espace de modules $\overline{M}_g$. Il résulte en revanche du lemme de Chow pour les champs de Deligne-Mumford [LMB00, Théorème 16.6], appliqué au champ de modules $\overline{\mathcal{M}}_g$ des courbes stables, qu'il existe une famille plate $p : \mathcal{C} \to Z$ de courbes stables de genre g telle que le morphisme induit $Z \to \overline{\mathcal{M}}_g$ soit fini et surjectif. Remarquons que Z est propre par propreté de $\overline{\mathcal{M}}_g$. La courbe stable $\mathcal{X}_\eta$ induit un morphisme $\eta \to \overline{\mathcal{M}}_g$. Notons η' une composante irréductible du produit fibré $\eta \times_{\overline{\mathcal{M}}_g} Z$. Soient $\widetilde{B}$ la normalisation de B dans η' et $B' \to \widetilde{B}$ une modification résolvant les indéterminées de l'application rationnelle naturelle $\widetilde{B} \dashrightarrow Z$. Le morphisme $f' : \mathcal{X}' \to B'$ construit en changeant de base $p : \mathcal{C} \to Z$ par le morphisme $B' \to Z$ a les propriétés requises. $\square$

Le théorème 1.5, appliqué à une famille de courbes balayant une variété arbitraire, est un outil crucial dans la preuve du théorème d'altération des singularités de de Jong [dJ96] (voir plus précisément [dJ96, §2.24, §5.13] ou [Be97, §3.2.3]).

1.3. Réduction stable en dimension supérieure

Nous définirons plus loin une notion de variété stable (définition 2.2) et de famille de variétés stables ou famille stable (définition 2.4) en dimension supérieure, permettant de généraliser les théorèmes 1.4 et 1.5.

Pour l'instant, disons seulement qu'une variété propre et lisse est stable si et seulement si son fibré canonique est ample. C'est une condition bien plus restrictive pour les variétés de dimension $\geqslant 2$ que pour les courbes. Par exemple, les théorèmes ci-dessous ne s'appliquent pas aux familles de variétés de Fano, de variétés abéliennes ou de surfaces K3.

THÉORÈME 1.6. — *Si* $\dim(B) = 1$ *et si* $\mathcal{X}_\eta$ *est une variété stable, il existe* $f' : \mathcal{X}' \to B'$ *comme dans* (1) *tel que* f' *soit une famille stable, et* $\phi_{\eta'}$ *soit un isomorphisme.*

De plus, si B' *est fixée, un tel* $f' : \mathcal{X}' \to B'$ *est unique.*

Ce théorème est dû à Hacon et Xu [HX13] quand $\mathcal{X}_\eta$ est normale et à Kollár en général [Ko13a, Ko18b] (voir §3 pour plus de détails).

Comme dans le cas des courbes, une conséquence géométrique du théorème 1.6 est la propreté des espaces de modules de variétés stables (voir le théorème 2.6). Une fois de tels espaces de modules construits (ce qui est significativement plus dur que pour les espaces de modules de courbes, comme on le verra au § 4), l'argument expliqué dans la preuve du théorème 1.5 permet d'obtenir un théorème de réduction stable sur une base de dimension supérieure.

THÉORÈME 1.7. — *Si* $\mathcal{X}_\eta$ *est une variété stable, il existe* $f' : \mathcal{X}' \to B'$ *comme dans* (1) *tel que* f' *soit une famille stable, et* $\phi_{\eta'}$ *soit un isomorphisme.*

2. STABILITÉ

Dans cette section, nous définissons et étudions les analogues en dimension supérieure des courbes stables de Deligne et Mumford.

2.1. Variétés stables

On peut penser aux courbes lisses de genre $g \geqslant 2$ qui ne sont pas hyperelliptiques comme plongées, à l'aide de leur fibré canonique, dans l'espace projectif $\mathbb{P}^{g-1}_k$. Si l'on veut aussi prendre en compte les courbes hyperelliptiques, il faut plutôt considérer leur plongement tricanonique dans $\mathbb{P}^{5g-6}_k$. On voudra aussi penser aux variétés stables de dimension supérieure comme étant pluricanoniquement plongées. Ce point de vue va imprégner toute la suite de ce texte. Il explique le rôle prépondérant que vont jouer le faisceau canonique et ses puissances dans la définition des variétés stables.

2.1.1. *Singularités.* — Introduisons tout d'abord la classe des singularités que ces variétés stables pourront porter.

DÉFINITION 2.1. — *Une variété X est dite à* ***singularités semi-log canoniques (slc)*** *si elle satisfait les conditions (i)-(v) suivantes.*

(i) *X est réduite et purement de dimension d,*

(ii) *X est à croisements normaux doubles en codimension 1,*

(iii) *X satisfait la condition S_2 de Serre,*

(iv) *il existe $m > 0$ tel que $\omega_X^{[m]}$ soit inversible,*

(v) *les discrépances des diviseurs au-dessus de X sont $\geqslant -1$.*

Si X est de plus normale ou de manière équivalente par le critère de Serre, si X vérifie :

(ii′) *X est régulière en codimension 1,*

on dit que X est à ***singularités log canoniques (lc)****.*

Expliquons ces conditions. Que X soit à croisements normaux doubles en codimension 1 signifie qu'il existe un ouvert $U \subset X$ dont le complémentaire a codimension $\geqslant 2$, le long duquel X est soit régulière, soit localement isomorphe (pour la topologie étale ou, si $k = \mathbb{C}$, pour la topologie analytique) à la singularité $\{xy = 0\} \subset \mathbb{A}_k^{d+1}$. Qu'il soit nécessaire d'autoriser de telles singularités est déjà apparent dans le cas des courbes stables.

La condition S_2 de Serre est la propriété de Hartogs : elle stipule que les fonctions régulières sur X s'étendent au travers des fermés $Z \subset X$ de codimension $\geqslant 2$. Plus précisément, si Z est un tel fermé et si $j : X \setminus Z \hookrightarrow X$ est l'inclusion, le morphisme naturel $\mathcal{O}_X \to j_* \mathcal{O}_{X \setminus Z}$ est un isomorphisme. C'est un substitut de la normalité de X.

Les variétés stables doivent être pensées comme (pluri)canoniquement plongées et il est donc important de contrôler les formes différentielles de degré maximal sur X. C'est le rôle des conditions (iv) et (v). Notons $j : U \hookrightarrow X$ le plus gros ouvert le long duquel les singularités de X sont à croisements normaux doubles. Comme les croisements normaux doubles sont des singularités localement d'intersection complète, donc Gorenstein, le faisceau dualisant ω_U de U est un faisceau inversible (2). On définit le **faisceau canonique** (3) de X par $\omega_X := j_*\omega_U$ et on introduit, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, ses puissances réflexives $\omega_X^{[n]} := j_*(\omega_U^{\otimes n})$: les **faisceaux pluricanoniques** de X. Qu'il existe un entier $m > 0$ tel que $\omega_X^{[m]}$ soit un faisceau inversible, donc associé à un fibré en droites, est bien sûr une condition nécessaire à toute tentative de voir X comme plongée à l'aide de formes pluricanoniques !

2. Sur l'ouvert de lissité de X, il s'agit du faisceau canonique des formes différentielles de degré maximal. On peut décrire très concrètement ω_U en général : une section locale est une d-forme différentielle sur la normalisation, à pôles au plus logarithmiques le long de l'image inverse du lieu double, et dont les résidus le long des deux branches du lieu double sont opposés [Ko13a, Proposition 5.8].

3. On prendra garde que, X n'étant pas Cohen-Macaulay en général, ce faisceau peut ne pas coïncider avec le complexe dualisant de X : il n'en est qu'un des faisceaux de cohomologie.

La condition (v) donne un contrôle birationnel sur les formes pluricanoniques sur X. Soit $\pi : Y \to X$ une modification normale [4] de X (par exemple la normalisation de X ou une résolution des singularités de X), et soient $(E_i)_{i\in I}$ les diviseurs exceptionnels de π. Soit $m > 0$ un entier tel que $\omega_X^{[m]}$ soit inversible. Au-dessus du lieu $Y \setminus \bigcup_i E_i$ où π est un isomorphisme, on dispose d'un isomorphisme évident $\rho : \omega^{[m]}_{Y\setminus\cup_i E_i} \xrightarrow{\sim} (\pi^*\omega_X^{[m]})|_{Y\setminus\cup_i E_i}$. Comme $\omega_Y^{[m]}$ et $\pi^*\omega_X^{[m]}$ sont inversibles au point générique de chacun des E_i, le morphisme ρ a des zéros ou des pôles d'une certaine multiplicité le long de ces diviseurs, de sorte qu'il existe des $a_{E_i}(X) \in \frac{1}{m}\mathbb{Z}$ tels que ρ se prolonge en un isomorphisme

$$\rho : \omega_Y^{[m]} \xrightarrow{\sim} \pi^*\omega_X^{[m]}(\sum_i m \cdot a_{E_i}(X)E_i). \tag{2}$$

Les nombres rationnels $a_{E_i}(X)$ ont été choisis pour ne pas dépendre du choix de l'entier m : ce sont les **discrépances** des diviseurs E_i.

La condition (v) selon laquelle ces discrépances sont toujours $\geqslant -1$ signifie en substance que les formes canoniques sur X s'étendent en des formes à pôles au plus logarithmiques sur les modifications de X. Il suffit de la vérifier pour les diviseurs apparaissant sur une résolution arbitraire des singularités de X dont le diviseur exceptionnel est à croisements normaux stricts (combiner [Ko13a, Lemma 5.10 et Corollary 2.13]). C'est la condition la plus subtile de la définition 2.1. La preuve transparente de l'unicité dans le théorème de réduction stable au § 3.1 permet de se convaincre de sa pertinence.

On définit d'autres classes de singularités en conservant les conditions (i)-(iv), mais en demandant à ce que les discrépances des diviseurs au-dessus de X soient > -1 (resp. $\geqslant 0$, resp. > 0) : ce sont les singularités **kawamata log terminales** ou **klt** (resp. **canoniques**, resp. **terminales**). Ces singularités sont normales. Nous nous en servirons peu.

Ces définitions s'étendent sans difficultés à des schémas plus généraux que des variétés. Nous les utiliserons par exemple pour des schémas de type fini sur le spectre d'un anneau de valuation discrète au §3 et au §4.2.4.

2.1.2. *Définition.* — La notion de stabilité combine les propriétés locales discutées ci-dessus et une condition globale d'amplitude du faisceau canonique.

DÉFINITION 2.2. — *Une **variété stable** est une variété projective X à singularités slc dont le faisceau canonique ω_X est ample.*

Le faisceau ω_X n'est pas inversible en général. La définition 2.2 requiert seulement qu'il soit ample comme $\mathbb{Q}$-fibré en droites, c'est-à-dire que $\omega_X^{[m]}$ soit ample pour un $m > 0$ (de manière équivalente, pour tout $m > 0$) tel que $\omega_X^{[m]}$ soit inversible.

Les courbes stables sont traditionnellement supposées connexes, comme dans la définition 1.3. Il est plus naturel de ne pas faire cette hypothèse (voir par exemple le

4. Une **modification** est un morphisme propre birationnel. On n'a pas vraiment besoin de supposer Y normale : il suffit que Y soit S_2 et régulière aux points génériques des diviseurs exceptionnels de π.

théorème 3.3). La définition des variétés stables dans le cas des surfaces avait été dégagée par Kollár et Shepherd-Barron [KSB88, §5.4] et la définition en dimension arbitraire en est une extension immédiate. En revanche, l'étude de ces variétés est bien plus difficile en dimension $\geqslant 3$ qu'en dimension 2.

2.1.3. *Cas des paires.* — Nous utiliserons la variante suivante des définitions 2.1 et 2.2. Une **paire** (X, Δ) est constituée d'une variété X et d'un $\mathbb{Q}$-diviseur de Weil $\Delta = \sum c_i \Delta_i$, où les Δ_i sont des sous-variétés intègres de codimension 1 de X non incluses dans le lieu singulier de X et où $c_i \in \mathbb{Q}$ (dans la pratique, on aura même $c_i \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$). On étend les définitions à ce cadre en remplaçant partout ω_X par le faisceau canonique $\omega_X(\Delta)$ de la paire.

Définition 2.3. — *La paire (X, Δ) est à* ***singularités slc*** *(resp.* ***lc****) si $c_i \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, si X est réduite, purement de dimension d, à croisements normaux doubles (resp. régulière) en codimension 1 et S_2, s'il existe un entier $m > 0$ tel que $\omega_X^{[m]}(m\Delta)$ est inversible et si les discrépances $a_E(X, \Delta)$ des diviseurs E au-dessus de X sont $\geqslant -1$.*

Elle est ***stable*** *si elle est à singularités slc si X est projective et si $\omega_X(\Delta)$ est ample.*

Dans cette définition, les hypothèses faites sur X assurent l'existence d'un ouvert $j : U \hookrightarrow X$ dont le complémentaire a codimension $\geqslant 2$ le long duquel X est Gorenstein et les Δ_i sont Cartier. Si $n \in \mathbb{Z}$ est tel que les nc_i sont des entiers, cela permet de définir le faisceau n-canonique $\omega_X^{[n]}(n\Delta) := j_*(\omega_U^{\otimes n}(n\Delta|_U))$ de (X, Δ). Les discrépances $a_E(X, \Delta)$ sont calculées par rapport au faisceau canonique $\omega_X(\Delta)$ de la paire. Si $\pi : Y \to X$ est une modification normale de X avec diviseurs exceptionnels E_i, si $(\pi^{-1})_*\Delta$ est la transformée stricte de Δ dans Y, et si $m > 0$ est tel que $\omega_X^{[m]}(m\Delta)$ est inversible, elles sont définies par l'isomorphisme naturel généralisant (2) :

$$\omega_Y^{[m]}(m(\pi^{-1})_*\Delta) \xrightarrow{\sim} \pi^*\omega_X^{[m]}(m\Delta)\Big(\sum_i m \cdot a_{E_i}(X, \Delta)E_i\Big). \tag{3}$$

Nous aurons à considérer des paires pour plusieurs raisons ; la principale est la suivante. Soit X une variété satisfaisant aux conditions (i)-(iv) de la définition 2.1. Soit $m > 0$ tel que $\omega_X^{[m]}$ soit inversible et soit $\nu : \widetilde{X} \to X$ la normalisation de X. Notons $\Gamma \subset \widetilde{X}$ le lieu exceptionnel de ν, muni de sa structure réduite. C'est un diviseur qui est l'adhérence de l'image inverse par ν du lieu où X est à croisements normaux doubles. On appelle Γ le **conducteur** de X. L'isomorphisme évident $(\nu^*\omega_X^{[m]})|_{\widetilde{X}\setminus\Gamma} \xrightarrow{\sim} \omega_{\widetilde{X}}^{[m]}|_{\widetilde{X}\setminus\Gamma}$ se prolonge en un isomorphisme

$$\nu^*\omega_X^{[m]} \xrightarrow{\sim} \omega_{\widetilde{X}}^{[m]}(m\Gamma), \tag{4}$$

comme le montre un calcul local sur le lieu où X est à croisements normaux doubles [Ko13a, (5.7.4)]. On déduit immédiatement de l'isomorphisme (4) l'équivalence [Ko13a, Lemma 5.10] :

$$X \text{ est à singularités slc} \iff (\widetilde{X}, \Gamma) \text{ est à singularités lc.} \tag{5}$$

Ce procédé de normalisation permettra de ramener l'étude des variétés à singularités slc au cas normal. Comprendre dans quelle mesure on peut reconstruire X à partir de $(\widetilde{X}, \Gamma)$ est une question difficile (voir le théorème 3.3 pour un énoncé précis).

2.1.4. *Exemples.* — Les seules singularités slc de dimension 1 sont les nœuds.

En dimension 2, les singularités slc ont été classifiées par Kawamata [Ka80, Theorem 2] dans le cas normal et par Kollár et Shepherd-Barron [KSB88, Theorem 4.24] en général (voir aussi [Ko13a, §3.3] ou [Ko18b]). Sans rappeler cette classification en détail, donnons quelques exemples représentatifs. Les singularités obtenues comme quotient de $\mathbb{A}^2_k$ par un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_2(k)$ sont lc. Cela inclut toutes les singularités Du Val (ou points doubles rationnels). D'autres singularités lc de surface sont les singularités elliptiques obtenues comme cônes sur une courbe elliptique.

Des exemples de surfaces slc non normales sont les points à croisement normaux triples $\{xyz = 0\} \subset \mathbb{A}^3_k$, le parapluie de Whitney ou pinch point $\{x^2 = yz^2\} \subset \mathbb{A}^3_k$, ou un cône sur une courbe elliptique nodale $\{y^2 = x^3 + x^2\} \subset \mathbb{A}^3_k$.

On ne dispose pas de classification en dimension supérieure. Les cônes

$$C(X, L) := \mathrm{Spec} \bigoplus_{l \geqslant 0} H^0(X, L^{\otimes l}) \tag{6}$$

où X est une variété projective munie d'un fibré ample L, fournissent une instructive source d'exemples. On calcule que $C(X, L)$ a des singularités slc (resp. lc) si et seulement si X a des singularités slc (resp. lc) et s'il existe des entiers $m < 0$ et $l \geqslant 0$ tels que $\omega_X^{[m]} \simeq L^{\otimes l}$ [Ko13a, §3.1]. En particulier, le cône anticanonique sur une variété de Fano, ou un cône associé à un fibré ample arbitraire sur une variété de Calabi-Yau, ont des singularités lc.

D'autres exemples élémentaires sont les singularités quotient, c'est-à-dire les quotients de variétés lisses [5] par l'action d'un groupe fini [Ko13a, 3.18]. Des exemples plus riches, à la topologie plus compliquée, ont été construits par Kollár [Ko11b].

2.2. Familles stables

2.2.1. *Définition.* — Comme on le verra au §2.2.2, les familles plates à fibres slc (resp. stables) ne donnent pas lieu à une bonne notion de famille de variétés slc (resp. stables). La raison pour cela est que, si l'on souhaite penser aux variétés stables comme étant pluricanoniquement plongées, il est important que les faisceaux (pluri)canoniques des fibres varient convenablement en famille ; c'est une condition que l'on doit imposer.

DÉFINITION 2.4. — *Une* ***famille localement stable*** *est un morphisme plat à fibres slc $f : \mathcal{X} \to B$ tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le faisceau $\omega_{\mathcal{X}/B}^{[n]}$ soit f-plat de formation commutant*

5. Il est faux en général que le quotient d'une variété lc par un groupe fini est encore lc. Soit $\pi : S \to T$ une surface K3 obtenue comme revêtement double de $T = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ramifié au-dessus d'un diviseur lisse de bidegré $(4, 4)$, et notons $L := \mathcal{O}_T(1, 2)$. Le morphisme de cônes $C(S, \pi^* L) \to C(T, L)$ est le quotient par une action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, mais $C(S, \pi^* L)$ est lc alors que $C(T, L)$ ne l'est pas.

à tout changement de base. C'est une ***famille de variétés stables*** *ou* ***famille stable*** *si f est de plus propre à fibres stables.*

Dans cette définition, les faisceaux pluricanoniques relatifs $\omega^{[n]}_{\mathcal{X}/B}$ sont construits comme dans le cas absolu. Plus précisément, on note $j : \mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{X}$ le plus gros ouvert le long duquel les singularités des fibres géométriques de f sont à croisements normaux doubles. Le morphisme $f|_{\mathcal{U}}$ est plat à fibres Gorenstein, de sorte que le faisceau dualisant relatif $\omega_{\mathcal{U}/B}$ est inversible [Co00, Theorem 3.5.1]. On pose $\omega_{\mathcal{X}/B} := j_*\omega_{\mathcal{U}/B}$ et $\omega^{[n]}_{\mathcal{X}/B} := j_*(\omega^{\otimes n}_{\mathcal{U}/B})$.

La définition 2.4 requiert tout d'abord que les faisceaux pluricanoniques relatifs $\omega^{[n]}_{\mathcal{X}/B}$ soient plats sur B. Cette hypothèse ne suffit pas à assurer que les fibres $\omega^{[n]}_{\mathcal{X}/B}|_{\mathcal{X}_b}$ de ces faisceaux au-dessus d'un point $b \in B$ coïncident avec les faisceaux pluricanoniques $\omega^{[n]}_{\mathcal{X}_b}$ de la fibre. C'est le rôle de la condition de changement de base dans la définition 2.4 : elle revient à imposer que le morphisme naturel $\omega^{[n]}_{\mathcal{X}/B}|_{\mathcal{X}_b} \to \omega^{[n]}_{\mathcal{X}_b}$ soit un isomorphisme, pour tout $b \in B$ et tout $n \in \mathbb{Z}$. Ceci implique [6] en effet la propriété, a priori plus forte, de commutation à tout changement de base : pour tout morphisme $g : B' \to B$, si l'on note $g_{\mathcal{X}} : \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ le changement de base, le morphisme naturel $g^*_{\mathcal{X}}\omega^{[n]}_{\mathcal{X}/B} \to \omega^{[n]}_{\mathcal{X}'/B'}$ est un isomorphisme.

Il suit de la définition 2.4 que si f est localement stable, il existe $m > 0$ tel que le faisceau $\omega^{[m]}_{\mathcal{X}/B}$ soit inversible (et f-ample si f est stable). En effet, par récurrence noethérienne sur la base B, on peut choisir m de sorte que $\omega^{[m]}_{\mathcal{X}_b}$ soit inversible pour tout $b \in B$. Il résulte de sa platitude et de sa commutation au changement de base que $\omega^{[m]}_{\mathcal{X}/B}$ est inversible (et f-ample si les fibres sont stables). Une famille stable est donc bien canoniquement polarisée, comme désiré.

Les conditions de platitude et de commutation au changement de base pour $\omega^{[n]}_{\mathcal{X}/B}$ sont subtiles. Elles sont automatiques pour $n = 1$ par [KK10, Theorem 7.9.3] et [Ko13a, Corollary 6.32]. Elles sont toujours vérifiées si les fibres de f sont à singularités canoniques [7] (voir [Ko13b, Aside 30]). Enfin, quand la base B est réduite, on dispose d'un critère numérique : il est équivalent de demander que le degré de la polarisation canonique des fibres soit localement constant sur la base [Ko18b].

Dans la définition 2.4, la condition de commutation de tous les $\omega^{[n]}_{\mathcal{X}/B}$ aux changements de base est connue sous le nom de *condition de Kollár*. Une variante, dite *condition de Viehweg* [Vi95, Assumptions 8.30], consiste à demander que $\omega^{[m]}_{\mathcal{X}/B}$ soit inversible (et par conséquent commute aux changements de base) seulement pour un $m > 0$. Elle permet également de construire des espaces de modules projectifs de variétés stables ;

6. Pour le voir, on peut combiner [Gr65, Théorème 5.10.5 et Proposition 6.3.1].

7. Justifions-le. Par classification des singularités canoniques de surfaces [KM98, Theorem 4.20], les fibres de f sont Gorenstein en codimension 2. Par [Co00, Theorem 3.5.1], il existe un ouvert $j : \mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{X}$ tel que $\mathcal{X} \setminus \mathcal{U}$ a codimension $\geqslant 3$ dans les fibres de f et tel que $f|_{\mathcal{U}}$ est Gorenstein, de sorte que $\omega_{\mathcal{U}/B}$ est inversible. Comme les fibres de f sont de plus S_3 par [El81] (voir le théorème 2.8), on peut conclure à l'aide de [Ko95, Theorem 12].

ils diffèrent par leur structure schématique de ceux obtenus à l'aide de la condition de Kollár (voir [AK16]).

2.2.2. *Exemples.* — Illustrons, en suivant [Kov09, 7.A] et [Ko13b, Example 26], l'importance de la condition de changement de base dans la Définition 2.4.

Considérons d'une part le plongement de Veronese $\Sigma_1 = \mathbb{P}^2_k \hookrightarrow \mathbb{P}^5_k$ et d'autre part le plongement $\Sigma_2 = \mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k \hookrightarrow \mathbb{P}^5_k$ induit par $\mathcal{O}(1,2)$. Ces deux surfaces projectives ont pour sections hyperplanes lisses des courbes rationnelles normales quartiques Γ. Pour $i \in \{1,2\}$, soit $f_i : \mathcal{X}_i \to \mathbb{P}^1_k$ un pinceau général de sections hyperplanes du cône $C(\Sigma_i, \mathcal{O}(1))$ sur Σ_i. Toutes les fibres de f_i sont isomorphes à Σ_i, sauf la section hyperplane passant par le sommet du cône, qui est isomorphe au cône C sur la courbe rationnelle normale quartique [8]. On voit ainsi que les fibres de f_i ont des singularités lc (voir § 2.1.4).

On remarque cependant que les nombres d'intersection $\omega_{\Sigma_1} \cdot \omega_{\Sigma_1} = 9$ et $\omega_{\Sigma_2} \cdot \omega_{\Sigma_2} = 8$ des surfaces Σ_1 et Σ_2 diffèrent. Comme f_1 et f_2 ont une fibre spéciale isomorphe à C en commun, cette remarque n'est pas compatible avec le fait que les faisceaux dualisants relatifs de ces familles forment un $\mathbb{Q}$-fibré en droites. Cela s'explique par le fait que, si f_1 est bien localement stable (en particulier, le faisceau $\omega^{[2]}_{\mathcal{X}_1/B}$ est inversible [9]), la famille f_2 ne l'est pas ($\omega^{[n]}_{\mathcal{X}_2/B}$ n'est inversible pour aucun $n > 0$ [9]).

En remplaçant les fibres des f_i par des revêtements ramifiés appropriés, on obtient des exemples analogues pour lesquels f_1 est stable (et pas seulement localement stable).

On construit un exemple un peu différent en suivant [KSB88, Example 5.12]. Effectuons la même construction à l'aide des deux surfaces $\Sigma'_1 = \mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k \hookrightarrow \mathbb{P}^8_k$ et $\Sigma'_2 = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1_k}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)) \hookrightarrow \mathbb{P}^8_k$, plongées par leur fibré anticanonique, dont les sections hyperplanes lisses sont des courbes elliptiques octiques. Prenant, pour $i \in \{1,2\}$, un pinceau de sections hyperplanes du cône $C(\Sigma'_i, \mathcal{O}(1))$ sur Σ'_i, on peut obtenir deux familles $f'_i : \mathcal{X}'_i \to \mathbb{P}^1_k$ dont les fibres générales sont toutes isomorphes à Σ'_i, sauf une qui est un cône sur une courbe elliptique octique fixée. À la différence de l'exemple précédent, les deux familles sont localement stables : on vérifie même que $\omega_{\mathcal{X}^i/B}$ est inversible [9] pour $i \in \{1,2\}$.

Comme ci-dessus, en remplaçant les f_i par des revêtements ramifiés bien choisis, on peut obtenir deux familles stables qui ont une fibre singulière en commun et dont les fibres générales, lisses, ne peuvent être membres d'une même famille lisse de base irréductible. Il s'agit donc d'un exemple où deux composantes irréductibles distinctes de l'espace des modules des variétés stables s'intersectent. Ce phénomène n'apparaît pas en dimension 1. Signalons que Horikawa [Ho75, Theorem 3] a construit de tels exemples pour lesquels la fibre spéciale commune aux deux familles est de plus lisse.

8. Cette section hyperplane pourrait a priori avoir un point immergé au sommet. On vérifie que ce n'est pas le cas en remarquant que Σ_i et C ont même polynôme de Hilbert.

9. Dans ces exemples, l'unique singularité de l'espace total est celle d'un cône. On vérifie alors ces assertions à l'aide du calcul du groupe des classes d'un cône [Ko13a, Proposition 3.14 (4)].

2.3. Espaces de modules de variétés stables

2.3.1. *Existence.* — Nous pouvons à présent donner l'énoncé précis d'existence de l'espace de modules des variétés stables. La construction de l'espace de modules des courbes stables demandait de fixer le genre de ces courbes. En dimension supérieure, on doit aussi fixer un invariant discret : la fonction de Hilbert.

Définition 2.5. — *La* ***fonction de Hilbert*** $F : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *d'une variété stable* X *est*

$$F(n) := \chi(X, \omega_X^{[n]}).$$

Comme ω_X n'est pas inversible en général, la fonction de Hilbert de X peut ne pas être un polynôme en n [10]. L'hypothèse de platitude dans la définition 2.4 montre que cet invariant est localement constant sur la base d'une famille stable.

Théorème 2.6. — *Soit* $F : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *une fonction. La catégorie fibrée en groupoïdes*

(7) $\quad B \mapsto \{$*familles stables* $f : \mathcal{X} \to B$ *dont les fibres ont fonction de Hilbert* $F\}$

sur la catégorie des k*-schémas est un champ de Deligne-Mumford* $\overline{\mathcal{M}}_F$ *propre sur* k *admettant un espace de modules grossier projectif* $\overline{M}_F$*.*

La preuve de ce théorème, due à de nombreux auteurs, sera esquissée au §4. Le lecteur qui ne serait pas familier avec les champs [LMB00, Ol16] peut ne retenir que la seconde partie de son énoncé. Elle signifie qu'il existe une variété projective $\overline{M}_F$ sur k et une manière d'associer à toute famille stable $f : \mathcal{X} \to B$ de même fonction de Hilbert F un morphisme $\psi(f) : B \to \overline{M}_F$, qui soit fonctorielle en B, de sorte que $(\overline{M}_F, \psi)$ soit universel pour cette propriété, et induise une bijection

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{classes d'isomorphisme de variétés} \\ \text{stables sur } K \text{ de fonction de Hilbert } F \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \overline{M}_F(K).$$

pour toute extension algébriquement close K de k. Par exemple, le théorème 2.6 munit l'ensemble des classes d'isomorphisme de variétés stables complexes de fonction de Hilbert F d'une structure naturelle de variété projective complexe.

Insistons sur l'importance de la définition des singularités slc pour la validité de cet énoncé. Admettre une classe plus large de singularités aurait nui au caractère séparé de $\overline{M}_F$; restreindre les singularités autorisées aurait empêché sa propreté.

Dans le cas des surfaces, le théorème 2.6 est connu depuis longtemps, par des travaux de Kollár, Shepherd-Barron et Alexeev [KSB88, Ko90, Al94], à deux subtilités près. D'une part, une structure schématique sur $\overline{M}_F$ prenant en compte les fonctions nilpotentes, n'a été construite rigoureusement que plus tard (voir [HK04, Ko08, AH11] et §4.2.2). D'autre part, la propreté des composantes irréductibles de $\overline{M}_F$ paramétrant génériquement des

10. Soit L un fibré en droites très ample sur une surface d'Enriques S et soit $Z = C(S, L)$ le cône sur S dans le plongement induit par L. Soit $X \to S$ un revêtement double ramifié le long d'une section lisse de $L^{\otimes 4}$. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que X est stable et que sa fonction de Hilbert n'est pas un polynôme.

variétés non normales n'a pu être établie que grâce aux techniques de recollement de Kollár (voir [Ko13a, Ko18b] et §3.3).

2.3.2. *Géométrie.* — La fonction de Hilbert $F(n) = (g-1)(2n-1)$ donne lieu au champ de modules $\overline{\mathcal{M}}_g$ des courbes stables de Deligne et Mumford [DM69] et à son espace de modules grossier $\overline{M}_g$. Le champ $\overline{\mathcal{M}}_g$ est lisse et irréductible, de sorte que $\overline{M}_g$ est normal et irréductible. On a vu à la fin du §2.2.2 que ces propriétés tombaient en défaut en dimension supérieure. Vakil [Va06, Main Theorem M2] a même démontré que les singularités des variétés $\overline{M}_F$ peuvent être arbitrairement mauvaises.

La géométrie de $\overline{M}_g$ est aujourd'hui bien comprise et fait l'objet d'une abondante littérature. A contrario, on dispose de très peu de descriptions concrètes d'espaces de modules non triviaux de variétés stables en dimension supérieure (à l'exception notable de l'espace de modules des produits de courbes stables [vO05]). On ne sait par exemple pas décrire l'adhérence de l'ouvert paramétrant des surfaces quintiques dans $\mathbb{P}^3_k$ [Ga14, Ra17]. On trouvera dans [FPR16] l'état de l'art dans le cas des surfaces de Godeaux.

Comme la fonction de Hilbert d'une variété stable lisse est polynomiale, les variétés stables dont la fonction de Hilbert n'est pas polynomiale, comme dans la note de bas de page (10), donnent lieu à des composantes connexes de l'espace de modules qui ne paramètrent que des variétés singulières.

Soit enfin M une composante connexe de $\overline{M}_F$. On sait que si l'une des variétés que M paramètre vérifie la condition S_k de Serre, alors toutes ont cette propriété [KK10, Corollary 1.3]. Par conséquent, si l'une d'entre elles est Cohen-Macaulay (par exemple : lisse), toutes sont Cohen-Macaulay. Il est malgré tout utile de considérer aussi des variétés stables qui ne sont pas Cohen-Macaulay ; on en verra une raison au §3.3.3.

2.3.3. *Variantes.* — De nombreuses variantes des espaces de modules de variétés stables sont utiles et ont été étudiées. Tout d'abord, il est naturel de considérer plutôt des espaces de modules de paires stables, qui généralisent en dimension supérieure les espaces de modules de courbes stables pointées. Ce sujet a été développé dans [Ha03, Ha04, Al08, KP17] et le livre [Ko18b] en fait une étude approfondie.

Il est également intéressant de construire des espaces de modules de morphismes stables à valeurs dans une variété fixée. Quand la source du morphisme est une courbe, ces espaces ont été introduits par Kontsevich (voir [FP97]), et on pourra consulter [Al96, DR16] en dimension supérieure.

Les résultats en caractéristique positive sont limités. L'article [Pa17] contient le meilleur énoncé connu : sur un corps de caractéristique $p \geqslant 7$, l'espace de modules des surfaces stables existe comme espace algébrique séparé et ses sous-espaces propres sont projectifs.

2.4. Outils pour l'étude des singularités slc

Pour obtenir des compactifications modulaires $\overline{M}_F$ des espaces de modules de variétés projectives lisses canoniquement polarisées, nous avons dû autoriser des variétés à singularités slc. Que ce soit pour construire ces compactifications ou pour d'éventuelles applications de leur existence, il est important d'étudier cette classe de singularités. Il s'avère qu'elles ont des propriétés remarquables ; nous en décrivons ici quelques-unes.

2.4.1. *Adjonction.* — Soit $(X, \Delta + B)$ une paire dans laquelle le diviseur de Weil B est affecté d'un coefficient 1. On suppose que X est normale, purement de dimension d, et qu'il existe un entier $m > 0$ tel que $\omega_X^{[m]}(m\Delta + mB)$ est inversible. Considérons la normalisation $\nu : \widetilde{B} \to B$ de B et soit $U \subset X$ le plus gros ouvert disjoint de Δ le long duquel X et B sont tous deux réguliers. L'isomorphisme canonique $\omega_X(B)|_{B\cap U} \xrightarrow{\sim} \omega_{B\cap U}$ donné par le résidu des formes différentielles induit un isomorphisme

$$\omega_X^{[m]}(m\Delta + mB)|_{\widetilde{B}} \xrightarrow{\sim} \omega_{\widetilde{B}}^{[m]}(m\,\mathrm{Diff}_{\widetilde{B}}(\Delta)), \tag{8}$$

où $\mathrm{Diff}_{\widetilde{B}}(\Delta)$ est un $\mathbb{Q}$-diviseur de Weil sur $\widetilde{B}$ uniquement déterminé et indépendant de m : c'est la **différente** de Δ sur $\widetilde{B}$ (voir [Ko13a, Definition 4.2]).

Dans de nombreuses situations, par exemple dans le cadre d'une récurrence sur la dimension, il est utile de ramener l'étude de $(X, \Delta + B)$ à celle de $(\widetilde{B}, \mathrm{Diff}_{\widetilde{B}}(\Delta))$. Le théorème 2.7, dû à Kawakita [Ka07], et qui fait suite à des travaux de Shokurov [Sh92] et de Kollár [Ko92, §17], est un outil précieux pour ce type d'arguments.

Théorème 2.7. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La paire $(X, \Delta + B)$ est lc dans un voisinage de B.*

(ii) *La paire $(\widetilde{B}, \mathrm{Diff}_{\widetilde{B}}(\Delta))$ est lc.*

L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii), dite *adjonction*, est facile. C'est l'implication réciproque (ii) $\Longrightarrow$ (i), dite *inversion de l'adjonction*, qui est délicate. Sa preuve repose de manière essentielle sur le théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg.

Par le biais de l'équivalence (5), on peut déduire du théorème 2.7 des énoncés portant sur les singularités slc (voir [Pa16, Lemma 2.10, Corollary 2.11]).

2.4.2. *Propriétés cohomologiques.* — La première indication que les classes de singularités que nous considérons ont de bonnes propriétés cohomologiques a été le théorème d'Elkik [El81] selon lequel les singularités canoniques sont rationnelles. Ce résultat reste valide plus généralement pour les singularités klt [KM98, Theorem 5.22].

Théorème 2.8. — *Les singularités klt sont rationnelles.*

On en déduit que les singularités klt sont Cohen-Macaulay [KM98, Theorem 5.10].

Malheureusement, les singularités lc ne sont pas toujours rationnelles, ni même Cohen-Macaulay. Par exemple, un cône sur une surface abélienne est lc mais pas S_3 [Ko13a, Example 3.6]. Il est donc nécessaire de trouver un substitut à la rationalité, qui s'applique aux variétés lc (ou plus généralement slc). Kollár et Kovács ont montré que les singularités Du Bois [Ko13a, §6] remplissent ce rôle (voir [KK10], [Ko13a, §6.2]).

Théorème 2.9. — *Les singularités slc sont Du Bois.*

Une conséquence concrète de cet énoncé est le fait que si $f : \mathcal{X} \to B$ est une famille stable, les fonctions $b \mapsto h^i(\mathcal{X}_b, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_b})$ sont localement constantes sur B [DB81, Théorème 4.6]. Nous n'utiliserons pas les singularités Du Bois dans la suite de ce texte.

En revanche, nous devrons savoir contrôler précisément le défaut de la propriété S_3 des singularités slc. Nous utiliserons à cet effet un résultat d'Alexeev [Al08, Lemma 3.2], étendu dans [Ko13a, Theorem 7.20]. On dit qu'une sous-variété intègre d'une variété X à singularités slc est un **centre log canonique** de X si c'est l'image d'un diviseur au-dessus de X dont la discrépance est égale à -1.

Théorème 2.10. — *Soit X une variété slc. Si $x \in X$ n'est pas le point générique d'un centre log canonique de X, on a* $\mathrm{prof}(\omega_{X,x}^{[n]}) \geqslant \min(3, \dim(\mathcal{O}_{X,x}))$ *pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*

Les cas $n = 0$ et $n = 1$ sont explicités dans [Ko13a, Corollaries 7.21 and 7.22], et le cas général se prouve de la même manière [(11)].

3. LE THÉORÈME DE RÉDUCTION STABLE

Nous expliquons dans cette section la preuve du théorème 1.6. On en considère plutôt une variante locale sur un anneau de valuation discrète R de corps de fonctions K. On note $T = \mathrm{Spec}(R)$ son spectre, de point fermé t et de point générique η.

Théorème 3.1. — *Soit X une variété stable sur K. Il existe une extension finie d'anneaux de valuations discrètes $R \subset R'$ de corps de fonctions $K \subset K'$ et une famille stable $f : \mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(R')$ telle que $\mathcal{X}_{K'} \simeq X_{K'}$. Si R' est fixé, cette famille est unique.*

Que le théorème 3.1 implique le théorème de réduction stable sous sa forme globale énoncée au théorème 1.6 est standard.

Preuve du théorème 1.6. — Soit $f : \mathcal{X} \to B$ un morphisme propre de base une courbe intègre de corps de fonctions K. Si $\mathcal{X}_\eta$ est stable, la famille f est stable au-dessus d'un ouvert dense $U \subset B$ (par exemple, par les arguments des §§4.2.1–4.2.4). Pour tout $b \in B \setminus U$, le théorème 3.1 appliqué à l'anneau de valuation discrète $R_b := \mathcal{O}_{B,b}$ fournit une extension finie R'_b de R_b de corps de fonctions K'_b telle que $\mathcal{X}_{K'_b}$ ait un modèle stable sur R'_b. Soit K' une extension galoisienne de K dans laquelle tous les K'_b se plongent et soit $\pi : B' \to B$ la normalisation de B dans K'. Par construction, la variété $\mathcal{X}_{K'}$ possède un modèle stable au voisinage de tout point de B'. Ces modèles locaux se recollent par unicité. □

11. On travaille localement au voisinage de x et on applique [Ko13a, Theorem 7.20] avec $\Delta = \Delta' = 0$ à un diviseur de Weil $D \subset X$ tel que $\mathcal{O}_X(-D) \simeq \omega_X^{[n]}$.

Le théorème 3.1 est dû à Hacon et Xu [HX13] et Kollár [Ko13a, Ko18b]. C'est ce théorème qui nous permettra de vérifier la propreté du champ de modules des variétés stables (voir §4.3). Les résultats antérieurs de Birkar, Cascini, Hacon et M$^{\mathrm{c}}$Kernan [BCHM10] auraient cependant suffi à démontrer la propreté des composantes irréductibles de $\overline{\mathcal{M}}_F$ qui paramètrent génériquement des variétés lisses.

La preuve du théorème 3.1 repose sur le point de vue selon lequel les variétés stables doivent être considérées comme pluricanoniquement plongées. Plus précisément, si X est une variété stable et si $m > 0$ est tel que $\omega_X^{[m]}$ est inversible, on peut reconstruire X à partir de son algèbre m-canonique par la formule $X \simeq \operatorname{Proj} \bigoplus_{\ell \geqslant 0} H^0(X, \omega_X^{[\ell m]})$. L'existence comme l'unicité des familles stables dans le théorème 3.1 seront obtenues par le biais de ces algèbres m-canoniques.

3.1. Unicité

Montrons la propriété d'unicité dans le théorème 3.1. La preuve donnée dans [Ko13b, Proposition 6] quand les f_i sont lisses s'étend au cas général [Ko18b]. Commençons par démontrer un lemme que nous utiliserons à plusieurs reprises.

Lemme 3.2. — *Soit $f : \mathcal{X} \to T$ un morphisme propre et plat dont les fibres satisfont les conditions (i)-(iv) de la définition 2.1. Soit $m > 0$ un entier tel que $\omega_{\mathcal{X}/T}^{[m]}$ soit inversible. Si la variété $\mathcal{X}_t$ est à singularités slc, la paire $(\mathcal{X}, \mathcal{X}_t)$ est à singularités slc.*

Preuve. — On considère le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathcal{X}_t} \arrow[r, "\tilde{\iota}"] \arrow[d, "\nu_t"] & \widetilde{\mathcal{X}} \arrow[d, "\nu"] \\ \mathcal{X}_t \arrow[r, "\iota"] & \mathcal{X}, \end{tikzcd}$$

où ν et ν_t sont les normalisations de $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}_t$, et où ι et $\tilde{\iota}$ sont les morphismes naturels. On note $\Gamma \subset \widetilde{\mathcal{X}}$ et $\Delta \subset \widetilde{\mathcal{X}_t}$ les conducteurs de $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}_t$ (voir §2.1.3). Par définition des conducteurs et de la différente (voir (4) et (8)), on dispose d'isomorphismes naturels

$$\omega_{\widetilde{\mathcal{X}_t}}^{[m]}(m\Delta) \simeq \nu_t^* \omega_{\mathcal{X}_t}^{[m]} \simeq \nu_t^* \iota^* \omega_{\mathcal{X}}^{[m]}(m\,\mathcal{X}_t) \simeq \tilde{\iota}^* \omega_{\widetilde{\mathcal{X}}}^{[m]}(m(\widetilde{\mathcal{X}})_t + m\Gamma) \simeq \omega_{\widetilde{\mathcal{X}_t}}^{[m]}(m \operatorname{Diff}_{\widetilde{\mathcal{X}_t}}(\Gamma)).$$

La composée de ces isomorphismes étant l'identité de $\omega_{\widetilde{\mathcal{X}_t}}^{[m]}$ aux points génériques de $\widetilde{\mathcal{X}_t}$, il suit que $\Delta = \operatorname{Diff}_{\widetilde{\mathcal{X}_t}}(\Gamma)$. Comme $\mathcal{X}_t$ est slc, la paire $(\widetilde{\mathcal{X}_t}, \Delta)$ est lc par (5), donc la paire $(\widetilde{\mathcal{X}}, \Gamma + (\widetilde{\mathcal{X}})_t)$ est lc par inversion de l'adjonction (théorème 2.7). On déduit que $(\mathcal{X}, \mathcal{X}_t)$ est slc par (5), qui s'adapte immédiatement au cas des paires. □

Nous pouvons à présent démontrer la propriété d'unicité dans le théorème 3.1. Soient $f_1 : \mathcal{X}_1 \to T$ et $f_2 : \mathcal{X}_2 \to T$ des familles stables et $\phi_\eta : \mathcal{X}_{1,\eta} \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}_{2,\eta}$ un isomorphisme. On souhaite démontrer que ϕ_η s'étend en un isomorphisme $\phi : \mathcal{X}_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}_2$.

Pour cela, notons $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}_1 \times_T \mathcal{X}_2$ l'adhérence du graphe de ϕ_η. Soit $\mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ une modification S_2 de $\mathcal{X}$ qui est un isomorphisme au-dessus de $\mathcal{X}_\eta$, telle que les composantes irréductibles du lieu non normal de $\mathcal{Y}$ dominent toutes T [12]. Notons $g_i : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}_i$ les projections naturelles, et choisissons un entier $m > 0$ tel que les $\omega^{[m]}_{\mathcal{X}_i/T}$ soient inversibles.

Si $i \in \{1, 2\}$, la paire $(\mathcal{X}_i, (\mathcal{X}_i)_t)$ est slc par le lemme 3.2. Pour $\ell \geqslant 0$, on dispose par (2) d'un isomorphisme $\omega^{[\ell m]}_{\mathcal{Y}} \xrightarrow{\sim} g_i^* \omega^{[\ell m]}_{\mathcal{X}_i}(\sum_E \ell m \cdot a_E(\mathcal{X}_i)E)$, où la somme porte sur les diviseurs g_i-exceptionnels E de $\mathcal{Y}_t$, et où les $a_E(\mathcal{X}_i)$ sont les discrépances de $\mathcal{X}_i$. On en déduit un isomorphisme $\omega^{[\ell m]}_{\mathcal{Y}}(\ell m \mathcal{Y}_t) \xrightarrow{\sim} (g_i^* \omega^{[\ell m]}_{\mathcal{X}_i}(\ell m (\mathcal{X}_i)_t))(\sum_E \ell m \cdot a_E(\mathcal{X}_i)E)$. En le comparant à l'isomorphisme (3) définissant les discrépances de $(\mathcal{X}_i, (\mathcal{X}_i)_t)$, on voit que $a_E(\mathcal{X}_i) = a_E(\mathcal{X}_i, (\mathcal{X}_i)_t) + b_E$ où b_E est la multiplicité de E dans $\mathcal{Y}_t$. On a donc $a_E(\mathcal{X}_i) \geqslant -1 + 1 = 0$ car $(\mathcal{X}_i, (\mathcal{X}_i)_t)$ est slc. On en déduit les égalités

$$H^0(\mathcal{X}_i, \omega^{[\ell m]}_{\mathcal{X}_i}) = H^0(\mathcal{Y}, g_i^* \omega^{[\ell m]}_{\mathcal{X}_i}(\sum_E \ell m \cdot a_E(\mathcal{X}_i)E)) = H^0(\mathcal{Y}, \omega^{[\ell m]}_{\mathcal{Y}}), \tag{9}$$

où seule la première égalité est à justifier. Que le membre de gauche soit inclus dans celui de droite est une conséquence de la positivité des $a_E(\mathcal{X}_i)$. Pour voir l'autre inclusion, notons $U_i \subset \mathcal{X}_i$ l'ouvert au-dessus duquel g_i est un isomorphisme. Si $\sigma \in H^0(\mathcal{Y}, g_i^* \omega^{[\ell m]}_{\mathcal{X}_i}(\sum_E \ell m \cdot a_E(\mathcal{X}_i)E))$, la restriction $\sigma|_{U_i} \in H^0(U_i, \omega^{[\ell m]}_{U_i})$ se relève à $H^0(\mathcal{X}_i, \omega^{[\ell m]}_{\mathcal{X}_i})$ par propriété S_2 de $\mathcal{X}_i$, car $\mathcal{X}_i \setminus U_i$ a codimension $\geqslant 2$ dans $\mathcal{X}_i$.

On conclut en définissant ϕ par la chaîne d'isomorphismes naturels suivante, où nous utilisons l'amplitude de $\omega^{[m]}_{\mathcal{X}_1}$ et $\omega^{[m]}_{\mathcal{X}_2}$:

$$\mathcal{X}_1 \simeq \mathrm{Proj}_T \bigoplus_{l \geqslant 0} H^0(\mathcal{X}_1, \omega^{[\ell m]}_{\mathcal{X}_1}) \simeq \mathrm{Proj}_T \bigoplus_{l \geqslant 0} H^0(\mathcal{Y}, \omega^{[\ell m]}_{\mathcal{Y}}) \simeq \mathrm{Proj}_T \bigoplus_{l \geqslant 0} H^0(\mathcal{X}_2, \omega^{[\ell m]}_{\mathcal{X}_2}) \simeq \mathcal{X}_2 \,.$$

La preuve ci-dessus fait clairement apparaître le rôle de la condition (v) sur les discrépances dans la définition 2.1 : c'est elle qui permet d'identifier les algèbres m-canoniques de $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$, donc $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$.

3.2. Fibre générique normale

Passons à l'assertion d'existence dans le théorème 3.1. On suppose dans ce paragraphe que la variété stable X sur K est normale, donc lc. Ce cas particulier crucial est dû à Hacon et Xu [HX13, Corollary 1.5]. Il repose sur le programme des modèles minimaux par le biais de [HX13, Theorem 1.1] que nous discuterons plus au §3.4.

3.2.1. *Construction du modèle stable.* — Soit $\overline{f} : \overline{\mathcal{X}} \to T$ un morphisme projectif et plat tel que $\overline{\mathcal{X}}_\eta \simeq X$. Par le théorème de réduction semi-stable de Kempf, Knudsen, Mumford et Saint-Donat [KKMS73, p. 198] (voir le théorème 1.1) sous la forme plus précise énoncée dans [KM98, Theorem 7.17], on peut supposer, quitte à remplacer R par une extension finie et $\overline{\mathcal{X}}$ par le changement de base normalisé, qu'il existe une modification $\mu : \mathcal{Y} \to \overline{\mathcal{X}}$ telle que $\mathcal{Y}$ soit régulier et $\mathcal{Y}_t$ soit réduit, et telle que si l'on

12. Pour construire $\mathcal{Y}$, on note $Z \subset \mathcal{X}$ l'union des composantes irréductibles du lieu non normal de $\mathcal{Y}$ qui dominent T, on remarque que les faisceaux $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_\eta}$ sur $\mathcal{X}_\eta$ et $\widetilde{\mathcal{O}_{\mathcal{X} \setminus Z}}$ sur $\mathcal{X} \setminus Z$ se recollent en un faisceau d'algèbres cohérent $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{X} \setminus Z_t$ et on définit $\mathcal{Y} := \mathrm{Spec}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}(j_* \mathcal{A})$, où $j : \mathcal{X} \setminus Z_t \hookrightarrow \mathcal{X}$ est l'inclusion et où $j_* \mathcal{A}$ est un faisceau d'algèbres cohérent S_2 par [Gr65, Propositions 5.11.1 et 5.10.10].

note $\Delta \subset \mathcal{Y}$ l'adhérence du lieu exceptionnel de μ_η, le diviseur $\Delta + \mathcal{Y}_t$ est à croisements normaux stricts dans $\mathcal{Y}$. Cette application du théorème de réduction semi-stable est le seul moment où, dans la preuve du théorème 3.1, on doit modifier l'anneau de valuation discrète de base.

Soit $m > 0$ un entier tel que $\omega_X^{[m]}$ soit inversible. Comme X est à singularités lc, on a $a_{\Delta_i}(X) \geqslant -1$ pour toute composante irréductible Δ_i de Δ. On déduit, par un argument analogue à celui qui a démontré (9), que $H^0(X, \omega_X^{[\ell m]}) = H^0(\mathcal{Y}_\eta, \omega_{\mathcal{Y}_\eta}^{[\ell m]}(\ell m \Delta_\eta))$ pour tout $\ell \geqslant 0$. Comme $\omega_X^{[m]}$ est ample, l'algèbre m-canonique

$$A_K := \bigoplus_{\ell \geqslant 0} H^0(\mathcal{Y}_\eta, \omega_{\mathcal{Y}_\eta}^{[\ell m]}(\ell m \Delta_\eta))$$

est de type fini sur K et $\mathrm{Proj}(A_K) \simeq X$. Par [HX13, Theorem 1.1] (voir le théorème 3.5) appliqué au morphisme $\overline{f} \circ \mu : \mathcal{Y} \to T$, l'algèbre m-canonique

$$A := \bigoplus_{\ell \geqslant 0} H^0(\mathcal{Y}, \omega_{\mathcal{Y}}^{[\ell m]}(\ell m \Delta + \ell m\, \mathcal{Y}_t))$$

de $(\mathcal{Y}, \Delta + \mathcal{Y}_t)$ est de type fini sur R. On peut donc former le modèle canonique relatif $f : \mathcal{X} := \mathrm{Proj}_T\, A \to T$ de $(\mathcal{Y}, \Delta + \mathcal{Y}_t)$ au-dessus de T. Notons $\phi : \mathcal{Y} \dashrightarrow \mathcal{X}$ l'application rationnelle naturelle. On affirme que $f : \mathcal{X} \to T$ est la famille stable recherchée.

Comme $\mathcal{X}_\eta \simeq X$, il reste à démontrer que f est stable. C'est le but des §§ 3.2.2–3.2.4.

3.2.2. *Étude de l'espace total.* — On commence par étudier l'espace total $\mathcal{X}$ du morphisme $f : \mathcal{X} \to T$. Pour ce faire, on s'appuie sur des propriétés élémentaires des modèles canoniques relatifs, rassemblées dans [Ko13a, Theorem 1.26].

On montre ainsi que $\mathcal{X}$ est normal, que l'application birationnelle $\phi : \mathcal{Y} \dashrightarrow \mathcal{X}$ est une contraction rationnelle [13] et que, quitte à remplacer m par un multiple, le faisceau $\omega_{\mathcal{X}}^{[m]}(m\phi_*(\Delta + \mathcal{Y}_t))$ est inversible et f-ample. Comme $X \simeq \mathcal{X}_\eta$ et comme Δ_η est contracté par μ_η, on a $\phi_*\Delta = 0$. La multiplication par une uniformisante de R induit un isomorphisme $\mathcal{O}_{\mathcal{X}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}_t) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\phi_*\,\mathcal{Y}_t)$; on voit donc que $\omega_{\mathcal{X}}^{[m]}$ est inversible et f-ample. Enfin, une dernière assertion de [Ko13a, Theorem 1.26] est que comme la paire $(\mathcal{Y}, \Delta + \mathcal{Y}_t)$ est à singularités lc, il en va de même pour $(\mathcal{X}, \phi_*(\Delta + \mathcal{Y}_t)) = (\mathcal{X}, \mathcal{X}_t)$.

3.2.3. *Étude de la fibre spéciale.* — Il est temps de démontrer que la fibre spéciale $\mathcal{X}_t$ de f est stable. Il ne reste plus qu'à voir que ses singularités sont slc.

Comme la fibre spéciale $\mathcal{Y}_t$ de $\mathcal{Y}$ est réduite et que ϕ est une contraction birationnelle, on voit que $\mathcal{X}_t$ est génériquement réduite. De plus, $\mathcal{X}_t$ est S_1 comme diviseur de Cartier dans $\mathcal{X}$ qui est normal donc S_2. Ces deux faits combinés montrent exactement que $\mathcal{X}_t$ est réduite. Nous avons vérifié la condition (i) de la définition 2.1.

La condition (ii) selon laquelle $\mathcal{X}_t$ est au plus nodale en codimension 1 résulte du fait que $(\mathcal{X}, \mathcal{X}_t)$ est à singularités lc et d'une étude fine des paires à singularités lc en un point de codimension 2 se situant sur une composante affectée d'un coefficient 1 du

13. Cela signifie que son inverse ne contracte pas de diviseurs.

bord [Ko13a, Corollary 2.32]. Qu'une telle étude soit possible est à rapprocher du fait que l'on sache classifier les singularités lc des surfaces [KM98, §4.1].

Comme $(\mathcal{X}, \mathcal{X}_t)$ est à singularités lc, il en va a fortiori de même pour $\mathcal{X}$. Soit E un diviseur au-dessus de $\mathcal{X}$ dont l'image dans $\mathcal{X}$ se situe sur la fibre spéciale $\mathcal{X}_t$. L'inégalité $a_E(\mathcal{X}) \geqslant a_E(\mathcal{X}, \mathcal{X}_t)+1 \geqslant 0$ montre que $\mathcal{X}_t$ ne contient aucun centre log canonique de $\mathcal{X}$. Il suit du théorème 2.10 que $\mathrm{prof}(\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}) \geqslant \min(3, \dim(\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}))$ pour tout $x \in \mathcal{X}_t$. Comme $\mathcal{X}_t$ est un diviseur de Cartier dans $\mathcal{X}$, on déduit que $\mathrm{prof}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}_t,x}) \geqslant \min(2, \dim(\mathcal{O}_{\mathcal{X}_t,x}))$ pour tout $x \in \mathcal{X}_t$, ce qui est la condition (iii).

Le faisceau $\omega_{\mathcal{X}}^{[m]}|_{\mathcal{X}_t}$ est inversible car $\omega_{\mathcal{X}}^{[m]}$ l'est. Il coïncide donc avec $\omega_{\mathcal{X}_t}^{[m]}$ car ces deux faisceaux sont S_2 et isomorphes en codimension 1. Ceci démontre que $\omega_{\mathcal{X}_t}^{[m]}$ est inversible, donc que la condition (iv) est satisfaite.

Enfin, la paire $(\mathcal{X}, \mathcal{X}_t)$ étant à singularités lc, il en va de même pour $(\widetilde{\mathcal{X}_t}, \mathrm{Diff}_{\widetilde{\mathcal{X}_t}}(0))$ par adjonction (théorème 2.7). Nous avons vu dans la preuve du lemme 3.2 que $\mathrm{Diff}_{\widetilde{\mathcal{X}_t}}(0)$ est le conducteur de $\mathcal{X}_t$. On déduit donc de (5) que $\mathcal{X}_t$ est slc.

3.2.4. *Stabilité de la famille.* — Il reste enfin à démontrer que la famille $f : \mathcal{X} \to T$ est stable au sens de la définition 2.4. Le morphisme f est plat puisque $\mathcal{X}$ est réduit et que toutes ses composantes irréductibles dominent T. Nous avons déjà montré que ses fibres sont à singularités slc.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Le faisceau $\omega_{\mathcal{X}/T}^{[n]}$ est plat car il est S_1 par construction et car les composantes irréductibles de son support dominent T. Nous avons déjà vu au §3.2.3 que $\mathcal{X}_t$ ne contient aucun centre log canonique de $\mathcal{X}$. Le théorème 2.10 montre donc que $\mathrm{prof}(\omega_{\mathcal{X}/T,x}^{[n]}) \geqslant \min(3, \dim(\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}))$ pour tout $x \in \mathcal{X}_t$. Comme $\mathcal{X}_t$ est un diviseur de Cartier dans $\mathcal{X}$, on déduit que $\omega_{\mathcal{X}/T}^{[n]}|_{\mathcal{X}_t}$ est S_2. Les deux faisceaux $\omega_{\mathcal{X}/T}^{[n]}|_{\mathcal{X}_t}$ et $\omega_{\mathcal{X}_t}^{[n]}$ sont S_2 et isomorphes en codimension 1 ; ils coïncident donc. Cela entraîne la stabilité de la famille f et achève la preuve du théorème 3.1 quand X est normale.

3.3. Fibre générique non normale

Expliquons maintenant l'énoncé d'existence du théorème 3.1 dans le cas général.

3.3.1. *Normalisation.* — La preuve, due à Kollár [Ko18b], procède par réduction au cas normal. On applique le théorème de réduction stable à la normalisation de X qui est justiciable des arguments du §3.2, et on construit $f : \mathcal{X} \to T$ en *recollant* le modèle stable obtenu le long de lui-même pour faire apparaître les singularités non normales requises. L'étape de recollement est surprenamment délicate à mettre en œuvre et constitue le cœur du livre [Ko13a]. Expliquons son principe.

Soit X une variété à singularités slc. Notons $\pi : \widetilde{X} \to X$ sa normalisation et Γ son conducteur. On sait par (5) que la paire $(\widetilde{X}, \Gamma)$ est lc. Le morphisme $\pi|_{\Gamma} : \Gamma \to \pi(\Gamma)$ est de degré deux au-dessus de l'ouvert dense de $\pi(\Gamma)$ le long duquel X est à croisements normaux doubles. On en déduit une involution rationnelle $\tau : \Gamma \dashrightarrow \Gamma$, qui s'étend en une involution régulière $\tau : \widetilde{\Gamma} \to \widetilde{\Gamma}$ génériquement sans point fixe de la normalisation $\nu : \widetilde{\Gamma} \to \Gamma$ de Γ. Géométriquement, τ échange les deux branches des singularités à croisements normaux doubles de X. En comparant l'équation (8) définissant la différente et son pull-back par τ, on voit que le $\mathbb{Q}$-diviseur $\mathrm{Diff}_{\widetilde{\Gamma}}(0)$ de $\widetilde{\Gamma}$ est τ-invariant.

Donnons deux exemples de ces constructions. Si $X = \{x^2 = yz^2\} \subset \mathbb{A}^3_k$ est le parapluie de Whitney, on a $\widetilde{X} = \mathbb{A}^2_k$, la normalisation $\pi : \widetilde{X} \to X$ est donnée par $(u, v) \mapsto (uv, v^2, u)$, on a $\Gamma = \widetilde{\Gamma} = \{v = 0\} \subset \mathbb{A}^2_k$ et $\tau : u \mapsto -u$, et on calcule $\mathrm{Diff}_{\widetilde{\Gamma}}(0) = \{u = v = 0\}$.

Si $X = \{xyz = 0\} \subset \mathbb{A}^3_k$ est le point à croisements normaux triples, la normalisation $\widetilde{X}$ est une union disjointe de trois espaces affines de dimension 2, le conducteur Γ est l'union de leurs axes de coordonnées, de sorte que $\widetilde{\Gamma}$ est une union de six droites, et on calcule que $\mathrm{Diff}_{\widetilde{\Gamma}}(0) \subset \widetilde{\Gamma}$ est la réunion de leurs origines. L'involution $\tau : \widetilde{\Gamma} \to \widetilde{\Gamma}$ échange ces droites deux par deux. Dans cet exemple, l'involution rationnelle $\tau : \Gamma \dashrightarrow \Gamma$ n'est pas régulière en les trois points singuliers de Γ.

Kollár a remarqué que, sous des hypothèses appropriées, on peut construire la variété X à partir des données $(\widetilde{X}, \Gamma, \tau)$. Un exemple prototypique (qui n'est pas l'énoncé précis dont on aura besoin pour la preuve du théorème 3.1) est [Ko13a, Theorem 5.13].

THÉORÈME 3.3. — *Les constructions ci-dessus induisent une bijection*

$$\left\{\begin{array}{c}\textit{Classes d'isomorphisme}\\ \textit{de variétés stables } X\end{array}\right\} \xrightarrow{\sim} \left\{\begin{array}{c}\textit{Classes d'isomorphisme de paires lc stables}\\ (\widetilde{X}, \Gamma) \textit{ munies d'une involution génériquement}\\ \textit{sans point fixe } \tau \textit{ de } (\widetilde{\Gamma}, \mathrm{Diff}_{\widetilde{\Gamma}}(0))\end{array}\right\}.$$

3.3.2. *Étapes du recollement.* — Il est facile de voir que l'application du théorème 3.3 est injective [Ko13a, Proposition 5.3]. C'est sa surjectivité qui est difficile. Le triplet $(\widetilde{X}, \Gamma, \tau)$ étant donné, il s'agit de construire X en recollant $\widetilde{X}$ sur elle-même le long de Γ de la manière indiquée par τ. Plutôt que d'expliquer la démonstration, dont la structure inductive est complexe, décrivons les difficultés qu'il faut surmonter, qui correspondent aussi aux étapes de la preuve du théorème 3.3.

(i) On souhaite construire X comme quotient de $\widetilde{X}$ par la relation d'équivalence qui identifie $\nu(x)$ et $\nu(\tau(x))$ pour tout point géométrique $x \in \widetilde{\Gamma}$. Comme le morphisme $\pi : \widetilde{X} \to X$ à construire est fini, il faut que la relation d'équivalence engendrée par ces relations ait des classes d'équivalence finies. Ce n'est pas du tout une évidence !

Par exemple, prenons $\widetilde{X} = \mathbb{A}^3_k$ et $\Gamma = \{xy = 0\}$ de sorte que $\widetilde{\Gamma}$ est l'union de deux plans affines de coordonnées respectives (y_1, z_1) et (x_2, z_2) et que $\mathrm{Diff}_{\widetilde{\Gamma}}(0)$ est l'union des deux droites d'équations $\{y_1 = 0\}$ et $\{x_2 = 0\}$. Définissons une involution τ échangeant ces deux plans par l'équation $\tau(y_1, z_1) = (x_2, z_2 + 1)$. Pour ces choix de $(\widetilde{X}, \Gamma, \tau)$, on voit que les points $(0, 0, n) \in \widetilde{X}$ pour $n \in \mathbb{Z}$ sont tous équivalents.

Dans le cadre du théorème 3.3, ce sont les hypothèses globales de projectivité de $\widetilde{X}$ et d'amplitude de $\omega_{\widetilde{X}}(\Gamma)$ qui assureront la finitude de ces classes d'équivalences [Ko13a, Corollary 5.37]. La preuve de ce fait repose en dernier lieu sur des résultats de finitude pour des groupes d'automorphismes birationnels de paires dont le fibré canonique a des propriétés de positivité [Ko13a, Corollary 10.69].

(ii) Supposons le problème décrit en (i) résolu. On dispose alors d'une relation d'équivalence finie sur $\widetilde{X}$ dont on souhaite construire le quotient comme variété algébrique. Ce serait la variété X recherchée. Il n'est malheureusement pas du tout évident que ce soit possible.

Donnons un exemple en suivant [Ko13a, Example 9.7]. Soient $\widetilde{X}$ l'union de deux espaces affines de dimension 3, de coordonnées respectives (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2), et $\Gamma \subset \widetilde{X}$ défini par les équations $\{y_i^3 = z_i^2\}$ pour $i \in \{1, 2\}$. La normalisation $\widetilde{\Gamma}$ de Γ est une union de deux plans affines, de coordonnées respectives (u_1, v_1) et (u_2, v_2), et le morphisme $\nu : \widetilde{\Gamma} \to \Gamma$ est donné par $(u_i, v_i) \mapsto (u_i, v_i^2, v_i^3)$. Choisissons pour τ l'involution échangeant ces deux plans, définie par la formule $\tau(u_1, v_1) = (u_1 + v_1, v_1)$.

On vérifie aisément que la relation d'équivalence engendrée par $\nu(x) \sim \nu(\tau(x))$ est finie, de sorte que le problème soulevé en (i) n'apparaît pas. De plus, cette relation d'équivalence admet bien un quotient catégorique dans la catégorie des k-schémas : le spectre de la sous-k-algèbre de $k[x_1, y_1, z_1] \times k[x_2, y_2, z_2]$ engendrée par les idéaux $\langle y_1, z_1\rangle$ et $\langle y_2, z_2\rangle$. Cette algèbre n'est pas de type fini sur k (ni même noethérienne). Le quotient de $\widetilde{X}$ par la relation d'équivalence considérée n'est donc pas une variété.

Le problème avec cet exemple est que la paire $(\widetilde{X}, \Gamma)$ n'est pas lc. C'est seulement sous l'hypothèse que les singularités de $(\widetilde{X}, \Gamma)$ sont lc que Kollár montre l'existence du quotient X recherché [Ko13a, Theorem 5.32]. Cette hypothèse est utilisée de la manière suivante. La variété X est obtenue par un procédé inductif qui consiste, en simplifiant, à d'abord construire les quotients des centres log canoniques de $(\widetilde{X}, \Gamma)$, en commençant par ceux qui ont dimension minimale. Pour ce faire, on utilise de manière essentielle des propriétés de seminormalité des centres log canoniques [Ko13a, §4.20], qui permettent en un sens de les manipuler topologiquement. Dans l'exemple ci-dessus, c'est le défaut de seminormalité de Γ qui pose véritablement problème.

(iii) Maintenant que la variété X est construite, il faut vérifier qu'elle a les propriétés requises. Si la plupart sont faciles à vérifier, l'existence d'un entier $m > 0$ tel que $\omega_X^{[m]}$ soit inversible est hautement non triviale. À nouveau, illustrons-le sur un exemple.

Soient $\widetilde{X}$ l'union disjointe de trois plans affines de coordonnées (x_1, y_1), (x_2, y_2) et (x_3, y_3), et $\Gamma \subset \widetilde{X}$ le diviseur défini par les équations $\{y_1 = 0\}$, $\{x_2 y_2 = 0\}$ et $\{x_3 = 0\}$. La normalisation $\widetilde{\Gamma}$ de Γ est une union disjointe de quatre droites affines de coordonnées respectives x_1, x_2, y_2 et y_3. Choisissons pour τ l'involution de $\widetilde{\Gamma}$ échangeant les deux premières droites par la formule $\tau(x_1) = x_2$, et les deux dernières par $\tau(y_2) = y_3$. Aucun des problèmes décrits en (i) et (ii) ne se pose et l'on peut donc considérer la variété X quotient de $\widetilde{X}$ par la relation d'équivalence engendrée par $\nu(x) \sim \nu(\tau(x))$. Avec les notations de (6), on a $X = C(Y, L)$, où Y est une chaîne de trois droites projectives et où le fibré en droites ample L sur Y a degré 1 sur chacune de ces trois composantes. On vérifie alors en adaptant [Ko13a, Proposition 3.14 (4)] que $\omega_X^{[m]}$ n'est inversible pour aucun $m > 0$.

Pour expliquer cela, remarquons que la différente $\mathrm{Diff}_{\widetilde{\Gamma}}(0) \subset \widetilde{\Gamma}$ est l'union des origines de la deuxième et de la troisième composante de $\widetilde{\Gamma}$. On voit donc que τ ne préserve pas

$\mathrm{Diff}_{\widetilde{\Gamma}}(0)$. Dans la preuve du théorème 3.3, c'est l'hypothèse que $\mathrm{Diff}_{\widetilde{\Gamma}}(0)$ soit τ-invariant qui assure l'existence d'un $m > 0$ tel que $\omega_X^{[m]}$ est inversible [Ko13a, Theorem 5.38]. Cette hypothèse est utilisée comme suit. Soit $m > 0$ tel que $\omega_{\widetilde{X}}^{[m]}(m\Gamma)$ est inversible. On souhaite descendre $\omega_{\widetilde{X}}^{[m]}(m\Gamma)$ (ou une de ses puissances) en un faisceau inversible sur X, isomorphe à $\omega_X^{[m]}$ (ou à une de ses puissances). Pour ce faire, on raisonne géométriquement en considérant l'espace total $\widetilde{p} : \widetilde{L} \to \widetilde{X}$ du fibré en droites associé à $\omega_{\widetilde{X}}^{[m]}(m\Gamma)$ sur $\widetilde{X}$. Notons $\Delta := \widetilde{p}^{-1}(\Gamma)$. Le fait que la différente $\mathrm{Diff}_{\widetilde{\Gamma}}(0)$ soit τ-invariante implique que τ se relève naturellement en une involution σ de la normalisation $\widetilde{\Delta}$ de Δ. On peut alors appliquer les étapes (i) et (ii) de la technique de recollement au triplet $(\widetilde{L}, \Delta, \sigma)$. On construit de la sorte une variété $p : L \to X$ qu'on vérifie être (quitte à remplacer m par un multiple) le fibré en droites associé à $\omega_X^{[m]}$. Cela implique en particulier que $\omega_X^{[m]}$ est inversible, ce qu'on désirait montrer.

3.3.3. *Réduction stable.* — Expliquons maintenant, en suivant [Ko18b], comment la méthode de recollement est utilisée pour démontrer l'assertion d'existence dans le théorème 3.1.

Soit X une variété stable sur K. Notons $\widetilde{X}$ sa normalisation, Γ son conducteur et $\tau : \widetilde{\Gamma} \to \widetilde{\Gamma}$ l'involution naturelle, qui préserve $\mathrm{Diff}_{\widetilde{\Gamma}}(0)$. Le théorème de réduction stable pour les variétés normales (voir §3.2), convenablement étendu au cas des paires, montre que $(\widetilde{X}, \Gamma)$ admet un modèle stable $\widetilde{f} : (\widetilde{\mathcal{X}}, \mathit{\Gamma}) \to T$ sur T. Le lemme 3.2, adapté au cas des paires, montre que la paire $(\widetilde{\mathcal{X}}, \mathit{\Gamma} + \widetilde{\mathcal{X}}_t)$ est lc, et on déduit donc de l'adjonction (théorème 2.7) que $(\widetilde{\mathit{\Gamma}}, \mathrm{Diff}_{\widetilde{\mathit{\Gamma}}}(\widetilde{\mathcal{X}}_t)) = (\widetilde{\mathit{\Gamma}}, \mathrm{Diff}_{\widetilde{\mathit{\Gamma}}}(0) + \widetilde{\mathit{\Gamma}}_t)$ est lc. De plus, pour $m > 0$ bien choisi, $\omega_{\widetilde{\mathit{\Gamma}}}^{[m]}(m\,\mathrm{Diff}_{\widetilde{\mathit{\Gamma}}}(0)) = \omega_{\widetilde{\mathcal{X}}}^{[m]}(m\mathit{\Gamma})|_{\widetilde{\mathit{\Gamma}}}$ est un faisceau inversible ample relativement à T. Argumentant comme aux §§3.2.3–3.2.4, on voit que $(\widetilde{\mathit{\Gamma}}, \mathrm{Diff}_{\widetilde{\mathit{\Gamma}}}(0)) \to T$ est une famille stable. Par l'énoncé d'unicité dans le théorème de réduction stable (voir §3.1), convenablement étendu au cas des paires, l'involution τ sur la fibre générique s'étend en une involution encore notée $\tau : (\widetilde{\mathit{\Gamma}}, \mathrm{Diff}_{\widetilde{\mathit{\Gamma}}}(0)) \to (\widetilde{\mathit{\Gamma}}, \mathrm{Diff}_{\widetilde{\mathit{\Gamma}}}(0))$. On applique alors la technique de recollement décrite au §3.3.2 [14] au triplet $(\widetilde{\mathcal{X}}, \mathit{\Gamma}, \tau)$, ce qui donne lieu à un morphisme $f : \mathcal{X} \to T$, dont on vérifie qu'elle est la famille stable recherchée.

La preuve que nous venons de décrire ne permet pas de se limiter aux variétés stables qui sont Cohen-Macaulay. En effet, la normalisation $\widetilde{X}$ d'une variété stable Cohen-Macaulay X peut ne pas être elle-même Cohen-Macaulay [Ko13b, Example 23].

3.4. Finitude de l'algèbre canonique

Revenons sur le théorème de Hacon et Xu que nous avons utilisé au §3.2, et qui est un ingrédient décisif de la preuve du théorème 1.6.

14. L'étape (i) du procédé de recollement est plus facile à mettre en œuvre ici que dans le cadre du théorème 3.3. En effet, on peut exploiter l'existence du recollement X de $(\widetilde{X}, \Gamma, \tau) = (\widetilde{\mathcal{X}}_\eta, \mathit{\Gamma}_\eta, \tau_\eta)$, et le fait (déjà expliqué au §3.2.3) qu'aucun centre log canonique de $(\widetilde{\mathcal{X}}, \mathit{\Gamma})$ n'est inclus dans la fibre spéciale $\widetilde{\mathcal{X}}_t$, et appliquer [Ko13a, Lemma 9.55]. Les étapes (ii) et (iii) sont en revanche inchangées.

Soit (X, Δ) une paire à singularités slc. Définissons l'**algèbre canonique** de (X, Δ) comme étant $A(X, \Delta) := \bigoplus_{\ell \geqslant 0} H^0(X, \omega_X^{[\ell]}(\lfloor \ell\Delta \rfloor))$, où $\lfloor \ell\Delta \rfloor$ est le diviseur de Weil sur X obtenu en arrondissant les coefficients de $\ell\Delta$ à l'entier inférieur. On conjecture (voir par exemple [FG17, Conjecture A]) la propriété suivante.

Conjecture 3.4. — *L'algèbre canonique d'une paire projective lc est de type fini.*

Les premiers résultats concernant la conjecture 3.4 en dimension arbitraire ont été obtenus par Birkar, Cascini, Hacon et M^c^Kernan [BCHM10]. Ils la résolvent en particulier pour les paires de type général (15) à singularités klt. Ce travail remarquable a déjà fait l'objet d'un exposé dans ce séminaire [Dr09] et est à la base des développements ultérieurs.

De manière surprenante, la conjecture 3.4 tombe en défaut pour les variétés slc : Kollár a donné un exemple de surface projective slc qui est de type général mais dont l'algèbre canonique n'est pas de type fini [Ko11a, Proposition 1]. Les singularités slc se comportent donc moins bien vis-à-vis du programme des modèles minimaux que leurs homologues normales que sont les singularités klt, lc... C'est pour cette raison que nous avons dû traiter séparément, dans la preuve du théorème de réduction stable, les variétés normales au §3.2 et les variétés non normales au §3.3.

Le théorème de Hacon et Xu constitue un progrès sur ces questions dans le cas lc, dans un contexte adapté à la preuve du théorème 3.1 : ils travaillent dans une situation relative, et supposent connue l'existence du modèle canonique de la fibre générique. Énonçons le cas particulier (16) de [HX13, Theorem 1.1] qui nous a été utile.

Théorème 3.5. — *Soit $f : \mathcal{X} \to T$ un morphisme projectif, avec $\mathcal{X}$ régulier et $\Delta \subset \mathcal{X}$ un diviseur à croisements normaux stricts. Supposons que $(\mathcal{X}_\eta, \Delta_\eta)$ est de type général. Si $A(\mathcal{X}_\eta, \Delta_\eta)$ est de type fini sur K, alors $A(\mathcal{X}, \Delta)$ est de type fini sur R.*

La preuve utilise de manière cruciale les techniques de [BCHM10]. Nous nous contentons d'en décrire la structure.

Après avoir peut-être remplacé $(\mathcal{X}, \Delta)$ par un modèle birationnel (un modèle minimal, construit en adaptant les techniques de [BCHM10]), on souhaite démontrer qu'il existe un entier $m > 0$ tel que $\omega_{\mathcal{X}}^{[m]}(m\Delta)$ est inversible et sans point base : ceci entraîne en effet la finitude de l'algèbre canonique. Il est bien sûr nécessaire de savoir démontrer que la restriction $\omega_{\mathcal{X}}^{[m]}(m\Delta)|_\Delta$ est elle-même sans point base, et un théorème d'extension dû à Fujino [Fu12, Theorem 1.1] montre que cela serait en fait suffisant.

On voudrait obtenir cette information dans le cadre d'une récurrence sur la dimension. Malheureusement, Δ n'est en général pas normal : il a seulement des singularités slc et on ne peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence. L'idée de Hacon et Xu est de

15. La paire (X, Δ) est **de type général** s'il existe un entier $m > 0$ tel que $\omega_X^{[m]}(m\Delta)$ soit inversible et induise une application rationnelle $X \dashrightarrow \mathbb{P}_k^N$ qui est birationnelle sur son image.

16. La finitude des algèbres canoniques dans l'énoncé du théorème 3.5 est équivalente à l'existence des bons modèles minimaux dans l'énoncé de [HX13, Theorem 1.1], par [HMX18a, Lemma 2.9.1].

plutôt appliquer l'hypothèse de récurrence à la normalisation de Δ, puis de redescendre l'information obtenue à Δ à l'aide de la technique de recollement de Kollár que nous avons décrite aux §§3.3.1–3.3.2.

4. CONSTRUCTION DE L'ESPACE DE MODULES

Cette section est consacrée à la preuve du théorème 2.6. Si la stratégie est connue depuis longtemps [KSB88, Ko90, Vi95], beaucoup de détails cruciaux n'ont été mis au point que très récemment [Ko08, Ko13a, HX13, HMX18a, Fu18]. Le lecteur pourra consulter avec profit les textes de survol [Kov09, Ko13b], ainsi que le livre [Ko18b] pour une présentation détaillée.

La démonstration exploite à nouveau les plongements pluricanoniques des variétés stables. Ils permettent de paramétrer les variétés stables de fonction de Hilbert fixée par une union de sous-schémas localement fermés d'un schéma de Hilbert (§§4.1–4.2) qu'on quotiente ensuite par le groupe des transformations projectives pour construire l'espace de modules recherché (§§4.3–4.4).

4.1. Caractère borné

Fixons une fonction de Hilbert $F : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. La première étape de la construction de $\overline{M}_F$ est la recherche d'une famille de variétés projectives, dans laquelle toutes les variétés stables de fonction de Hilbert F apparaissent et qui soit *bornée* au sens où la base de la famille est elle-même une variété, donc de type fini sur le corps de base k. Pour cela, il suffit de démontrer l'énoncé suivant.

THÉORÈME 4.1. — *Il existe un entier m tel que pour toute variété stable X de fonction de Hilbert F, le faisceau $\omega_X^{[m]}$ est inversible, très ample et sans cohomologie supérieure.*

En effet, la famille universelle $g : \mathcal{Y} \to H$ au-dessus du schéma de Hilbert H paramétrant les sous-schémas fermés de $\mathbb{P}_k^{F(m)-1}$ de fonction de Hilbert $n \mapsto F(nm)$ a alors les propriétés requises.

En restriction aux variétés lisses, le théorème 4.1 est un cas particulier du grand théorème de Matsusaka [Ma72]. Le cas des courbes est facile (on peut prendre $m = 3$) et c'est Alexeev qui a résolu le cas des surfaces [Al94]. En général, le théorème 4.1 a été démontré par Hacon, M$^{\mathrm{c}}$Kernan et Xu [HMX18a]. On ne donnera ici aucune indication sur sa preuve, qui repose sur le programme des modèles minimaux : on renvoie le lecteur au texte de survol [HMX18b].

4.2. Représentabilité de la stabilité

La seconde étape de la preuve consiste à isoler, dans le schéma de Hilbert H construit au §4.1, le lieu paramétrant des variétés stables m-canoniquement plongées de fonction de Hilbert F.

Théorème 4.2. — *Il existe un morphisme $\iota : H' \to H$ tel que le changement de base $g' : \mathcal{Y}' \to H'$ de f par ι soit une famille de variétés stables m-canoniquement plongées de fonction de Hilbert F, et qui soit universel pour cette propriété.*

On procède par étapes, en effectuant plusieurs changements de base successifs, chacun améliorant les propriétés du morphisme $g : \mathcal{Y} \to H$. Remarquons que g est déjà plat par définition du schéma de Hilbert.

4.2.1. — On commence par remplacer H par l'ouvert $H_1 \subset H$ paramétrant des variétés réduites, S_2 et équidimensionnelles [Gr66, Théorème 12.2.1], et dont les singularités en codimension 1 sont au plus des croisements normaux doubles (pour ce dernier point, on remarque que cette condition est équivalente à avoir des singularités au plus nodales aux points de codimension 1 et on utilise le fait que les déformations des singularités nodales sont au plus nodales ; voir [Ko13a, §1.41.2] pour un énoncé précis).

Notant $g_1 : \mathcal{Y}_1 \to H_1$ le changement de base, on peut alors définir le faisceau canonique relatif $\omega_{\mathcal{Y}_1/H_1}$ et ses puissances réflexives $\omega^{[n]}_{\mathcal{Y}_1/H_1}$ pour $n \in \mathbb{Z}$, comme au §2.2.1.

4.2.2. — La seconde étape consiste à assurer que les faisceaux $\omega^{[n]}_{\mathcal{Y}_1/H_1}$ soient plats de formation commutant à tout changement de base, pour tout $1 \leqslant n \leqslant m$. Cette étape est cruciale si l'on souhaite munir $\overline{M}_F$ d'une structure schématique raisonnable. Elle a été entièrement clarifiée par Kollár [Ko08] ; d'autres approches avaient été proposées par Hassett et Kovács [HK04] (17) et par Abramovich et Hassett [AH11].

Kollár construit, pour $1 \leqslant n \leqslant m$, des décompositions $\mathrm{Hull}(\omega^{[n]}_{\mathcal{Y}_1/H_1}) \to H_1$ de H_1 en sous-schémas localement fermés au-dessus desquels les faisceaux cohérents $\omega^{[n]}_{\mathcal{Y}_{1,s}}$ pour $s \in H_1$ s'organisent en une famille plate, et qui sont universelles pour cette propriété. Il ne reste plus qu'à définir $H_2 := \mathrm{Hull}(\omega^{[1]}_{\mathcal{Y}_1/H_1}) \times_{H_1} \cdots \times_{H_1} \mathrm{Hull}(\omega^{[m]}_{\mathcal{Y}_1/H_1})$ comme étant la décomposition de H_1 en sous-schémas localement fermés qui les raffine toutes, et à considérer le morphisme $g_2 : \mathcal{Y}_2 \to H_2$ obtenu par changement de base.

Un des attraits du point de vue de Kollár est sa généralité : il n'utilise pas de propriétés particulières des variétés stables, ni des faisceaux pluricanoniques. Il considère plutôt un morphisme projectif $p : X \to S$ arbitraire et un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X. Dans cette situation, il construit une décomposition $\mathrm{Hull}(\mathcal{F}) \to S$ de S en sous-schémas localement fermés au-dessus de laquelle les hulls $\mathcal{F}_s^{[**]}$ des $\mathcal{F}_s$ pour $s \in S$ s'organisent en une famille plate, et qui est universelle pour cette propriété [Ko08, Theorem 21]. Si X_s est S_2 et $\mathrm{Supp}(\mathcal{F}_s) = X_s$, le hull $\mathcal{F}_s^{[**]}$ n'est autre que le double dual $\mathcal{F}_s^{**}$ de $\mathcal{F}_s$ (voir [Ko08, Definition 14] ou ci-dessous pour une définition générale des hulls). Ceci s'applique dans la situation que nous avons considérée. Avec les notations ci-dessus, on a donc $(\omega^{[n]}_{\mathcal{Y}_1/H_1,s})^{[**]} = (\omega^{[n]}_{\mathcal{Y}_1/H_1,s})^{**} = \omega^{[n]}_{\mathcal{Y}_{1,s}}$ et la décomposition $\mathrm{Hull}(\omega^{[n]}_{\mathcal{Y}_1/H_1})$ a bien les propriétés voulues.

Pour construire $\mathrm{Hull}(\mathcal{F})$, Kollár en identifie une compactification naturelle : l'espace de modules $\mathrm{QHusk}(\mathcal{F})$ des husks quotients cohérents de $\mathcal{F}$. Un **husk quotient** cohérent

17. L'article [HK04] utilise la condition de Viehweg plutôt que celle de Kollár (voir §2.2.1).

de $\mathcal{F}$ relativement à S est un morphisme de faisceaux cohérents $q : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ sur X où $\mathcal{G}$ est f-plat, tel que pour tout $s \in S$, le faisceau $\mathcal{G}_s$ sur X_s est pur et q est surjectif aux points génériques du support de $\mathcal{G}_s$ [Ko08, Definition 9]. Ce husk quotient est un **hull** si pour tout $s \in S$, le morphisme q_s est un isomorphisme aux points génériques du support de $\mathcal{G}_s$, est surjectif aux points de codimension 1 du support de $\mathcal{G}_s$ et est maximal pour ces propriétés [Ko08, Definition 17]. Par des techniques inspirées de la construction des schémas Quot de Grothendieck, on démontre [Ko08, Theorem 10] que le foncteur qui à un S-schéma T associe l'ensemble des hulls quotients cohérents $q : \mathcal{F}_T \to \mathcal{G}$ de $\mathcal{F}_T$ relativement à T est représentable par une union dénombrable d'espaces algébriques propres sur S, qu'on note $\mathrm{QHusk}(\mathcal{F})$: c'est l'espace de modules $\mathrm{QHusk}(\mathcal{F})$ des husks quotients cohérents de $\mathcal{F}$. On vérifie enfin que le sous-foncteur des hulls est représentable par un ouvert $\mathrm{Hull}(\mathcal{F})$ de $\mathrm{QHusk}(\mathcal{F})$ et que $\mathrm{Hull}(\mathcal{F})$ est une décomposition de S en sous-schémas localement fermés [Ko08, Theorem 21].

4.2.3. — On remplace ensuite H_2 par l'ouvert $H_3 \subset H_2$ au-dessus duquel $\omega^{[m]}_{\mathcal{Y}_2/H_2}$ est un faisceau inversible. Pour construire un tel ouvert, on procède comme suit.

Par le lemme de Nakayama, l'ensemble $\{y \in \mathcal{Y}_2 \,|\, \dim_{\kappa(y)}(\omega^{[m]}_{\mathcal{Y}_2/H_2} \otimes \kappa(y)) > 1\}$ est fermé (voir [Ha77, III Example 12.7.2]). On note $H_3 \subset H_2$ le complémentaire de son image dans H_2 et $g_3 : \mathcal{Y}_3 \to H_3$ le changement de base. Montrons que $\mathcal{F} := \omega^{[m]}_{\mathcal{Y}_3/H_3}$ est inversible. Soit $y \in \mathcal{Y}_3$ et soit $s \in \mathcal{F}_y$ engendrant $\mathcal{F}_y \otimes \kappa(y)$. Par le lemme de Nakayama, le morphisme $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_3,y} \xrightarrow{s} \mathcal{F}_y$ est surjectif ; on note $\mathcal{N}$ son noyau. La suite courte

$$0 \to \mathcal{N} \otimes \kappa(g_3(y)) \to \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_3,y} \otimes \kappa(g_3(y)) \to \mathcal{F}_y \otimes \kappa(g_3(y)) \to 0$$

est exacte car $\mathcal{F}_y$ est $\mathcal{O}_{H_3,g_3(y)}$-plat par §4.2.2. Comme le support ensembliste de $\mathcal{F}$ est $\mathcal{Y}_3$ et que $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_3,y} \otimes \kappa(g_3(y))$ est réduit, on déduit que $\mathcal{N} \otimes \kappa(g_3(y)) = 0$. A fortiori, $\mathcal{N} \otimes \kappa(y) = 0$, donc $\mathcal{N} = 0$ par le lemme de Nakayama. On a bien montré que $\mathcal{F}$ est inversible en y.

On voit maintenant en écrivant $n = am + b$ avec $1 \leqslant b \leqslant m$ que $\omega^{[n]}_{\mathcal{Y}_3/H_3}$ est plat de formation commutant à tout changement de base, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

4.2.4. — On se restreint alors à l'ouvert $H_4 \subset H_3$ le long duquel les fibres de g_3 sont à singularités slc (et on note $g_4 : \mathcal{Y}_4 \to H_4$ le changement de base). L'existence d'un tel ouvert est démontrée dans [AH11, Proposition A.1.1], où la preuve est attribuée à Alexeev. L'argument repose crucialement sur l'inversion de l'adjonction (voir § 2.4.1).

Voir que le lieu $\{x \in H_3 |\, \mathcal{Y}_{3,x}$ a des singularités slc$\}$ est un sous-ensemble constructible de H_3 est aisé. En effet, si η est le point générique d'une composante irréductible de H_3, une log résolution de $\mathcal{Y}_{3,\eta}$ s'étend en une log résolution des fibres de g_3 au-dessus d'un voisinage U de η dans la variété réduite H_3^{red}. En calculant les discrépances des fibres de g_3 au-dessus de U sur ces log résolutions, on montre que l'une est slc si et seulement si les autres le sont. On conclut par récurrence noethérienne.

Il reste à démontrer que ce lieu est stable par générisation. On se ramène à une situation relative sur le spectre T d'un anneau de valuation discrète, de point fermé t et de point générique η. On dispose d'un morphisme propre et plat $f : \mathcal{X} \to T$ dont les fibres satisfont les conditions (i)-(iv) de la définition 2.1, tel que $\mathcal{X}_t$ est slc et $\omega^{[m]}_{\mathcal{X}/T}$ inversible. Le lemme 3.2, dont la preuve reposait sur l'inversion de l'adjonction, assure que $(\mathcal{X}, \mathcal{X}_t)$ est slc, donc que $\mathcal{X}_\eta$ est slc.

4.2.5. — On dispose de deux fibrés en droites naturels sur $\mathcal{Y}_4$: le faisceau m-canonique $\omega^{[m]}_{\mathcal{Y}_4/H_4}$, qui est inversible par le §4.2.3, et le fibré tautologique $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_4/H_4}(1)$ induit par $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^{F(m)-1}}(1)$. On souhaite maintenant se restreindre au sous-schéma localement fermé $H_5 \subset H_4$ au-dessus duquel ces deux fibrés en droites coïncident, Zariski-localement sur H_5. L'existence d'un tel sous-schéma n'est pas évidente, car comme les fibres de g_4 peuvent ne pas être irréductibles, le foncteur de Picard $\mathrm{Pic}_{\mathcal{Y}_4/H_4}$ pourrait ne pas être séparé. Par conséquent, H_5 pourrait ne pas être fermé dans H_4.

Par [Gr63, Corollaire 7.8.7], le faisceau $g_{4,*}\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_4}$ est localement libre de formation commutant au changement de base. Les fibres de g_4 étant réduites par le §4.2.1, le morphisme naturel $H_4' := \mathrm{Spec}_{H_4}(g_{4,*}\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_4}) \to H_4$ est fini étale. En considérant la factorisation de Stein $g_4' : \mathcal{Y}_4 \to H_4'$ de g_4, on se ramène aisément au cas où les fibres de g_4 sont connexes, ce qu'on suppose désormais. Dans ce cas, l'argument qui suit est donné dans [Vi95, Lemma 1.19].

On note $\mathcal{L} := \omega^{[m]}_{\mathcal{Y}_4/H_4} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_4/H_4}(-1)$. Si $0 \to \mathcal{L} \to \mathcal{E}^0 \to \mathcal{E}^1 \to \dots$ est une résolution de $\mathcal{L}$ par des sommes de fibrés en droites assez amples et si l'on pose $\mathcal{F}^i := g_{4,*}\mathcal{E}^i$, la cohomologie du complexe de fibrés vectoriels $0 \to \mathcal{F}^0 \to \mathcal{F}^1 \to \dots$ sur H_4 calcule les $R^i g_{4,*}\mathcal{L}$, et ce après tout changement de base (par cohomologie et changement de base). Soit $\mathcal{Q} := \mathrm{Coker}(\mathcal{F}^0 \to \mathcal{F}^1)$. On commence par se restreindre à l'ouvert où $\mathcal{Q}$ a rang $\leqslant \mathrm{rg}(\mathcal{F}^1) - \mathrm{rg}(\mathcal{F}^0) + 1$, puis au fermé défini par l'annulation des mineurs de taille $\mathrm{rg}(\mathcal{F}^0)$ de $\mathcal{F}^0 \to \mathcal{F}^1$. Le faisceau $\mathcal{Q}$ est maintenant localement libre de rang $\mathrm{rg}(\mathcal{F}^1) - \mathrm{rg}(\mathcal{F}^0) + 1$ par [Ei95, Proposition 20.8]. Il suit que le noyau $\mathcal{K} := \mathrm{Ker}(\mathcal{F}^0 \to \mathcal{F}^1)$ est localement libre de rang 1, de formation commutant à tout changement de base. On déduit que $g_{4,*}\mathcal{L} = \mathcal{K}$ est inversible et de formation commutant à tout changement de base. Il suffit pour conclure de se restreindre à l'ouvert H_5 au-dessus duquel le morphisme d'adjonction $g_4^* g_{4,*}\mathcal{L} \to \mathcal{L}$ est un isomorphisme. On note bien sûr $g_5 : \mathcal{Y}_5 \to H_5$ le changement de base.

4.2.6. — Considérons l'ouvert $H_6 \subset H_5$ au-dessus duquel $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_5/H_5}(1)$ n'a pas de cohomologie supérieure [Ha77, Theorem 12.8]. Notant $g_6 : \mathcal{Y}_6 \to H_6$ le changement de base, le faisceau $g_{6,*}\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_6/H_6}(1)$ est un fibré vectoriel par [Ha77, Theorem 12.11]. On se restreint finalement à l'ouvert $H' \subset H_6$ où le morphisme $H^0(\mathbb{P}_k^{F(m)-1}, \mathcal{O}(1)) \to g_{6,*}\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_6/H_6}(1)$ de fibrés vectoriels sur H_6 est un isomorphisme. Ce dernier point assure que la famille $g' : \mathcal{Y}' \to H'$ obtenue par changement de base est m-canoniquement plongée et achève la preuve du théorème 4.2.

4.3. Le champ de modules

On peut maintenant construire le champ de modules $\overline{\mathcal{M}}_F$. Le groupe $\mathrm{PGL}_{F(m)}$ agit sur $\mathbb{P}_k^{F(m)-1}$ par changement de coordonnées, donc aussi sur son schéma de Hilbert H. Comme le morphisme $\iota : H' \to H$ est défini par une propriété universelle, cette action se relève naturellement en une action sur H'. J'affirme que la catégorie fibrée en groupoïdes $\overline{\mathcal{M}}_F$ définie en (7) s'identifie canoniquement au champ quotient $[H'/\operatorname{PGL}_{F(m)}]$ [18] et est donc un champ algébrique [LMB00, (4.6.1)].

Intuitivement, cette assertion est claire : H' paramètre les variétés stables de fonction de Hilbert F qui sont m-canoniquement plongées dans $\mathbb{P}_k^{F(m)-1}$, et deux telles sous-variétés de $\mathbb{P}_k^{F(m)-1}$ sont isomorphes comme variétés abstraites si et seulement si elles diffèrent par un changement de coordonnées projectives.

Justifions-le plus formellement. On se contente ici de construire un 1-morphisme $\overline{\mathcal{M}}_F \to [H'/\operatorname{PGL}_{F(m)}]$; il est aisé de vérifier que c'est un isomorphisme. Considérons un B-point de $\overline{\mathcal{M}}_F$, qui correspond à une famille stable $f : \mathcal{X} \to B$ dont les fibres ont fonction de Hilbert F comme en (7). Le faisceau $\omega_{\mathcal{X}/B}^{[m]}$ est plat et inversible sur les fibres de f par le théorème 4.1. Il est donc inversible par l'argument du §4.2.3. Par cohomologie et changement de base [Ha77, III Theorem 12.11], qui s'applique par le théorème 4.1 et comme $\omega_{\mathcal{X}/B}^{[m]}$ est f-plat, le faisceau $f_*\omega_{\mathcal{X}/B}^{[m]}$ est localement libre de rang $F(m)$. Le faisceau inversible $\omega_{\mathcal{X}/B}^{[m]}$ est très ample relativement à f, et plonge $\mathcal{X}$ dans le fibré projectif $\mathbb{P}_B(f_*\omega_{\mathcal{X}/B}^{[m]})$ sur B. Soit I le schéma des isomorphismes $\operatorname{Isom}_B(\mathbb{P}_B^{F(m)-1}, \mathbb{P}_B(f_*\omega_{\mathcal{X}/B}^{[m]}))$: c'est un $\operatorname{PGL}_{F(m)}$-torseur sur B. En tirant $f : \mathcal{X} \to B$ sur I et en utilisant l'isomorphisme universel au-dessus de I, on obtient un morphisme $\lambda : I \to H$, qui factorise à travers un morphisme $\mu : I \to H'$ par la propriété universelle de H'. Le couple (I, μ) est le B-point de $[H'/\operatorname{PGL}_{F(m)}]$ que nous cherchions à construire.

Remarquons que l'action de $\operatorname{PGL}_{F(m)}$ se relève naturellement à l'espace total $\mathcal{Y}'$ de la famille $g' : \mathcal{Y}' \to H'$. Notant $\overline{\mathcal{U}}_F := [\mathcal{Y}'/\operatorname{PGL}_{F(m)}]$, on voit que le champ $\overline{\mathcal{M}}_F$ porte une famille stable universelle $u : \overline{\mathcal{U}}_F \to \overline{\mathcal{M}}_F$.

Le champ $\overline{\mathcal{M}}_F$ est propre. En effet, le critère valuatif de propreté [Ol16, Theorem 11.5.1] est vérifié par le théorème de réduction stable, sous sa forme donnée au théorème 3.1 (la séparation de $\overline{\mathcal{M}}_F$ correspondant à la propriété d'unicité dans le théorème de réduction stable).

On en déduit la finitude des groupes d'automorphismes des variétés stables. En effet, le critère valuatif de propreté pour ces groupes d'automorphismes est un cas particulier du critère valuatif de séparation pour $\overline{\mathcal{M}}_F$ et est donc vérifié. Ces groupes d'automorphismes sont donc propres. Comme ils sont de plus affines (ce sont des sous-groupes de $\operatorname{PGL}_{F(m)}$), ils sont finis.

Le schéma en groupes des automorphismes d'une variété stable est de plus réduit, comme tout schéma en groupes en caractéristique nulle. Appliquant [Ol16, Theorem 8.3.3, Remark 8.3.4], on voit que $\overline{\mathcal{M}}_F$ est un champ de Deligne-Mumford.

18. Rappelons qu'un B-point du champ quotient $[H'/\operatorname{PGL}_{F(m)}]$ est la donnée d'un $\operatorname{PGL}_{F(m)}$-torseur I sur B, et d'un morphisme $\operatorname{PGL}_{F(m)}$-équivariant $\mu : I \to H'$.

4.4. L'espace de modules grossier

C'est un théorème de Keel et Mori [KM97] que tout champ séparé de type fini sur un corps admet un espace de modules grossier, qui est un espace algébrique séparé de type fini sur ce corps. Notons $\overline{M}_F$ l'espace de modules grossier de $\overline{\mathcal{M}}_F$. La propreté de $\overline{\mathcal{M}}_F$ entraîne celle de $\overline{M}_F$.

Il reste à démontrer la projectivité de $\overline{M}_F$. Les premières approches à ce problème ont reposé sur une autre stratégie de construction de $\overline{M}_F$ que celle présentée ici : la théorie géométrique des invariants de Mumford [Mu65], dont l'avantage est de produire des variétés qui sont, par construction, munies d'un fibré ample. C'est ainsi que Knudsen [Kn83] et Gieseker et Mumford [Mu77, §5] ont démontré la projectivité de $\overline{M}_g$. Cette technique a également permis à Gieseker de démontrer la quasi-projectivité des espaces de modules de surfaces lisses canoniquement polarisées [Gi77], et Viehweg a réussi, dans un véritable tour de force, à faire de même en dimension arbitraire [Vi95]. Cette méthode se heurte cependant à des difficultés sérieuses, déjà soulevées par Mumford [Mu77, §3] et Shah [Sh81], dans le cas des variétés singulières.

Kollár a proposé dans [Ko90] une autre méthode pour démontrer la projectivité d'un espace de modules qu'on sait être propre. Expliquons comment elle s'applique à $\overline{M}_F$.

L'espace algébrique $\overline{M}_F$ porte de nombreux fibrés en droites naturels. Rappelons que $u : \overline{\mathcal{U}}_F \to \overline{\mathcal{M}}_F$ est la famille universelle construite au §4.3. Si $n > 0$ est un entier assez divisible, le faisceau $\omega^{[n]}_{\overline{\mathcal{U}}_F/\overline{\mathcal{M}}_F}$ est un fibré en droites u-ample dont les restrictions aux fibres de u n'ont pas de cohomologie supérieure. Pour un tel n, le faisceau $u_*\omega^{[n]}_{\overline{\mathcal{U}}_F/\overline{\mathcal{M}}_F}$ est un fibré vectoriel sur $\overline{\mathcal{M}}_F$. Pour $N > 0$ assez divisible, le fibré en droites $\det(u_*\omega^{[n]}_{\overline{\mathcal{U}}_F/\overline{\mathcal{M}}_F})^{\otimes N}$ sur $\overline{\mathcal{M}}_F$ descend en un unique fibré en droites $\mathcal{L}_{n,N}$ sur $\overline{M}_F$ par [Ry16] (voir aussi [Vi95, Lemma 9.26]).

Théorème 4.3. — *Si n est assez divisible, $\mathcal{L}_{n,N}$ est un fibré ample sur $\overline{M}_F$.*

Ce théorème a été démontré par Kollár dans [Ko90, Corollary 5.6] pour les espaces de modules de surfaces stables et par Fujino [Fu18] en général.

Kollár a remarqué qu'il suffisait de vérifier que pour toute courbe projective lisse C et pour tout morphisme $\psi : C \to \overline{\mathcal{M}}_F$, le fibré vectoriel $\psi^*(u_*\omega^{[n]}_{\overline{\mathcal{U}}_F/\overline{\mathcal{M}}_F})$ est nef [Ko90, Theorem 2.6]. Qu'on puisse déduire le théorème 4.3, qui est un énoncé de positivité *stricte*, d'un tel résultat de positivité *au sens large* est remarquable. L'argument repose sur le critère d'amplitude de Nakai-Moishezon. Le gain de positivité est fourni par la variation, dans une famille de variétés stables, des équations de ces variétés dans leurs plongements pluricanoniques (voir [Ko90, §2.9]).

La vérification du fait que $\psi^*(u_*\omega^{[n]}_{\overline{\mathcal{U}}_F/\overline{\mathcal{M}}_F})$ est nef est due à Kollár [Ko90, Theorem 4.12] pour les familles de surfaces et à Fujino [Fu18, Theorem 1.7] en général. Elle s'appuie sur des théorèmes de semipositivité en théorie de Hodge, qui remontent à Fujita [Fu78] et qui sont démontrés dans la généralité requise dans [FF14, Corollary 5.23].

Patakfalvi et Xu [PX17] ont montré l'amplitude d'un autre fibré en droites, défini seulement sur la normalisation de $\overline{M}_F$: le *fibré en droites CM*. Comme $\overline{M}_F$ est propre, cela fournit une autre preuve de sa projectivité (voir [Gr61, Proposition 2.6.2]).

Remerciements. Merci à Olivier Debarre, Stéphane Druel, Javier Fresán, Christopher Hacon, János Kollár et Bertrand Rémy pour leurs utiles commentaires.

RÉFÉRENCES

[AJP16] N. A'CAMPO, L. JI, A. PAPADOPOULOS – *On the early history of moduli and Teichmüller spaces*, arXiv:1602.07208.

[AH11] D. ABRAMOVICH, B. HASSETT – *Stable varieties with a twist*, Classification of algebraic varieties, 1–38. EMS Ser. Congr. Rep. **3**, Eur. Math. Soc., Zürich, 2011.

[AK00] D. ABRAMOVICH, K. KARU – *Weak semistable reduction in characteristic* 0, Invent. Math. **139** (2000), 241–273.

[ALT18] K. ADIPRASITO, G. LIU, M. TEMKIN – *Semistable reduction in characteristic* 0, arXiv:1810.03131.

[Al94] V. ALEXEEV – *Boundedness and K^2 for log surfaces*, Internat. J. Math. **5** (1994), 779–810.

[Al96] V. ALEXEEV – *Moduli spaces $M_{g,n}(W)$ for surfaces*, Higher-dimensional complex varieties (Trento, 1994), 1–22. De Gruyter, Berlin, 1996.

[Al02] V. ALEXEEV – *Complete moduli in the presence of semiabelian group action*, Ann. Math. **155** (2002), 611–708.

[Al08] V. ALEXEEV – *Limits of stable pairs*, Pure Appl. Math. Q. **4** (2008), 767–783.

[AK16] K. ALTMANN, J. KOLLÁR – *The dualizing sheaf on first-order deformations of toric surface singularities*, arXiv:1601.07805, à paraître à J. Reine Angew. Math.

[AW71] M. ARTIN, G. WINTERS – *Degenerate fibres and stable reduction of curves*, Topology **10** (1971), 373–383.

[Be97] P. BERTHELOT – *Altérations de variétés algébriques (d'après A. J. de Jong)*, Séminaire Bourbaki Exp. No. 815, 273–311. Astérisque **241**, Soc. Math. Fr., Paris, 1997.

[BCHM10] C. BIRKAR, P. CASCINI, C. HACON, J. M^{c}KERNAN – *Existence of minimal models for varieties of log general type*, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), 405–468.

[Co00] B. CONRAD – *Grothendieck duality and base change*, Lecture Notes in Math. **1750**, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[dJ96] A. J. DE JONG – *Smoothness, semi-stability and alterations*, Publ. Math. IHES **83** (1996), 51–93.

[DM69] P. DELIGNE, D. MUMFORD – *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Publ. Math. IHES **36** (1969), 75–109.

[DR16] R. DERVAN, J. ROSS – *Stable maps in higher dimensions*, arXiv:1708.09750, à paraître à Math. Annalen.

[Dr09] S. DRUEL – *Existence de modèles minimaux pour les variétés de type général (d'après Birkar, Cascini, Hacon et M^{c}Kernan)*, Séminaire Bourbaki Exp. No. 982, 1–38. Astérisque **326**, Soc. Math. Fr., Paris, 2009.

[DB81] P. DU BOIS – *Complexe de de Rham filtré d'une variété singulière*, Bull. Soc. Math. Fr. **109** (1981), 41–81.

[Ei95] D. EISENBUD – *Commutative algebra*, Graduate Texts in Math. **150**, Springer-Verlag, New York, 1995.

[El81] R. ELKIK – *Rationalité des singularités canoniques*, Invent. Math. **64** (1981), 1–6.

[FPR16] M. FRANCIOSI, R. PARDINI, S. ROLLENSKE – *Gorenstein stable Godeaux surfaces*, arXiv:1611.07184.

[FP97] W. FULTON, R. PANDHARIPANDE – *Notes on stable maps and quantum cohomology*, Algebraic geometry (Santa Cruz, 1995), 45–96. Proc. Sympos. Pure Math. **62**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[Fu12] O. FUJINO – *Basepoint-free theorems : saturation, b-divisors, and canonical bundle formula*, Algebra Number Theory **6** (2012), 797–823.

[Fu18] O. FUJINO – *Semipositivity theorems for moduli problems*, Ann. Math. **187** (2018), 639–765.

[FF14] O. FUJINO, T. FUJISAWA – *Variations of mixed Hodge structure and semipositivity theorems*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **50** (2014), 589–661.

[FG17] O. FUJINO, Y. GONGYO – *On log canonical rings*, Higher dimensional algebraic geometry, 159–169. Adv. Stud. Pure Math. **74**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2017.

[Fu78] T. FUJITA – *On Kähler fiber spaces over curves*, J. Math. Soc. Japan **30** (1978), 779–794.

[Ga14] P. GALLARDO – *On the moduli space of quintics surfaces*, Ph.D. thesis, Stony Brook Univ. (2014).

[Gi77] D. GIESEKER – *Global moduli for surfaces of general type*, Invent. Math. **43** (1977), 233–282.

[Gr61] A. GROTHENDIECK – *Éléments de géométrie algébrique III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents 1*. Publ. Math. IHES **11** (1961).

[Gr63] A. GROTHENDIECK – *Éléments de géométrie algébrique III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents 2*. Publ. Math. IHES **17** (1963).

[Gr65] A. GROTHENDIECK – *Éléments de géométrie algébrique IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas 2*. Publ. Math. IHES **24** (1965).

[Gr66] A. GROTHENDIECK – *Éléments de géométrie algébrique IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas 3*. Publ. Math. IHES **28** (1966).

[Ha04] P. HACKING – *Compact moduli of plane curves*, Duke Math. J. **124** (2004), 213–257.

[HMX18a] C. HACON, J. M^{c}KERNAN, C. XU – *Boundedness of moduli of varieties of general type*, J. Eur. Math. Soc. **20** (2018), 865–901.

[HMX18b] C. HACON, J. M^{c}KERNAN, C. XU – *Boundedness of varieties of log general type*, Algebraic geometry (Salt Lake City, 2015), 309–348. Proc. Sympos. Pure Math. **97**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2018.

[HX13] C. HACON, C. XU – *Existence of log canonical closures*, Invent. Math. **192** (2013), 161–195.

[Ha77] R. HARTSHORNE – *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Math. **52**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[Ha03] B. HASSETT – *Moduli spaces of weighted pointed stable curves*, Adv. Math. **173** (2003), 316–352.

[HK04] B. HASSETT, S. KOVÁCS – *Reflexive pull-backs and base extension*, J. Alg. Geom. **13** (2004), 233–247.

[Ho75] E. HORIKAWA – *On deformations of quintic surfaces*, Invent. Math. **31** (1975), 43–85.

[Ka07] M. KAWAKITA – *Inversion of adjunction on log canonicity*, Invent. Math. **167** (2007), 129–133.

[Ka80] Y. KAWAMATA – *On singularities in the classification theory of algebraic varieties*, Math. Ann. **251** (1980), 51–55.

[KM97] S. KEEL, S. MORI – *Quotients by groupoids*, Ann. Math. **145** (1997), 193–213.

[KKMS73] G. KEMPF, F. KNUDSEN, D. MUMFORD, B. SAINT-DONAT – *Toroidal embeddings 1*, Lecture Notes in Math. **339**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.

[Kn83] F. KNUDSEN – *The projectivity of the moduli space of stable curves III*, Math. Scand. **52** (1983), 200–212.

[Ko90] J. KOLLÁR – *Projectivity of complete moduli*, J. Diff. Geom. **32** (1990), 235–268.

[Ko92] J. KOLLÁR (ed.) – *Flips and abundance for algebraic threefolds*, Astérisque **211**. Soc. Math. Fr., Paris, 1992.

[Ko95] J. KOLLÁR – *Flatness criteria*, J. Algebra **175** (1995), 715–727.

[Ko08] J. KOLLÁR – *Hulls and husks*, arXiv:0805.0576v4.

[Ko11a] J. KOLLÁR – *Two examples of surfaces with normal crossing singularities*, Sci. China Math. **54** (2011), 1707–1712.

[Ko11b] J. KOLLÁR – *New examples of terminal and log canonical singularities*, arXiv:1107.2864.

[Ko13a] J. KOLLÁR – *Singularities of the minimal model program.* With the collaboration of S. Kovács. Cambridge Tracts in Math. **200**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2013.

[Ko13b] J. KOLLÁR – *Moduli of varieties of general type*, Handbook of moduli, Vol. II, 131–157. Adv. Lect. Math. **25**, Int. Press, Somerville, MA, 2013.

[Ko18a] J. KOLLÁR – *Mumford's influence on the moduli theory of algebraic varieties*, arXiv:1809.10723.

[Ko18b] J. KOLLÁR – *Families of varieties of general type*, book in preparation, available at https://web.math.princeton.edu/~kollar/.

[KK10] J. KOLLÁR, S. KOVÁCS – *Log canonical singularities are du Bois*, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), 791–813.

[KM98] J. KOLLÁR, S. MORI – *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Math. **134**. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[KSB88] J. KOLLÁR, N.I. SHEPHERD-BARRON – *Threefolds and deformations of surface singularities*, Invent. Math. **91** (1988), 299–338.

[Kov09] S. KOVÁCS – *Young person's guide to moduli of higher dimensional varieties*, Algebraic geometry (Seattle, 2005), Part 2, 711–743. Proc. Sympos. Pure Math. **80**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[KP17] S. KOVÁCS, Z. PATAKFALVI – *Projectivity of the moduli space of stable log-varieties and subadditivity of log-Kodaira dimension*, J. Amer. Math. Soc. **30** (2017), 959–1021.

[LMB00] G. LAUMON, L. MORET-BAILLY – *Champs algébriques*, Ergeb. Math. Grenzgeb. **39**, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[LWX14] C. LI, X. WANG, C. XU – *On proper moduli space of smoothable Käler-Einstein Fano varieties*, arXiv:1411.0761v3.

[Ma72] T. MATSUSAKA – *Polarized varieties with a given Hilbert polynomial*, Amer. J. Math. **94** (1972), 1027–1077.

[Mu65] D. MUMFORD – *Geometric invariant theory*, Ergeb. Math. Grenzg **34**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1965.

[Mu77] D. MUMFORD – *Stability of projective varieties*, L'Enseignement Mathématique **23** (1977), 39–110.

[Ol16] M. OLSSON – *Algebraic spaces and stacks*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **62**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2016.

[Pa16] Z. PATAKFALVI – *Fibered stable varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. **368** (2016), 1837–1869.

[Pa17] Z. PATAKFALVI – *On the projectivity of the moduli space of stable surfaces in characteristic $p > 5$*, arXiv:1710.03818.

[PX17] Z. PATAKFALVI, C. XU – *Ampleness of the CM line bundle on the moduli space of canonically polarized varieties*, Algebr. Geom. **4** (2017), 29–39.

[Ra17] J. RANA – *A boundary divisor in the moduli spaces of stable quintic surfaces*, Internat. J. Math. **28**, 1750021 (2017).

[Ry16] D. RYDH – *Do line bundles descend to coarse moduli spaces of Artin stacks with finite inertia ?*, available at https://mathoverflow.net/q/206117.

[Sh81] J. SHAH – *Stability of two-dimensional local rings I*, Invent. Math. **64** (1981), 297–343.

[Sh92] V. V. SHOKUROV – *Three-dimensional log perestroikas*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **56** (1992), 105–203.

[Te10] M. TEMKIN – *Stable modification of relative curves*, J. Alg. Geom. **19** (2010), 603–677.

[Va06] R. VAKIL – *Murphy's law in algebraic geometry : badly-behaved deformation spaces*, Invent. Math. **164** (2006), 569–590.

[vO05] M. A. VAN OPSTALL – *Moduli of products of curves*, Arch. Math. (Basel) **84** (2005), 148–154.

[Vi95] E. VIEHWEG – *Quasi-projective moduli for polarized manifolds*, Ergeb. Math. Grenzgeb. **30**, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

Olivier Benoist

CNRS, DMA
École normale supérieure
45 rue d'Ulm
75230 Paris Cedex 05
E-mail : `olivier.benoist@ens.fr`