Séminaire BOURBAKI
71$^{\text{e}}$ année, 2018–2019, n$^{\text{o}}$ 1153

THÉORIE GLOBALE DU PLURIPOTENTIEL, ÉQUIDISTRIBUTION ET PROCESSUS PONCTUELS
[d'après Berman, Boucksom, Witt Nyström,...]

par **Romain DUJARDIN**

INTRODUCTION

0.1. — La théorie du potentiel logarithmique dans $\mathbb{C}$ a des liens profonds et directs avec l'analyse complexe et l'étude des propriétés analytiques des polynômes. Dans les années 1980-90, la *théorie du pluripotentiel* dans $\mathbb{C}^n$ s'est attachée à étendre les idées de la théorie classique du potentiel au cas de plusieurs variables complexes. Ses outils clefs sont les fonctions plurisousharmoniques et l'opérateur de Monge-Ampère, qui jouent respectivement le rôle des fonctions (sous)harmoniques et du laplacien. Ont été ainsi généralisées des notions classiques comme la capacité logarithmique, le diamètre transfini, etc. Parallèlement, se développaient des méthodes transcendantes en géométrie algébrique complexe utilisant peu ou prou les mêmes outils. La véritable convergence entre ces deux domaines de recherche a eu lieu dans les années 2000, et a mené à des résultats spectaculaires (voir par exemple l'exposé de J.-P. Demailly dans ce séminaire [27]). À la suite des travaux d'auteurs comme notamment V. Guedj, A. Zeriahi, R. Berman, S. Boucksom, il apparaît qu'un cadre naturel pour la théorie du pluripotentiel est celui d'une variété complexe compacte munie d'un fibré en droites possédant des propriétés de positivité. De manière remarquable, ce point de vue « global » a permis la résolution de problèmes anciens en théorie du pluripotentiel, comme celui de l'équidistribution des points de Fekete — ce sont les configurations de points qui réalisent le diamètre transfini, analogues à la distribution à l'équilibre d'une famille finie de particules chargées électriquement. Inversement, la théorie classique du potentiel, via son interprétation électrostatique, interagit naturellement avec la mécanique statistique et les probabilités, et ceci permet en retour d'envisager une approche probabiliste de certains problèmes de géométrie algébrique complexe.

0.2. — Notre objectif dans cet exposé est de rendre compte de manière pédagogique de certains résultats dans cette thématique, principalement dus à R. Berman, S. Boucksom, et D. Witt Nyström. D'autres auteurs fréquemment cités sont T. Bloom et N. Levenberg. Nous avons choisi de partir de la théorie classique du potentiel et d'augmenter progressivement le degré de généralité afin de comprendre les objets mis en jeu ainsi que le cheminement intellectuel (supposé !) qui a mené à ces idées. Le texte est par ailleurs clairsemé de résultats d'équidistribution. Il y a une intersection substantielle avec l'exposé récent de J.-P. Serre à ce séminaire [41] (principalement au § 1), et surtout avec celui de J.-P. Demailly [27] qui se situe résolument en géométrie kählerienne. Notre texte s'adressera ainsi peut-être plus aux analystes qu'aux géomètres (1).

Nous présentons d'abord de manière relativement informelle quelques points de théorie du potentiel et du pluripotentiel aux §§ 1 et 2, puis la discussion se formalise aux §§ 3, 4 et 5 qui constituent le cœur de l'exposé. Nous concluons au § 6 par un aperçu de certains résultats plus récents de R. Berman en lien avec la théorie probabiliste des grandes déviations.

0.3. — Introduisons quelques notations. On désignera par $\mathcal{M}(X)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur un espace mesurable $(X, \mathfrak{A})$. En général X sera un ensemble compact muni de sa tribu borélienne et $\mathcal{M}(X)$ sera muni de sa topologie faible qui en fait un compact (la convergence faible des mesures sera notée $\rightharpoonup$). Si E est un sous-ensemble fini de X on note $[E] = \sum_{x \in E} \delta_x$. L'espace des polynômes de degré d à n variables sera noté $\mathcal{P}_d(\mathbb{C}^n)$ (nous omettons la mention de $\mathbb{C}^n$ quand il n'y a pas de risque de confusion). On notera $|\cdot|$ la norme hermitienne standard dans $\mathbb{C}^n$; cette notation sera aussi celle utilisée pour une métrique sur un fibré en droites. La norme uniforme sur un ensemble E sera notée $\|\cdot\|_E$. Enfin, on pose classiquement $d^c = \frac{1}{2i\pi}(\overline{\partial} - \partial)$, de sorte que $dd^c = \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}$.

Nous utiliserons les abréviations classiques suivantes : psh pour plurisousharmonique, sci (resp. scs) pour semi-continu inférieurement (resp. supérieurement), p.p. pour presque partout.

0.4. — Je tiens à remercier Sébastien Boucksom, Serge Cantat et Charles Favre pour leurs commentaires sur ce texte.

1. THÉORIE CLASSIQUE DU POTENTIEL

La théorie du potentiel dans $\mathbb{C}$ est classiquement liée à des questions d'interpolation et d'approximation polynomiale. Dans cette section nous passons en revue certains de ces résultats, en nous appuyant sur l'approche par l'électrostatique qui est très parlante.

---

1. Dans le même esprit on peut signaler les notes de N. Levenberg [37] qui présentent les résultats de [10] et [12] sans quitter le cadre de la théorie du pluripotentiel pondérée dans $\mathbb{C}^n$.

1.1. Capacité et diamètre transfini. — (Voir [49, 40] pour plus de détails.) Soit K un compact du plan. L'objet de l'électrostatique est de déterminer la répartition d'un ensemble de particules chargées (disons négativement) astreintes à rester sur K, que nous modéliserons par une mesure positive μ à support dans K. En l'absence de champ extérieur (nous y reviendrons), ces particules interagissent selon la loi de Coulomb qui (dans le plan) met en jeu des forces répulsives proportionnelles à l'inverse de la distance. On introduit donc l'énergie

$$I^{-}(\mu) = -\int \log|z-w|\, d\mu(z)d\mu(w)$$

(qui peut valoir $+\infty$, par exemple si μ a un atome) et l'objet est de chercher une distribution μ à support dans K minimisant cette énergie. Comme il est d'usage en plusieurs variables complexes de travailler avec des fonctions sousharmoniques plutôt que surharmoniques, nous inversons le signe et chercherons plutôt à maximiser $I(\mu) = -I^{-}(\mu)$. On pose également

$$V(K) = \sup\left\{I(\mu), \mu \text{ probabilité sur } K\right\}.$$

Par définition $-V(K)$ est la *constante de Robin* de K et sa *capacité électrostatique* est $\mathrm{cap}(K) = \exp(V(K))$. Alors ou bien pour toute probabilité μ sur K on a $I(\mu) = -\infty$ (K est alors dit *polaire*) ou bien il existe une *unique* mesure de probabilité μ_K maximisant l'énergie I. Noter que la capacité d'un ensemble polaire est 0. Par définition μ_K est la *mesure d'équilibre* de K. Son potentiel logarithmique U_{μ_K} est la fonction définie par

$$U_{\mu_K}(z) = \int \log|z-w|\, d\mu_K(w).$$

Elle satisfait les propriétés suivantes

(i) $U_{\mu_K} \geqslant V(K)$;

(ii) $U_{\mu_K} = V(K)$ « quasi-partout » sur K ;

(iii) $U_{\mu_K}(z) = \log|z| + o(1)$ quand $z \to \infty$ dans $\mathbb{C}$;

(iv) $\Delta U_{\mu_K} = 2\pi\mu_K$ au sens des distributions.

Un mot sur la notion générale de capacité et le terme « quasi-partout » : une *capacité* (au sens de Choquet) sur un espace topologique séparé X est une fonction réelle positive définie sur l'ensemble des parties de X qui est croissante par inclusion, continue par limites croissantes, et continue pour les limites décroissantes de compacts. Le théorème de capacitabilité de Choquet affirme que si cap est une capacité sur X séparable et localement compact et si E est un borélien alors

$$\mathrm{cap}(E) = \sup\left\{\mathrm{cap}(K),\ K \text{ compact},\ K \subset E\right\}.$$

Une propriété a lieu *quasi-partout* si elle est vraie hors d'un ensemble de capacité nulle. Bien entendu la capacité électrostatique définie ci-dessus se prolonge aux sous-ensembles du plan en une capacité en ce sens.

Si maintenant E est un sous-ensemble fini de K, la définition de l'énergie ci-dessus impose que $I([E]) = -\infty$. Il est donc naturel de supprimer les termes diagonaux et de poser

$$\widetilde{I}(E) = \frac{2}{k(k-1)} \sum_{\substack{(z,w)\in E^2 \\ z\neq w}} \log|z-w|.$$

Un ensemble maximisant cette énergie parmi tous les ensembles de cardinal k donné est appelé *configuration de Fekete*. Les configurations de Fekete ne sont pas uniques en général (penser au cas d'un cercle). On a coutume de travailler multiplicativement et d'introduire le *k-diamètre*

$$\delta_k(K) = \sup_{x_1,\ldots,x_k\in K} \left(\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} |x_j - x_i| \right)^{2/(k(k-1))}.$$

On montre assez facilement que $\delta_{k+1}(K) \leqslant \delta_k(K)$. La limite $\delta_\infty(K) = \lim_k \delta_k(K)$ s'appelle le *diamètre transfini* de K. Il est instructif de détailler le théorème suivant qui est dû à Fekete et Szegö.

Théorème 1.1 (Fekete, Szegö). — *Avec les notations ci-dessus on a $\delta_\infty(K) = \mathrm{cap}(K)$. De plus les configurations de Fekete s'équidistribuent vers la mesure d'équilibre lorsque k tend vers l'infini. Plus précisément si pour tout k, F_k est une configuration de Fekete à k points, alors $\frac{1}{k}[F_k] \to \mu_K$.*

Démonstration. — Si $E = \{x_1, \ldots, x_k\}$ est un sous-ensemble de K de cardinal k on a

$$\frac{1}{k(k-1)}\widetilde{I}(E) = \frac{2}{k(k-1)} \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} \log|x_i - x_j| \leqslant \log \delta_k(K).$$

Soit maintenant μ une mesure de probabilité diffuse sur K. Noter que la mesure produit μ^n donne une masse totale aux sous-ensembles de K^n de cardinal k. Ainsi, si on intègre l'inégalité précédente par rapport à $d\mu(x_1)\cdots d\mu(x_k)$ il vient $I(\mu) \leqslant \log \delta_k(K)$. En faisant tendre k vers l'infini et en maximisant sur μ on en déduit que $\mathrm{cap}(K) \leqslant \delta_\infty(K)$.

Soit maintenant une suite (F_k) de configurations de Fekete. Posons $\nu_k = \frac{1}{k}[F_k]$ et soit (k_j) une sous-suite telle que (ν_{k_j}) tend vers ν. Par simplicité d'écriture notons $k_j = k$. Estimons l'énergie de ν :

$$\begin{aligned}
I(\nu) &= \int \log|z-w|\, d\nu(z)d\nu(w) \\
&= \lim_{M\to-\infty} \int \max(\log|z-w|, -M) d\nu(z)d\nu(w) \\
&= \lim_{M\to-\infty} \lim_{k\to\infty} \int \max(\log|z-w|, -M) d\nu_k(z)d\nu_k(w) \\
&= \lim_{M\to-\infty} \lim_{k\to\infty} \left(\int_{\{z=w\}} + \int_{F_k\times F_k\setminus\{z=w\}} \right) \max(\log|z-w|, -M) d\nu_k(z)d\nu_k(w)
\end{aligned}$$

$$= \lim_{M\to-\infty}\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k^2}(-M) + \frac{1}{k^2}\widetilde{I}(F_k)\right)$$
$$= \lim_{M\to-\infty}\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k^2}(-M) + \frac{k(k-1)}{k^2}\log\delta_k(K)\right) = \log\delta_\infty(K).$$

Comme par ailleurs on a nécessairement $I(\nu) \leqslant \log(\mathrm{cap}(K))$ on conclut à la fois que $\mathrm{cap}(K) = \delta_\infty(K)$ et que ν est une mesure maximisante, donc par unicité $\nu = \mu_K$. □

Il découle clairement de la preuve que l'équidistribution a également lieu si la suite (F_k) n'est qu'*asymptotiquement* optimale, i.e. $\widetilde{I}(\nu_k) \to \log\delta_\infty(K)$. En outre il n'est pas nécessaire que F_k soit inclus dans K, il suffit que toute valeur d'adhérence de la suite $\frac{1}{k}[F_k]$ le soit. On a ainsi montré le résultat suivant :

PROPOSITION 1.2. — *Soit K un compact du plan et (F_k) une suite d'ensembles finis de cardinal e_k tendant vers l'infini. Supposons que la suite $\left(\frac{1}{e_k}[F_k]\right)$ converge faiblement vers une probabilité ν à support dans K. Alors*

$$I(\nu) \geqslant \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{e_k(e_k-1)}\widetilde{I}(F_k).$$

En particulier si $\liminf \frac{1}{e_k(e_k-1)}\widetilde{I}(F_k) \geqslant \log(\mathrm{cap}(K))$*, alors* $\frac{1}{e_k}[F_k]$ *converge vers* μ_K*.*

1.2. Norme uniforme. — Les résultats précédents ont des applications plus ou moins directes à des questions d'approximation polynomiale uniforme. Remarquons déjà que la quantité $\prod_{1\leqslant i<j\leqslant k}(x_j - x_i)$ n'est autre que le déterminant de Vandermonde de $(x_1,\dots,x_k)$, ce qui fait que les points de Fekete sont des choix naturels pour l'interpolation de Lagrange sur K : en effet si $F_k = \{x_1,\dots,x_k\}$ est une configuration de Fekete à k points, le polynôme de Lagrange élémentaire

$$L_k(z) = \frac{1}{\prod_{j\neq k}(x_k - x_j)}\prod_{j\neq k}(z - x_j)$$

est de norme 1 sur K. En particulier pour tout polynôme P de degré au plus k on a $\|P\|_K \leqslant k\,\|P\|_{F_k}$ (rappelons que $\|\cdot\|_E$ désigne la norme uniforme sur l'ensemble E).

Intéressons-nous maintenant à la quantité

$$\Upsilon_k = \inf\left\{\|P\|_K\,,\ P \text{ unitaire de degré } k\right\}.$$

On montre que cet infimum est réalisé par un unique polynôme T_k qui est par définition le k^{e} polynôme de Tchebycheff de K. La suite (Υ_k) est sous-multiplicative : en effet T_kT_ℓ est un polynôme unitaire de degré $k+\ell$ tel que $\|T_kT_\ell\|_K \leqslant \Upsilon_k\Upsilon_\ell$, ainsi $\Upsilon_{k+\ell} \leqslant \Upsilon_k\Upsilon_\ell$. Par un lemme classique [2] il en découle que la suite $(\Upsilon_k^{1/k})$ converge, notons $\tau(K)$ sa limite.

THÉORÈME 1.3 (Fekete, Szegö). — $\tau(K) = \delta_\infty(K)$.

2. Souvent désigné sous le nom de lemme de Fekete !

Démonstration. — La démonstration se fait en deux temps. La première inégalité $\tau(K) \geqslant \delta_\infty(K)$ est fournie par le

LEMME 1.4 (Inégalité de Bernstein-Walsh). — *Si P est un polynôme de degré $d \geqslant 1$ alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a*

$$|P(z)| \leqslant \|P\|_K \exp\left(d(U_{\mu_K}(z) - V(K))\right) = \|P\|_K \left(\frac{\exp\left(U_{\mu_K}(z)\right)}{\mathrm{cap}(K)}\right)^d.$$

Voir ci-après pour la preuve. Supposons maintenant P unitaire et réécrivons cette inégalité sous la forme $\|P\|_K^{1/d} \geqslant |P(z)|^{1/d} e^{-U_{\mu_K}(z)}\mathrm{cap}(K)$. En faisant $z \to \infty$ on obtient $\|P\|_K^{1/k} \geqslant \mathrm{cap}(K)$ et par suite $\tau(K) \geqslant \mathrm{cap}(K) = \delta_\infty(K)$.

Pour l'inégalité inverse, plutôt que de travailler directement avec les polynômes de Tchebycheff, on introduit « les » polynômes de Fekete (qui ne sont pas uniques)

$$F_k(z) = \prod_{i=1}^{k}(z - x_i) \text{ où } \{x_1, \ldots, x_k\} \text{ est une configuration de Fekete.}$$

Pour tout $z \in K$, comme $\{z, x_1, \ldots, x_k\}$ est une configuration de $(k+1)$ points on a l'inégalité

$$\prod_{i=1}^{k} |z - x_i| \prod_{i<j} |x_j - x_i| \leqslant \delta_{k+1}(K)^{k(k+1)/2},$$

soit, en utilisant le fait que $\delta_{k+1}(K) \leqslant \delta_k(K)$,

$$|F_k(z)| = \prod_{i=1}^{k} |z - x_i| \leqslant \frac{\delta_{k+1}(K)^{k(k+1)/2}}{\delta_k(K)^{k(k-1)/2}} \leqslant \delta_k(K)^k.$$

Finalement $\|F_k\|_K^{1/k} \leqslant \delta_k(K)$ et en passant à la limite on a bien $\tau(K) \leqslant \delta_\infty(K)$. □

Démonstration de l'inégalité de Bernstein-Walsh. — Si z appartient à K le résultat est clair. Par le principe du maximum si z appartient à une composante connexe bornée de K^c on a $|P(z)| \leqslant \|P\|_K$ donc l'inégalité est satisfaite. Soit Ω l'unique composante connexe non bornée de K^c et considérons-y la fonction $\frac{1}{d}\log|P| - U_{\mu_K}$. Elle est bornée à l'infini et majorée par $\frac{1}{d}\log\|P\|_K - V(K)$ quasi partout sur $\partial\Omega$. Par le principe (étendu) du maximum on en déduit que cette inégalité est satisfaite sur tout Ω et le résultat suit. □

1.3. Une application arithmétique. — Nous présentons ici un énoncé d'équidistribution arithmétique qui peut être vu comme une version élémentaire des résultats du § 5.4. Il est dû à Fekete [31] et Rumely [39].

THÉORÈME 1.5. — *Soit K un compact du plan de capacité inférieure ou égale à 1. Soit (α_k) une suite infinie d'entiers algébriques telle que pour tout voisinage V de K, pour k assez grand l'orbite $G \cdot \alpha_k$ de α_k sous le groupe de Galois absolu $G = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q})$ est entièrement contenue dans V.*

Alors $\mathrm{cap}(K) = 1$ *et* $\frac{1}{\deg(\alpha_k)}[G \cdot \alpha_k]$ *tend vers* μ_K *quand* $n \to \infty$.

Démonstration. — Soit ν une valeur d'adhérence de la suite $\frac{1}{\deg(\alpha_k)}[G \cdot \alpha_k]$. Par hypothèse ν est à support dans K. Noter que le degré de α_k tend nécessairement vers l'infini car il n'y a qu'un nombre fini d'entiers algébriques de degré majoré dont les conjugués de Galois sont contenus dans un compact donné. Considérons le *discriminant* de α_k

$$D(\alpha_k) = \prod_{\sigma \neq \sigma' \in G} (\sigma(\alpha_k) - \sigma'(\alpha_k)),$$

où G est le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}[\alpha_k] : \mathbb{Q})$. Comme α_k est un entier algébrique, $D(\alpha_k)$ est un entier non nul, en particulier $|D(\alpha_k)| \geqslant 1$. Avec les notations du § 1.1 on a donc $\widetilde{I}(G \cdot \alpha_k) \geqslant 0$ pour tout k. Par conséquent la proposition 1.2 s'applique et l'on obtient $I(\nu) \geqslant 0$. Ainsi $\mathrm{cap}(K) = 1$ et ν est d'énergie $I(\nu) = 0 = \log \mathrm{cap}(K)$, on conclut donc que $\nu = \mu_K$. □

Le théorème de Rumely s'énonce plus précisément en termes de *points de petite hauteur*. L'énoncé est un peu plus sophistiqué mais la preuve est essentiellement la même.

1.4. Version pondérée. — La plupart des résultats des § 1.1 et 1.2 admettent des versions *pondérées* où l'énergie $I(\mu)$ est remplacée par

$$I_Q(\mu) = \int \log|z - w|\, d\mu(z) d\mu(w) + \int Q d\mu.$$

Physiquement, cela revient à introduire un champ électrique externe. Mathématiquement, cette généralisation intervient dans de nombreux problèmes comme par exemple la distribution des zéros des matrices aléatoires gaussiennes (voir par exemple [25]). Nous verrons également que c'est un cadre très naturel si l'on pense la théorie du potentiel dans $\mathbb{C}$ comme restriction d'une théorie du potentiel sur $\mathbb{P}^1$. La référence standard du sujet est le livre de Saff et Totik [40].

2. THÉORIE DU PLURIPOTENTIEL DANS $\mathbb{C}^n$

Restons dans l'espace affine pour le moment et voyons comment la théorie du potentiel s'adapte à l'analyse à plusieurs variables complexes. Cette généralisation est l'objet de la *théorie du pluripotentiel*, qui est maintenant classique et bien documentée [33, 26, 32]. Nous nous contenterons de présenter rapidement les concepts basiques et quelques généralisations des résultats de la section précédente. Une différence essentielle avec la dimension 1 (ou avec la théorie du potentiel dans $\mathbb{R}^d$) est que l'on ne dispose pas de l'interprétation électrostatique (même si des notions d'énergie entreront en jeu plus loin). Le point clef est ici le problème de Dirichlet pour les fonctions plurisousharmoniques. Pour ne pas alourdir l'exposition, nous nous limiterons au cadre classique, non pondéré. La théorie pondérée sera évoquée lors de l'extension de ces concepts au cadre kählerien.

2.1. Fonctions plurisousharmoniques et opérateur de Monge-Ampère

2.1.1. — Une $(1,1)$-forme ω dans un ouvert de $\mathbb{C}^n$ est dite *positive* si elle s'écrit en coordonnées $\omega = i\sum_{j,k}\omega_{j,k}dz_j \wedge d\bar{z}_k$ et si en tout point la matrice $(\omega_{j,k})$ est hermitienne et positive. C'est une notion invariante par biholomorphisme. Il existe également une (en fait plusieurs) notion(s) de positivité pour les formes différentielles de bidegré (k,k) pour tout $k \leqslant n$ (cf. [26, Chap. 3]). Rappelons qu'un *courant* est une forme différentielle dont les coefficients sont des distributions, et que la notion de positivité peut être étendue aux courants.

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}^n$. On rappelle qu'une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est *plurisousharmonique (psh)* si u est semi-continue supérieurement (scs) et sousharmonique en restriction à toute droite complexe. Si u est de classe C^2, elle est psh si et seulement si la $(1,1)$ forme

$$dd^c u = \frac{i}{\pi}\sum_{j,k}\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \bar{\partial} z_k}dz_j \wedge d\bar{z}_k$$

est positive. Plus généralement, si u est psh et non identiquement égale à $-\infty$ alors elle est localement intégrable et le courant $dd^c u$ est positif au sens des distributions. Réciproquement une fonction $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ayant cette propriété est presque partout égale à une fonction psh. En particulier la plurisousharmonicité est invariante par biholomorphisme donc elle fait sens sur les variétés complexes. On notera $\mathrm{PSH}(\Omega)$ le cône des fonctions psh sur Ω. Une fonction u est pluriharmonique si u et $-u$ sont psh. Une limite décroissante de fonctions psh est psh. Si $\{u_\alpha, \alpha \in A\}$ est une famille localement uniformément majorée de fonctions psh, alors $u = (\sup u_\alpha)^*$ est psh, où l'astérisque désigne la régularisée scs, i.e. $v^*(x) = \limsup_{y\to x} v(y)$. En outre il existe une suite (α_j) sur laquelle le sup est réalisé (lemme de Choquet).

On a des propriétés de compacité utiles. Si (u_j) est une suite localement uniformément majorée de fonctions psh, alors elle admet des sous-suites (u_{j_k}) convergentes dans L^1_{loc} et en outre si on note $u = \lim_k u_{j_k}$ on a la convergence « semi-uniforme » suivante : pour tout compact K de Ω, $\lim_{k\to\infty}\sup_K u_{j_k} \leqslant \sup_K u$. Ce dernier point est connu sous le nom de *lemme de Hartogs.*

2.1.2. — Une observation fondamentale est que si $u_1, \ldots, u_k$ sont des fonctions psh on peut donner un sens au produit extérieur $dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge dd^c u_k$ sous des hypothèses assez faibles sur la régularité des u_j. D'après Bedford et Taylor [4] il suffit par exemple que les u_j soient localement bornées (i.e. localement minorées). La démonstration se fait par récurrence sur k : si $dd^c u_k \wedge \cdots \wedge dd^c u_1$ est bien défini comme courant positif de bidegré (k,k), alors ses coefficients sont des mesures qui intègrent u_{k+1} (noter qu'une fonction psh a une valeur bien définie en chaque point) et donc $u_{k+1}dd^cu_k \wedge \cdots \wedge dd^cu_1$ est également un courant de bidegré (k,k). On peut alors poser

$$dd^cu_{k+1} \wedge \cdots \wedge dd^cu_1 := dd^c(u_{k+1}dd^cu_k \wedge \cdots \wedge dd^cu_1).$$

En particulier on peut considérer *l'opérateur de Monge-Ampère complexe* $(dd^cu)^n$, un (n,n)-courant positif que l'on peut donc identifier à une mesure positive sur Ω. Ces produits extérieurs ne sont pas continus relativement à la topologie L^1_{loc} sur leurs facteurs, ce qui est une source importante de difficultés techniques dans le sujet, néanmoins ils le sont notamment vis-à-vis des suites monotones. De nombreuses généralisations de [4] montrent que l'on peut aller au-delà des fonctions bornées, toutefois il n'est pas possible d'étendre « raisonnablement » la définition de l'opérateur de Monge-Ampère à toutes les fonctions psh. En effet un théorème de Kiselman montre qu'on ne peut pas définir un opérateur $(dd^c)^n$ sur le cône des fonctions psh qui soit continu par limite décroissante.

Un ensemble E est *pluripolaire* si pour tout point de E il existe un voisinage connexe Ω et une fonction psh u sur Ω non identiquement $-\infty$ telle que $E \cap \Omega \subseteq \{u = -\infty\}$. Ce sont les ensembles « négligeables » de la théorie du pluripotentiel. Par exemple si $v = \sup u_\alpha$ est l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions psh, un résultat profond de [4] affirme que $E = \{v < v^*\}$ est pluripolaire. Si u est psh et localement bornée, la mesure $(dd^cu)^n$ ne charge pas les ensembles pluripolaires.

2.1.3. — La résolution de l'équation de Monge-Ampère est un chapitre important du sujet, qui s'est ouvert avec les travaux de Bedford et Taylor [3]. Le problème est de résoudre $(dd^cu)^n = \mu$ dans un domaine Ω avec condition de Dirichlet $u = \varphi$ au bord, où μ est une mesure positive sur Ω et φ est une fonction (disons) continue sur $\partial\Omega$. La méthode utilisée en général est inspirée de la méthode dite de Perron pour la résolution du problème de Dirichlet $\Delta u = f$, qui consiste à chercher les solutions comme enveloppes supérieures de fonctions psh satisfaisant $(dd^cu)^n \geqslant \mu$ et $u|_{\partial\Omega} \leqslant \varphi$.

Un cas particulièrement intéressant est le cas $\mu = 0$, dont la résolution remonte à Bremermann [21]. En particulier nous aurons besoin du résultat suivant :

Théorème 2.1. — *Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}^n$ et u une fonction dans $\mathrm{PSH}(\Omega) \cap L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Soit $p \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $\overline{B}(p,r) \subset \Omega$. Alors il existe une unique fonction $\widetilde{u} \in \mathrm{PSH}(\Omega) \cap L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ telle que $u = \widetilde{u}$ hors de $B(p,r)$, $\widetilde{u} \geqslant u$ sur $B(p,r)$ et $(dd^c\widetilde{u})^n = 0$ sur $B(p,r)$.*

On dit qu'une fonction psh sur Ω est *maximale* si pour tout ouvert Ω' relativement compact dans Ω et toute fonction psh sur Ω' et scs sur $\overline{\Omega'}$ telle que $u \geqslant v$ sur $\partial\Omega'$ on a $u \geqslant v$ sur Ω'. Si $n = 1$ les fonctions sousharmoniques maximales sont les fonctions harmoniques. En dimension supérieure le théorème précédent implique que $u \in \mathrm{PSH}(\Omega) \cap L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ est maximale si et seulement si $(dd^cu)^n = 0$. On voit que la condition est plus faible que la pluriharmonicité ($dd^cu = 0$) : par exemple n'importe quelle fonction psh ne dépendant que d'une variable est maximale.

Dans le même esprit on a le *principe de comparaison* suivant qui jouera un rôle fondamental dans la suite.

THÉORÈME 2.2 ([4]). — *Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}^n$ et $u, v \in \mathrm{PSH}(\Omega) \cap L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Supposons que $u \geqslant v$ sur $\partial\Omega$ au sens où $\liminf_{z\to\partial\Omega}(u(z) - v(z)) \geqslant 0$. Alors*

$$\int_{\{u<v\}} (dd^c v)^n \leqslant \int_{\{u<v\}} (dd^c u)^n.$$

En particulier si $(dd^c u)^n \leqslant (dd^c v)^n$ alors $u \geqslant v$ sur Ω.

2.2. Classe $\mathcal{L}$ et polynômes. — Le « théorème de Liouville » pour les fonctions psh dit qu'une fonction psh dans $\mathbb{C}^n$ qui est un $o(\log|z|)$ à l'infini est constante. Introduisons la *classe de Lelong* $\mathcal{L}$ des fonctions à croissance minimale

$$\mathcal{L} = \{u \in \mathrm{PSH}(\mathbb{C}^n),\ u(z) \leqslant \log|z| + O(1) \text{ quand } z \to \infty\}$$

ainsi que

$$\mathcal{L}^+ = \{u \in \mathrm{PSH}(\mathbb{C}^n),\ u(z) = \log|z| + O(1) \text{ quand } z \to \infty\}.$$

Par exemple si P est un polynôme de degré d à k variables, la fonction $\frac{1}{\deg(P)} \log|P|$ est dans $\mathcal{L}$ mais pas dans $\mathcal{L}^+$, alors que la fonction $z \mapsto \log(1 + |z|)$ est dans $\mathcal{L}^+$.

Soit K un sous-ensemble borné de $\mathbb{C}^n$. On introduit suivant Zaharjuta [53] la *fonction extrémale* V_K de K, définie en tout $z \in \mathbb{C}^n$ par

$$V_K(z) = \sup\{u(z),\ u \in \mathcal{L},\ u|_K \leqslant 0\}.$$

Si K n'est pas pluripolaire, alors V_K^* appartient à $\mathcal{L}^+$; sinon $V_K^* = +\infty$. Remarquer qu'on a simultanément $V_K \geqslant 0$ et $V_K|_K \leqslant 0$ donc $V_K|_K = 0$. Par définition de V_K on a une inégalité de Bernstein-Walsh :

$$\forall z \in \mathbb{C}^n,\ |P(z)| \leqslant \|P\|_K \cdot (V_K(z))^{\deg(P)}. \tag{1}$$

La fonction V_K est positive donc par la théorie de Bedford-Taylor on peut considérer la mesure $\mu_K = (dd^c V_K^*)^n$ qui est par définition la *mesure d'équilibre* de K au sens de la théorie du pluripotentiel. C'est une mesure de probabilité grâce à la normalisation choisie pour dd^c. Pour $n = 1$ on retombe bien entendu sur la définition électrostatique (voir les propriétés du potentiel U_{μ_K}).

La fonction V_K est automatiquement semi-continue inférieurement : en effet dans la définition de V_K, comme on peut régulariser les fonctions psh par des suites décroissantes de fonctions psh lisses, on peut se restreindre à des compétiteurs u continus.

On dit que K est *régulier* (resp. régulier en z_0) si $V_K = V_K^*$ (resp. $V_K(z_0) = V_K^*(z_0)$), autrement dit si V_K est continue (resp. continue en z_0). C'est le cas par exemple si K est à bord lisse de classe C^1. On a plus généralement le critère suivant : K est régulier si tout point de K est accessible par un chemin réel-analytique contenu dans l'intérieur de K. Cela découle du fait suivant : toute fonction sousharmonique définie au voisinage de $[0, 1]$

dans $\mathbb{C}$ satisfait $u(1) = \limsup_{[0,1]\ni z\to 1} u(z)$. (voir [33, §5.3] ; on dit que $[0,1]$ n'est pas *effilé* en 1). Inversement si K est régulier et L est pluripolaire et non inclus dans K, alors $K \cup L$ n'est pas régulier en général : en effet $V^*_{K\cup L} = V^*_K$ peut être positive aux points de $L \setminus K$.

Comme V_K appartient à $\mathcal{L}$, on peut définir la *constante de Robin*

$$\gamma_K := \limsup_{z\to\infty}(V_K(z) - \log|z|)$$

et comme en dimension 1, $c : E \mapsto \exp(-\gamma_E)$ définit une capacité [34]. Contrairement à la dimension 1, il y a beaucoup de flexibilité dans cette définition : on a en fait une *fonction de Robin* $\gamma_K(z) = \limsup_{\lambda\to\infty}(V_K(\lambda z) - \log|\lambda z|)$ qui est définie sur $\mathbb{P}^{n-1}$ (i.e. l'espace des directions à l'infini) et donc des constantes de Robin *directionnelles*, et autant de capacités que de manières de les moyenner et de les estimer.

Antérieurement à V_K avait été introduite la *fonction extrémale de Siciak* :

$$\Phi_K : z \mapsto \Phi_K(z) = \sup\left\{|P(z)|^{1/\deg(P)}, P \text{ polynôme },\ \|P\|_K \leqslant 1\right\}.$$

Théorème 2.3 (Siciak [43]). — *Si K est compact alors $V_K = \log\Phi_K$.*

Remarquer que pour démontrer ce résultat il faut trouver le moyen de passer des fonctions psh aux fonctions holomorphes. Ceci se fait par exemple grâce aux estimées L^2 de Hörmander (voir par exemple [32, Thm 9.24] pour un argument concis).

De même que pour la généralisation à plusieurs variables de la constante de Robin, on peut définir diverses constantes de Tchebycheff pour K. La variété de ces constantes vient ici de ce qu'il n'y a pas à plusieurs variables de notion univoque de polynôme unitaire. Attardons-nous un peu sur ce point. Les résultats qui suivent sont essentiellement dus à Zaharjuta [52], et la présentation est issue de [15]. Si $\alpha \in \mathbb{N}^n$ est un multi-indice on note comme à l'accoutumée $z^\alpha = z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}$ et $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Ordonnons ces multi-indices de la manière suivante : $\alpha \leqslant \beta$ si et seulement si ou bien $|\alpha| < |\beta|$ ou bien $|\alpha| = |\beta|$ et α est inférieur à β pour l'ordre lexicographique. Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on définit alors une constante de Tchebycheff Υ_α

$$\Upsilon_\alpha = \inf\left\{\|P\|_K,\ P(z) = z^\alpha + \sum_{\beta<\alpha} a_\beta z^\beta\right\},$$

et on pose $\tau_{K,\alpha} = \Upsilon_\alpha^{1/|\alpha|}$.

Soit Σ le simplexe standard de $\mathbb{R}^n$

$$\Sigma = \left\{(\theta_1,\dots,\theta_n) \in \mathbb{R}^n,\ \theta_j \geqslant 0,\ \sum\theta_j = 1\right\}$$

et Σ^0 le simplexe ouvert correspondant $\Sigma^0 = \left\{\theta \in \Sigma, \prod_j \theta_j > 0\right\}$. Le lemme suivant découle uniquement de la propriété de sous-multiplicativité $\Upsilon_{\alpha+\beta} \leqslant \Upsilon_\alpha\Upsilon_\beta$.

Lemme 2.4 ([52]). — *Pour tout $\theta \in \Sigma^0$, la limite*

$$\tau_{K,\theta} = \lim_{\substack{\alpha/|\alpha| \to \theta \\ |\alpha| \to \infty}} \tau_{K,\alpha}$$

existe et définit une fonction continue et log-convexe sur Σ^0.

Si on note $h(k,n) = \binom{n-1+k}{k}$ le nombre de monômes de degré k à n variables alors

$$\lim_{k\to\infty} \left(\prod_{|\alpha|=d} \tau_{K,\alpha} \right)^{1/h(k,n)} = \exp\left(\int_\Sigma \log(\tau_{K,\theta})\, d\theta \right) := \tau(K), \tag{2}$$

où $d\theta$ désigne la mesure de Lebesgue normalisée sur Σ, définit une constante de Tchebycheff moyenne que nous retrouverons au paragraphe suivant.

Nous concluons ce paragraphe avec deux résultats importants. D'abord un critère de compacité pour la classe $\mathcal{L}$ (voir par exemple [33, 5.2.1 et 5.2.4]) :

Théorème 2.5. — *Soient $\mathcal{U}$ une famille de fonctions de $\mathcal{L}$ et $u = \sup\{v,\ v \in \mathcal{U}\}$. Si $\{u < +\infty\}$ n'est pas pluripolaire, alors $\mathcal{U}$ est localement uniformément majorée et $u^* \in \mathcal{L}$.*

Et ensuite le *principe de domination* :

Théorème 2.6 ([5]). — *Soient $u \in \mathcal{L}$ et $v \in \mathcal{L}^+$ localement bornées et supposons que $u \leqslant v$ p.p. relativement à la mesure $(dd^c v)^n$. Alors $u \leqslant v$.*

2.3. Diamètre transfini et configurations de Fekete. — L'extension à plusieurs variables de la notion de diamètre transfini est due à F. Leja dans les années 1950. Énumérons les monômes à k variables selon l'ordre établi au § 2.2 pour obtenir une suite $(\alpha_j)_{j\geqslant 1}$ et posons $e_j(z) = z^{\alpha_j}$. Notons $N_k = \sum_{d=0}^k h(d,n) = \binom{n+k}{k}$ le nombre de monômes de degré au plus k et $\Sigma_k = \sum_{d=0}^k dh(d,k) = \frac{n}{n+1} k N_k$ la somme de leurs degrés.

Étant donnés q points $\zeta_1, \ldots, \zeta_q$ dans K, le calcul de l'interpolation en les ζ_i fait intervenir le déterminant de Vandermonde généralisé $\det(e_j(\zeta_i))_{i,j=1}^q$. On appelle k-diamètre de K la quantité

$$\delta_k(K) = \sup_{x_1,\ldots,x_{N_k} \in K} \left| \det(e_j(x_i))_{i,j=1}^{N_k} \right|^{1/\Sigma_k} = \sup_{x_1,\ldots,x_{N_k} \in K} \left| \det(e_j(x_i))_{i,j=1}^{N_k} \right|^{\frac{n+1}{nkN_k}} \tag{3}$$

et le *diamètre transfini* est défini par

$$\delta_\infty(K) = \limsup_{n\to\infty} \delta_k(K). \tag{4}$$

Théorème 2.7 ([52]). — *Si K est un compact de $\mathbb{C}^n$, la limite dans (4) existe et $\delta_\infty(K) = \tau(K)$, où $\tau(K)$ est comme en (2). En particulier si K est non pluripolaire $\delta_\infty(K) > 0$.*

L'existence de cette limite est non triviale et la démonstration de Zaharjuta repose sur les idées de sous-multiplicativité du paragraphe précédent. Nous en donnerons une autre preuve au §5.3.

Une *configuration de Fekete* est un sous-ensemble de N_k points de K réalisant le maximum dans (3) et il est naturel de se demander si on a un résultat d'équidistribution pour les configurations de Fekete analogue au théorème 1.1, le candidat naturel pour la limite étant bien sûr la mesure d'équilibre μ_K. La théorie du pluripotentiel « classique » n'a pas su répondre à cette question, qui est restée ouverte pendant longtemps. La réponse, positive, sera expliquée au § 5.3 et nécessite de travailler dans un cadre plus général.

Remarque 2.8. — Même si on ne peut plus interpréter les configurations de Fekete en termes électrostatiques, on peut tout de même introduire une énergie d'interaction déterminantale

$$E_{N_k}(x_1, \ldots, x_{N_k}) = -\frac{1}{\Sigma_k} \log \left|\det(e_j(x_i))_{i,j=1}^{N_k}\right|$$

et voir les configurations de Fekete comme minimisant cette énergie. Nous reviendrons brièvement sur ce point de vue au §6

2.4. Version pondérée. — Comme à une variable, il y a une version pondérée de la théorie du pluripotentiel qui jouera un rôle important dans la suite. En un mot, il s'agit dans les résultats précédents de multiplier la norme hermitienne $|\cdot|$ de $\mathbb{C}^n$ par une fonction w positive dite *poids*. On notera également $Q = -\log w$ de sorte que $w = e^{-Q}$. Plus précisément, si K est un compact comme précédemment, on se donne une fonction scs w définie sur K telle que $\{z \in K, w(z) > 0\}$ est non pluripolaire (on peut également supposer K fermé et non borné modulo une hypothèse sur la décroissance de w à l'infini : $w(z) = o(1/|z|)$). On pose alors par exemple

$$V_{K,Q}(z) := \sup\{u(z),\ u \in \mathcal{L},\ u \leqslant Q \text{ sur } K\} \text{ et } \mu_{K,Q} = \left(dd^c V_{K,Q}^*\right)^n$$

ainsi que

$$\Phi_{K,Q}(z) := \sup\left\{|P(z)|^{1/\deg(P)},\ P \in \mathcal{P}_k, \left\|w^{\deg(P)} P\right\|_K \leqslant 1\right\}$$

et on aura un analogue du théorème 2.3. On définit de manière analogue un diamètre transfini $\delta_{\infty,Q} = \lim_{k\to\infty} \delta_{k,Q}$, où $\delta_{k,Q}$ est défini de manière analogue à (3). L'existence de cette limite est obtenue par Berman et Boucksom dans [10] (et indépendamment par Bloom et Levenberg [15]).

3. LA PROPRIÉTÉ DE BERNSTEIN-MARKOV

Au cours des sections précédentes nous nous sommes à plusieurs reprises intéressés à la norme uniforme de familles de polynômes sur un compact. Techniquement, il est également utile de pouvoir travailler avec la norme L^2. Cela permet en outre de faire le lien avec la théorie des polynômes orthogonaux. La propriété de Bernstein-Markov est une condition technique importante qui permet de comparer les deux points de vue.

Par souci de légèreté des notations, nous nous limitons une fois encore au cadre non pondéré. Toutefois les deux critères que nous présentons (proposition 3.3 et théorème 3.7) sont valables en présence d'un poids w continu.

3.1. Définitions. — Soit K un compact de $\mathbb{C}^n$ et μ une mesure de probabilité telle que $\mathrm{Supp}(\mu) = K$. Afin d'éviter certaines trivialités nous supposerons dans toute cette section que μ ne charge pas les ensembles pluripolaires (et donc K n'est pas pluripolaire). En particulier $P|_K = 0$ implique $P = 0$ donc que $\|\cdot\|_K$ et $\|\cdot\|_{L^2(\mu)}$ définissent des normes sur $\mathcal{P}_d(\mathbb{C}^n)$ pour tout d. Bien sûr pour tout $P \in \mathcal{P}_d$ on a $\|P\|_{L^2(\mu)} \leqslant \|P\|_K$.

On dit que μ satisfait la *propriété de Bernstein-Markov* si la distortion entre ces normes est sous-exponentielle en le degré, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(M_d)_{d\geqslant 0}$ telle que

$$\text{pour tout } P \in \mathcal{P}_d,\ \|P\|_K \leqslant M_d \|P\|_{L^2(\mu)} \text{ et } \lim_{d\to\infty} (M_d)^{1/d} = 1.$$

On peut reformuler cette condition de plusieurs manières :

Lemme 3.1. — *Soit (K, μ) comme ci-dessus. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *la mesure μ satisfait la propriété de Bernstein-Markov ;*

(ii) *pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $C(\varepsilon)$ telle que pour tout polynôme P on a*

$$\|P\|_K \leqslant C(\varepsilon)(1+\varepsilon)^{\deg(P)} \|P\|_{L^2(\mu)}\,; \tag{5}$$

(iii) *pour toute suite de polynômes P_j de degré tendant vers l'infini on a*

$$\limsup_{j\to\infty} \left(\frac{\|P_j\|_K}{\|P_j\|_{L^2(\mu)}} \right)^{1/\deg(P_j)} \leqslant 1. \tag{6}$$

Remarque 3.2. — L'étude de l'asymptotique des constantes M_d peut être également intéressante sur certains ensembles pluripolaires : par exemple si K est un sous-ensemble relativement non polaire dans une courbe transcendante, alors M_d est une mesure du degré de transcendance de cette courbe (voir [24, 22]).

Nous allons donner des conditions suffisantes pour que la propriété de Bernstein-Markov soit satisfaite. L'idée est que la mesure μ ne doive pas être trop singulière (§3.2) et/ou qu'elle « remplisse bien » K au sens de la théorie du pluripotentiel (§3.3). Une observation intéressante de Bloom et Levenberg est que tout compact de $\mathbb{C}^n$ porte une mesure de Bernstein-Markov (voir [16, Cor 3.7] ; de manière un peu surprenante la mesure construite par Bloom et Levenberg est atomique).

3.2. Un critère de densité pour Bernstein-Markov. — Rappelons qu'un compact de $\mathbb{C}^n$ est dit régulier si sa fonction extrémale V_K est continue. Le résultat suivant est tiré de [17] :

PROPOSITION 3.3. — *Soit K un compact de $\mathbb{C}^n$ régulier au sens de la théorie du pluripotentiel et μ une mesure de probabilité telle que $K = \operatorname{Supp}(\mu)$. On suppose que μ satisfait la condition suivante :*

$$\text{il existe } C > 0 \text{ et } \alpha > 0 \text{ telles que pour tout } z \in K, \text{ on a } \mu(B(z,r)) \geqslant Cr^\alpha.$$

Alors μ satisfait la condition de Bernstein-Markov.

Démonstration. — Fixons $\varepsilon > 0$. Comme V_K est continue il existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tel que si $d(y,K) \leqslant 2\delta$ on a $V_K(y) \leqslant \varepsilon$. Soit P un polynôme de degré d, et fixons $x \in K$ tel que $|P(x)| = \|P\|_K$.

Affirmation : *pour $r = \delta e^{-d\varepsilon}/4$, pour tout $y \in B(x,r)$, on a*

$$|P(y)| \geqslant \frac{1}{2}|P(x)| = \frac{1}{2}\|P\|_K .$$

En effet par l'inégalité de Bernstein-Walsh (1) et les estimées de Cauchy on a

$$\|\nabla P\|_{B(x,\delta)} \leqslant \frac{2}{\delta}\|P\|_{B(x,2\delta)} \leqslant \frac{2}{\delta}\|P\|_K e^{d\|V_K\|_{B(x,2\delta)}} \leqslant \frac{2}{\delta}|P(x)|e^{d\varepsilon}$$

et donc pour tout $y \in B(x,r)$ on a

$$|P(y) - P(x)| \leqslant \frac{2r}{\delta}|P(x)|e^{d\varepsilon} \leqslant \frac{|P(x)|}{2},$$

d'où le résultat.

Minorons maintenant la norme L^2 de P sur $B(x,r)$ en utilisant l'hypothèse de densité locale faite sur μ :

$$\|P\|_{L^2(\mu)} \geqslant \left(\int_{B(x,r)} |P(y)|^2 \, d\mu(y)\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant (Cr^\alpha)^{\frac{1}{2}}\frac{|P(x)|}{2} = \frac{C^{\frac{1}{2}}\delta^{\frac{\alpha}{2}}}{2^\alpha}e^{-\frac{\alpha}{2}d\varepsilon}\|P\|_K ,$$

ce qui est exactement une inégalité de type (5), et le résultat est ainsi démontré. □

Ce type d'estimation pour la densité locale d'une mesure est très courant en dynamique, et plus généralement dans le cas de mesures portées par des ensembles fractals. Il est en fait trop restrictif de demander que l'hypothèse $\mu(B(z,r)) \geqslant Cr^\alpha$ soit vraie pour tout $z \in K$, il suffit qu'elle soit vraie sur un ensemble de capacité pleine [17, Thm 3.4].

3.3. Mesures déterminantes. — Le concept suivant remonte semble-t-il à Ullman [50].

DÉFINITION 3.4. — *Soit K un compact non pluripolaire de $\mathbb{C}^n$ et μ une mesure finie sur K. On dit que μ est déterminante pour K si pour tout borélien $E \subset K$ de mesure totale on a $V_E^* = V_K^*$.*

Remarquer que cette notion ne dépend que de la classe de la mesure μ. L'existence de mesure déterminante est intimement liée à la régularité au sens de la théorie du pluripotentiel, comme l'indiquent les deux résultats suivants.

LEMME 3.5. — *Si K est un compact de $\mathbb{C}^n$ et μ est une mesure déterminante sur K ne chargeant pas les polaires, alors K est régulier.*

Démonstration. — Observons d'abord que si V est une fonction psh telle que $V \leqslant 0$ μ-p.p, alors $V \leqslant 0$ sur K. En effet, si l'on pose $E = \{V \leqslant 0\} \cap K$ on a $V \leqslant V_E$ donc $V \leqslant V_K$ car μ est déterminante, et finalement $V \leqslant 0$ sur K. Ensuite, l'ensemble $\{V_K < V_K^*\}$ est pluripolaire, donc $E := \{V_K^* \leqslant 0\}$ est un borélien de μ-mesure totale, donc d'après l'observation précédente on a $V_K^* \leqslant 0$ sur K, qui est la définition de la régularité. □

Un exemple important de mesure déterminante est la mesure d'équilibre :

PROPOSITION 3.6. — *Soit K un compact non pluripolaire de $\mathbb{C}^n$. Alors K est régulier si et seulement si sa mesure d'équilibre μ_K est déterminante.*

Démonstration. — Supposons K régulier. Soit E un borélien tel que $\mu_K(E) = 1$. Comme $V_E \leqslant 0$ sur E et $\{V_E < V_E^*\}$ est pluripolaire, on voit que $V_E^* \leqslant 0$ μ_K-p.p. Le principe de domination (théorème 2.6) implique alors que $V_E^* \leqslant V_K^* = V_K$. Comme l'inégalité inverse est vraie par définition, on conclut $V_E^* = V_K^*$, i.e. μ_K est déterminante.

La réciproque découle du lemme précédent. □

Le théorème suivant est dû à Siciak [44] et une nouvelle démonstration est donnée dans [12]. La preuve ci-dessous est inspirée de [13].

THÉORÈME 3.7. — *Soit K un compact de $\mathbb{C}^n$ et μ une mesure déterminante pour K ne chargeant pas les pluripolaires. Alors μ satisfait la propriété de Bernstein-Markov.*

LEMME 3.8. — *Soit (P_j) une suite de polynômes dont le degré tend vers l'infini. Sous les hypothèses du théorème 3.7, pour tout $z \in \mathbb{C}^n$ on a*

$$\limsup_{j\to\infty} \frac{1}{\deg(P_j)} \log \frac{|P_j(z)|}{\|P_j\|_{L^2(\mu)}} \leqslant V_K(z). \tag{7}$$

Démonstration. — Quitte à remplacer P_j par $\frac{P_j}{\|P_j\|_{L^2(\mu)}}$ on peut supposer que $\|P_j\|_{L^2(\mu)} = 1$. Supposons que pour un $z_0 \in \mathbb{C}^n$ l'inégalité (7) soit violée. On a donc une extraction $(\varphi(j))$ telle que

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{\deg(P_{\varphi(j)})} \log \left|P_{\varphi(j)}(z_0)\right| > V_K(z_0). \tag{8}$$

Le résultat suivant est une conséquence facile du lemme de Borel-Cantelli.

LEMME 3.9. — *Si* (f_k) *est une suite bornée dans* $L^1(\mu)$ *et* (m_k) *est une suite réelle tendant vers l'infini, il existe une sous-suite telle que* $\limsup_k |f_{n_k}|^{1/m_{n_k}} \leqslant 1$ *μ-p.p.*

Si on applique le lemme à la suite $(P_{\varphi(j)})$ qui est bornée dans $L^2(\mu)$ donc dans $L^1(\mu)$ et à $(m_{\varphi(j)}) = (\deg(P_{\varphi(j)}))$ on obtient une sous-suite $(\psi(j))$ extraite de $(\varphi(j))$ telle que

$$\limsup_{j\to\infty} \frac{1}{\deg(P_{\psi(j)})} \log \left|P_{\psi(j)}\right| \leqslant 0 \quad \mu\text{-p.p.} \tag{9}$$

Posons

$$v = \limsup_{j\to\infty} \frac{1}{\deg(P_{\psi(j)})} \log \left|P_{\psi(j)}\right|.$$

D'après (9) on a $v \leqslant 0$ μ-p.p. donc d'après le théorème 2.5, v^* appartient à $\mathcal{L}$. Comme $\{v < v^*\}$ est pluripolaire on a ainsi également $v^* \leqslant 0$ μ-p.p. Alors si l'on pose $E = \{z \in K, v^*(z) \leqslant 0\}$ on a donc $\mu(E) = \mu(K)$ et $v^* \leqslant V_E$. Mais comme d'après le lemme 3.5 K est régulier et μ est déterminante on a $V_K^* = V_K \leqslant V_E \leqslant V_E^* = V_K^*$. Finalement, $v(z_0) \leqslant V_E(z_0) \leqslant V_K(z_0)$ ce qui contredit (8). □

Démonstration du théorème. — Soit (P_j) une suite de polynômes dont le degré tend vers l'infini et posons

$$u_j = \frac{1}{\deg(P_j)} \log \frac{|P_j(z)|}{\|P_j\|_{L^2(\mu)}}.$$

D'après le lemme précédent la suite (u_j) est localement uniformément majorée (sinon on aurait une sous-suite tendant uniformément vers $+\infty$, contredisant (7)), donc on peut en extraire des sous-suites convergentes dans L^1_{loc}. Si (u_{j_k}) est une telle sous-suite, et u sa limite dans L^1_{loc}, on a $u = (\limsup_k u_{j_k})^*$ et $u = \limsup_k u_{j_k}$ hors d'un polaire, donc $u \leqslant V_K$ hors d'un polaire et donc partout. Finalement d'après le lemme de Hartogs on a $\limsup_k \sup_K u_{j_k} \leqslant 0$. Comme ceci est vrai pour toute sous-suite (j_k), on conclut que $\limsup_j \sup_K u_j \leqslant 0$, c'est-à-dire

$$\limsup_{j\to\infty} \left(\frac{\|P_j\|_K}{\|P_j\|_{L^2(\mu)}} \right)^{1/\deg(P_j)} \leqslant 1,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

3.4. Une application : équidistribution des zéros de polynômes aléatoires

En guise d'interlude, nous présentons un joli résultat d'équidistribution pour une classe de polynômes aléatoires, dû à Bloom et Shiffman [18], qui est beaucoup plus simple que l'équidistribution des points de Fekete, et sera l'occasion d'évoquer quelques idées utiles. Il s'agit d'une proche variante de travaux récemment exposés dans ce séminaire par N. Anantharaman [2].

Pour tout $n \geqslant 1$, considérons l'espace $\mathcal{P}_k$ des polynômes de degré $\leqslant k$ muni de la structure hermitienne induite par la norme $L^2(\mu)$. C'est un espace hermitien de dimension complexe $N_k = \binom{n+k}{k}$. Fixons une base orthonormale (p_j) de cet espace, par exemple l'orthonormalisée de la base des monômes $(e_\alpha)_{|\alpha|\leqslant d}$ ordonnés lexicographiquement comme au §2.3. On peut alors définir des polynômes aléatoires gaussiens par $p = \sum_{j=1}^{N_k} c_j p_j$, où les c_j sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On notera γ_k la loi gaussienne correspondante sur $\mathcal{P}_k$, qui ne dépend pas de (p_j). On définit ainsi une suite de mesures de probabilité $\mathbb{P}_k$ sur l'espace des polynômes à n variables.

Si f est un polynôme de degré d on note Z_f l'hypersurface $\{f = 0\}$ et si $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ est un n-uplet de polynômes de degré k, on note $Z_\mathbf{f} = Z_{f_1} \cap \dots \cap Z_{f_n}$. Le théorème de Bertini implique que presque sûrement cette intersection est transverse et donc $Z_\mathbf{f}$ est un ensemble de k^n points (sans multiplicité). Rappelons que $[Z_\mathbf{f}]$ désigne la somme des masses de Dirac en ces points. Finalement nous noterons $\mathbb{E}_k([Z_\mathbf{f}])$ l'espérance de cette mesure lorsque $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ est un n-uplet de polynômes indépendants de loi γ_k.

Théorème 3.10 (Bloom-Shiffman). — *Soit μ une mesure de probabilité à support compact $K \subset \mathbb{C}^n$, ne chargeant pas les pluripolaires. On suppose que K est un compact régulier de $\mathbb{C}^n$ et que μ satisfait la propriété de Bernstein Markov.*

Alors quand k tend vers l'infini $\frac{1}{k^n}\mathbb{E}_k([Z_\mathbf{f}])$ converge vers la mesure d'équilibre μ_K. En outre, si $(\mathbf{f}_k)$ est une suite de n-uplets de polynômes aléatoires de degré k, indépendants et de lois respectives $\gamma_k^{\otimes n}$, alors presque sûrement on a $\frac{1}{k^n}[Z_{\mathbf{f}_\mathbf{k}}] \to \mu_K$.

En dimension 1, ce théorème couvre nombre de familles classiques de polynômes aléatoires (voir [2]). On a également un énoncé valable en codimension intermédiaire : $\frac{1}{k^q}\mathbb{E}_k([Z_{f_{k,1}} \cap \dots \cap Z_{f_{k,q}}])$ converge vers $(dd^c V_K)^q$ pour $1 \leqslant q \leqslant n$.

La deuxième assertion du théorème découle du calcul de l'espérance asymptotique et d'un calcul de variance général (voir Shiffman [42]), donc nous nous concentrons sur la première assertion.

La première étape de la preuve est un renforcement du théorème 2.3. Soit

$$\Phi_{K,k}(z) := \sup\left\{ |P(z)|^{1/k}, P \in \mathcal{P}_k,\ \|P\|_K \leqslant 1 \right\}.$$

Lemme 3.11. — *Si K est un compact régulier, la suite $\frac{1}{k}\log \Phi_{K,k}$ converge uniformément sur les compacts vers V_K quand k tend vers l'infini.*

Démonstration. — Les $\Phi_{K,k}$ sont des fonctions sci, qui convergent en croissant vers la fonction continue V_K. Le résultat découle alors du premier théorème de Dini. $\square$

On forme alors le *noyau de Bergman*[3]

$$S_k(z,w) = \sum_{j=1}^{N_k} p_j(z)\overline{p_j(w)}.$$

Il est bien connu que S_k est le noyau associé à l'évaluation en z, i.e. on a la formule

$$\forall f \in \mathcal{P}_k, \forall z \in \mathbb{C}^n,\ f(z) = \int S_k(z,w) f(w) d\mu(w)$$

qui se vérifie très simplement. Le lien entre S_k et les polynômes aléatoires est le suivant :

Lemme 3.12. — *Pour tout $k \geqslant 1$ et tout $1 \leqslant q \leqslant n$ on a*

$$\mathbb{E}_k([Z_{f_1} \cap \cdots \cap Z_{f_q}]) = \left(dd^c \log \left(S_k(z,z)^{1/2}\right)\right)^q.$$

Démonstration. — Supposons d'abord que $q = 1$. On écrit $f = \sum_{j=1}^{N_k} c_j p_j$, où les c_j sont des gaussiennes centrées réduites. Ainsi pour tout z on a

$$\mathbb{E}\left(\log |f(z)|\right) = \int \log \left| \sum_{j=1}^{N_k} c_j p_j(z) \right| d\gamma(c). \tag{10}$$

Dans $\mathbb{C}^{N_k}$ on a la formule

$$\int \log \left| \sum_{j=1}^{N_k} c_j x_j \right| d\gamma(c) = \log \|x\|,$$

où la norme du membre de droite est la norme euclidienne. En effet si u désigne le membre de gauche, c'est une fonction psh invariante par rotation, donc une fonction convexe de $\log \|x\|$, et comme on a par ailleurs $u(\lambda x) = \log \lambda + u(x)$ on conclut que $u(x) = \log \|x\|$ (voir également la formule de Crofton dans [26, III.7]). En appliquant (10) on en déduit que

$$\mathbb{E}\left(\log |f(z)|\right) = \log \left(\sum_{j=1}^{N_k} |p_j(z)|^2 \right)^{1/2}.$$

En prenant le dd^c et en appliquant la formule de Lelong-Poincaré, on conclut que

$$\mathbb{E}([Z_f]) = dd^c \log \left(S_k(z,z)^{1/2}\right)$$

comme annoncé.

Pour les autres valeurs de q, on utilise le cas $q = 1$ et on raisonne par récurrence en écrivant

$$\mathbb{E}_k([Z_{f_1} \cap \cdots \cap Z_{f_{q+1}}]) = \mathbb{E}_k([Z_{f_1} \cap \cdots \cap Z_{f_q}] \wedge [Z_{f_{q+1}}]) = \mathbb{E}_k([Z_{f_1} \cap \cdots \cap Z_{f_q}]) \wedge \mathbb{E}_k([Z_{f_{q+1}}])$$

3. Étonnamment Bloom et Shiffman l'appellent noyau de Szegö.

où la première égalité vient de ce que génériquement les Z_{f_j} sont transverses et la deuxième provient de l'indépendance des f_j et du théorème de Fubini. $\square$

Le dernier lemme fait le lien entre les $\Phi_{K,n}$ (liés à la structure uniforme) et les S_k (associés à $L^2(\mu)$).

Lemme 3.13. — *Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $C(\varepsilon)$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}^n$ on a*

$$\frac{1}{N_k} \leqslant \frac{S_k(z,z)}{\Phi_{K,k}(z)^2} \leqslant C(\varepsilon)(1+\varepsilon)^{2k} N_k.$$

Démonstration. — Soit $f \in \mathcal{P}_k$ tel que $\|f\|_K \leqslant 1$. Alors pour tout $z \in K$ on a

$$\begin{aligned}
|f(z)| = \left| \int S_k(z,w) f(w) d\mu(w) \right| &\leqslant \int |S(z,w)|\, d\mu(w) \\
&\leqslant S_k(z,z)^{1/2} \int S(w,w)^{1/2} d\mu(w) \\
&\leqslant S_k(z,z)^{1/2} \left(\int S(w,w) d\mu(w) \right)^{1/2} = S_k(z,z)^{1/2} (N_k)^{1/2}.
\end{aligned}$$

En prenant le sup en f on obtient bien $\Phi_{K,k}(z) \leqslant S_k(z,z)^{1/2}(N_k)^{1/2}$.

Pour l'inégalité de droite on applique l'inégalité de Bernstein-Markov aux vecteurs de base p_j : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $C(\varepsilon)$ telle que

$$\|p_j\|_K \leqslant C(\varepsilon)(1+\varepsilon)^k \|p_j\|_{L^2(\mu)} = C(\varepsilon)(1+\varepsilon)^k.$$

Comme $\frac{|p_j(z)|}{\|p_j\|_K} \leqslant \Phi_{K,k}(z)$ par définition de $\Phi_{K,k}$, on en déduit que

$$|p_j(z)| \leqslant C(\varepsilon)(1+\varepsilon)^k \Phi_{K,k}(z) \text{ et donc } S(z,z) \leqslant N_k C(\varepsilon)^2 (1+\varepsilon)^{2k} \Phi_{K,k}(z)^2$$

qui est l'inégalité voulue. $\square$

Démonstration du théorème 3.10. — On déduit des lemmes 3.11 et 3.13 que $\frac{1}{2k} \log S_k(z,z)$ converge uniformément sur les compacts vers V_K. Comme le produit extérieur des courants est continu pour la convergence uniforme de leurs potentiels, en utilisant le lemme 3.12 on obtient que

$$\frac{1}{k^n} \mathbb{E}_k([Z_{\mathbf{f}}]) = \left(\frac{1}{2k} dd^c \log S_k(z,z) \right)^n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} (dd^c V_K)^n = \mu_K$$

ce qui conclut la preuve. $\square$

4. FIBRÉS POSITIFS ET THÉORIE GLOBALE DU PLURIPOTENTIEL

4.1. Cadre et définitions

4.1.1. — Soit X une variété complexe compacte de dimension n, munie d'un fibré en droites L. Pour fixer les idées, donnons-nous une métrique lisse de référence $h_0 = |\cdot|_{h_0}$ sur ce fibré. Si s est une trivialisation locale de L, on peut écrire $|s|_{h_0} = e^{-\phi_0}$ où $\phi_0 : X \to \mathbb{R}$ et la $(1,1)$ forme $dd^c\phi_0$ ne dépend pas du choix de s, donc a un sens global sur X : c'est la *forme de courbure* Θ_{h_0} de la métrique. La fonction ϕ_0 s'appelle le *poids* de la métrique (4). Si h' est une autre métrique alors $\frac{|\cdot|_{h'}}{|\cdot|_{h_0}} = e^{-u}$ où u est une fonction globalement définie sur X et donc $\Theta_h - \Theta_{h_0} = dd^c u$. Ainsi la classe de cohomologie $\{\Theta_{h_0}\} \in H^2(X,\mathbb{R})$ ne dépend pas de la métrique et la normalisation du dd^c fait que celle-ci appartient naturellement à $H^2(X,\mathbb{Z})$: c'est la *première classe de Chern* de L.

On voit que h_0 étant fixée, l'ensemble des autres métriques s'identifie à un espace vectoriel de fonctions sur L. Nous serons naturellement amenés à considérer des métriques singulières, où la fonction u est de classe L^1_{loc}. Un cas particulièrement intéressant est celui où le courant de courbure de ces métriques est positif : on parle de métrique *semi-positive.* Ceci mène naturellement à la définition suivante : soit θ une $(1,1)$-forme lisse sur X . Une fonction φ de classe L^1_{loc} sur X est dite θ-psh si elle est scs et $\theta + dd^c\varphi \geqslant 0$ au sens des courants. Ces fonctions héritent de la plupart des propriétés des fonctions psh. On notera $\mathrm{PSH}(X,\theta)$ l'ensemble des fonctions θ-psh. En particulier, on a la propriété de compacité suivante : une famille normalisée de fonctions ω-psh est compacte dans L^1_{loc}. La normalisation peut être donnée par $\sup_X \varphi = 0$, ou bien $\int \varphi d\mu = 0$, où μ est une mesure « raisonnable ».

4.1.2. — Un exemple fondamental est celui du fibré $\mathcal{O}(1)$ sur l'espace projectif $\mathbb{P}^n$, qui est le dual du fibré tautologique induit par la projection $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n$. On peut aussi le décrire de la manière suivante : on se donne un système de coordonnées homogènes $[z_0 : \cdots : z_n]$ et sur l'ouvert de carte $U_i = \{z_i \neq 0\} \simeq \mathbb{C}^n$ une section de $\mathcal{O}(1)$ est donnée par une expression de la forme $P_i(z_0/z_i, \ldots, z_n/z_i)$ où les P_i satisfont les relations de compatibilité

$$\forall i,j,\ \ z_i P_i(z_0/z_i, \ldots, z_n/z_i) = z_j P_j(z_0/z_j, \ldots, z_n/z_j).$$

On voit que ces données se recollent en un unique polynôme homogène de degré 1 sur $\mathbb{C}^{n+1}$ et également qu'un polynôme de degré au plus 1 dans $\mathbb{C}^n$ peut être vu comme la restriction d'une section de $\mathcal{O}(1)$ au complémentaire d'un hyperplan. De même l'espace des sections de $\mathcal{O}(k) = \mathcal{O}(1)^{\otimes k}$ s'identifie naturellement à l'espace des polynômes homogènes de degré k en $n+1$ variables, ou à celui des polynômes de degré au plus k dans une carte affine.

---

4. Qui n'est bien sûr pas une fonction bien définie. Nous n'adopterons pas le formalisme des poids utilisé dans [10] et [12] et tâcherons de définir les objets directement en termes de métriques.

Un calcul explicite montre que le poids $\phi_0(z) = \log(1+|z|^2)$ sur $\mathbb{C}^n$ définit une métrique h_0 sur $\mathcal{O}(1)|_{\mathbb{C}^n}$ qui s'étend à $\mathbb{P}^n$ en une métrique lisse et (strictement) positive sur $\mathcal{O}(1)$ (dont la courbure est la forme de Fubini-Study). Si maintenant on considère une métrique h semi-positive arbitraire sur $\mathcal{O}(1)$, alors on a $h = h_0 e^{-\varphi}$ où φ est une fonction scs sur $\mathbb{P}^n$ et Θ_{h_0}-psh. Dans la carte $\mathbb{C}^n$ on obtient donc une fonction psh $\psi := \varphi + \log(1 + |\cdot|^2)$ telle que $\psi(z) \leqslant \log(1 + |z|^2) + O(1)$ à l'infini, c'est-à-dire une fonction de $\mathcal{L}$. (Remarquer que si φ est continue alors $\psi \in \mathcal{L}^+$.) Réciproquement si $\psi \in \mathcal{L}$ alors $\varphi = \psi - \log(1 + |\cdot|^2)$ s'étend à travers l'hyperplan à l'infini en une fonction Θ_{h_0}-psh, et définit donc une métrique semi-positive sur $\mathcal{O}(1)$. L'étude des métriques semi-positives sur $(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1))$ est donc équivalente à celle de la classe $\mathcal{L}$.

4.1.3. — L'espace des sections $H^0(X, L)$ de L est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $h^0(X, L)$, et le taux de croissance de $h_0(X, L^k)$ est une caractéristique importante de L (nous notons classiquement $L^k := L^{\otimes k}$). Par exemple

$$h^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(k)) = \dim(\mathcal{P}_k(\mathbb{C}^n)) = \binom{k+n}{k} \sim \frac{k^n}{n!}.$$

On dit que L est *gros* si ce taux de croissance est maximal, c'est-à-dire de l'ordre de $k^{\dim(X)}$. Dans ce cas le *volume* de L est défini par

$$\mathrm{vol}(L) = \limsup_{k\to\infty} \frac{n!}{k^n} h^0(X, L^k) > 0.$$

C'est le cadre dans lequel travaillent Berman, Boucksom et Witt Nyström dans [10, 12].

Un thème classique en géométrie complexe est de lier la croissance de $h^0(X, L^k)$ et les propriétés de positivité de L. On dit que L est *positif*[(5)] s'il admet une métrique lisse h dont la forme de courbure Θ_h est définie positive (en tout point) : c'est alors une *forme de Kähler*. Un fibré positif est gros et dans ce cas $\mathrm{vol}(L) = \int c_1(L)^n = \int_X \Theta_h^n$. Si L admet des sections et $(s_1, \ldots, s_N)$ désigne une base de $H^0(X, L)$, on définit une application méromorphe

$$\iota_L : x \mapsto [s_1(x) : \cdots : s_N(x)] \in \mathbb{P}(H^0(X, L))$$

qui ne dépend que de L à transformations projectives près. Le théorème de plongement de Kodaira (voir [26, Chap. VII]) affirme que L est positif si et seulement si ι_{L^k} est un plongement pour k assez grand (i.e. L est *ample* au sens de la géométrie algébrique). Remarquer que le sens réciproque est facile : si ι_{L^k} est un plongement, alors L^k est isomorphe via $\iota_{L^k}^*(\mathcal{O}(1))$ qui est positif, et si h est une métrique positive sur L^k, alors $h^{1/k}$ est une métrique positive sur L.

Un théorème fameux de Tian [47] affirme que le plongement de Kodaira est asymptotiquement isométrique, au sens suivant : si (L, h) est ample, la métrique h induit une

5. Il y a ici une incohérence entre les terminologies française et anglo-saxonne relatives à la positivité. Nous préférerons dans la suite le vocable « ample » pour éviter les confusions.

structure hermitienne sur $H^0(X,L)$ dont la norme associée est $\|s\|^2 = \int_X |s(x)|_h^2\, \Theta_h^n$. Pour tout $k \geqslant 1$, h^k est une métrique positive sur L^k, donc il en est de même pour $H^0(X,L^k)$. Choisissons maintenant pour tout k une base orthonormale de $H^0(X,L^k)$ et soit ι_k le plongement associé $\iota_k : X \to \mathbb{P}(H^0(X,L))$. Sur $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ on a la forme de Fubini-Study ω_{FS} définie en coordonnées homogènes par $\omega_{\mathrm{FS}} = dd^c \log|z|$.

Théorème 4.1 (Tian). — *Avec les notations précédentes, on a* $\dfrac{1}{k}\iota_k^*(\omega_{\mathrm{FS}}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \Theta_h$.

Supposons maintenant que L est gros. Il admet alors une métrique *singulière* telle que Θ_h domine une forme strictement positive, et pour k grand les applications ι_{L^k} sont biméromorphes (mais pas holomorphes car sinon L serait ample). Ces singularités correspondent au *lieu base* où toutes les sections s'annulent. Une motivation importante pour travailler dans ce cadre est que cette propriété est invariante par modification propre, et permet donc par résolution des singularités de traiter le cas de variétés singulières. En contrepartie la théorie du pluripotentiel des métriques sur les fibrés gros est sensiblement plus délicate car on y est naturellement amené à travailler avec des poids non bornés. Nous ne nous attarderons pas sur ces difficultés et discuterons essentiellement dans la suite le cas ample.

4.1.4. — Nous allons maintenant généraliser à ce contexte certaines idées du § 2.2. Supposons pour le moment que L est ample et fixons une fois pour toutes une métrique lisse h_0 sur L dont la forme de courbure ω est définie positive (c'est donc une forme de Kähler). Soit K un sous-ensemble *non pluripolaire* de X (en général supposé compact) et h une métrique continue sur $L|_K$. Nous parlerons dans ce cas de *compact pondéré*. Alors $h = h_0 e^{-Q}$ sur K et on définit la fonction extrémale pondérée

$$(P_{K,\omega}Q)(x) = \sup\{u(x),\ u \in \mathrm{PSH}(X,\omega), u|_K \leqslant Q\}. \tag{11}$$

Il faut penser $(P_{K,\omega}Q)^*$ comme une projection : $C^0(K) \to \mathrm{PSH}(X,\omega)$ (en particulier si $K = X$ et Q est ω-psh alors $P_{X,\omega}Q = Q$). En général nous supprimerons la mention de ω dans la notation. La discussion du 4.1.2 montre que cette définition étend celle de la fonction extrémale pondérée $V_{K,Q}$ dans $\mathbb{C}^n$. Cette fonction dépend du choix de h_0 mais on vérifie simplement que $\omega + dd^c(P_K Q)$ ne dépend que de h. On voit également que le cadre pondéré s'impose ici naturellement puisque le cas $Q = 0$ n'a pas de signification particulière.

La régularisée semi-continue $P_K^* Q$ est ω-psh et bornée. En effet elle est minorée car si on fixe une fonction ω-psh lisse u (il en existe car L est ample) on a $(u - C)|_K \leqslant Q$ pour un certain C. Elle est majorée car la borne $u|_K \leqslant Q$ sur un ensemble non polaire implique une borne supérieure uniforme (ceci découle des propriétés locales des fonctions psh, cf. le theorème 2.5). On dit que (K,Q) est régulier si $P_K Q = P_K Q^*$ et que K est régulier s'il est régulier pour tout poids Q continu. Dans le cas ample une fonction ω-psh est limite décroissante de fonctions ω-psh lisses, donc on peut choisir des compétiteurs continus dans (11) et il suit que $P_K Q$ est également sci, donc continue.

Voici quelques propriétés simples à établir.

LEMME 4.2. — *L'application $Q \mapsto P_K^* Q$ est croissante, concave, et Lipschitz pour la norme uniforme :*

$$\|P_K^* Q_1 - P_K^* Q_2\|_X \leqslant \|Q_1 - Q_2\|_K . \tag{12}$$

On définit la mesure d'équilibre $\mu_{\mathrm{eq}}(K,h)$ par

$$\mu_{\mathrm{eq}}(K,h) = \frac{1}{\mathrm{vol}(L)} (\omega + dd^c P_K^* Q)^n = \mathrm{MA}_\omega(P_K^* Q)$$

où MA_ω (ou plus simplement MA) est l'opérateur de Monge-Ampère complexe associé à (L, h_0), c'est-à-dire que $\mathrm{MA}_\omega(\varphi) = (\omega + dd^c\varphi)^n$.

L'ingrédient principal du lemme suivant est le théorème 2.1 :

LEMME 4.3. — *La mesure $\mu_{\mathrm{eq}}(K,h)$ est une mesure de probabilité à support dans K et on a $P_K^* Q = Q$, $\mu_{\mathrm{eq}}(K,h)$-p.p.*

4.1.5. — Si L est seulement gros on peut poser les mêmes définitions, mais plusieurs difficultés techniques apparaissent, liées au fait que la fonction $P_K^* Q$ n'a plus de raison d'être localement minorée. En particulier pour définir l'opérateur de Monge-Ampère on commence par le définir sur le lieu où $P_K^* Q$ est localement bornée, et on l'étend trivialement à travers les pôles. Il faut alors montrer que la masse totale a la valeur attendue, à savoir $\mathrm{vol}(L)$: ceci a été fait dans [20] (voir l'exposé de J.-P. Demailly [27] pour une présentation succincte).

4.2. Énergie à l'équilibre

4.2.1. *Définitions.* — Supposons toujours L ample et soit ω la forme de courbure d'une métrique lisse positive h_0 sur L. Si φ est une fonction ω-psh localement bornée on pose

$$\mathcal{E}_\omega(\varphi) = \mathcal{E}(\varphi) = \frac{1}{(n+1)\,\mathrm{vol}(L)} \sum_{j=0}^{n} \int_X \varphi(\omega + dd^c\varphi)^j \wedge \omega^{n-j}.$$

$\mathcal{E}$ est par définition l'*énergie de Monge-Ampère*. C'est une fonctionnelle qui apparaît sous diverses formes en géométrie kählerienne. Elle a les propriétés suivantes (voir [27]) :

PROPOSITION 4.4. — (i) *$\mathcal{E}$ est une primitive de l'opérateur de Monge-Ampère au sens suivant : si φ et ψ sont des fonctions ω-psh bornées alors*

$$\left.\frac{d}{dt}\mathcal{E}(\varphi + t(\psi - \varphi))\right|_{t=0} = \int (\psi - \varphi)\mathrm{MA}(\varphi).$$

(ii) *Sous les mêmes hypothèses, on a*

$$\mathcal{E}(\psi) - \mathcal{E}(\varphi) = \frac{1}{(n+1)\,\mathrm{vol}(L)} \sum_{j=0}^{n} \int_X (\psi - \varphi)(\omega + dd^c\varphi)^j \wedge (\omega + dd^c\psi)^{n-j}.$$

(iii) $\mathcal{E}$ *est concave et croissante.*

(iv) $\mathcal{E}(\varphi + c) = \mathcal{E}(\varphi) + c$.

Replaçons-nous maintenant dans le cadre du §4.1.4. Avec les mêmes notations on définit *l'énergie à l'équilibre* du compact pondéré (K, h) par

$$\mathcal{E}_{\mathrm{eq}}(K, h) = \mathcal{E}(P_K Q^*).$$

Cette quantité dépend du choix de h_0 mais la formule *(ii)* de la proposition précédente montre que si (K_1, h_1) et (K_2, h_2) sont deux tels compacts, la *différence* $\mathcal{E}_{\mathrm{eq}}(K_2, h_2) - \mathcal{E}_{\mathrm{eq}}(K_1, h_1)$ est intrinsèquement définie.

Tous ces résultats s'étendent au cas de fibrés gros, modulo un certain nombre de difficultés techniques (à commencer par la définition de $\mathcal{E}$).

4.2.2. *Différentiabilité.* — Le premier résultat principal de [10] est la différentiabilité au sens de Gâteaux (c'est-à-dire dans toutes les directions) de $\mathcal{E} \circ P_K^*$. C'est un analogue complexe d'un théorème d'Alexandrov en géométrie convexe [1]. Noter que ce résultat est non trivial car P_K n'est en général pas différentiable. Il est la clef de la plupart des résultats des sections suivantes, et a également trouvé de nombreuses applications en géométrie kählerienne (notamment dans les travaux de Berman, Boucksom, Guedj et Zeriahi [11], voir [27]).

Théorème 4.5 (Berman-Boucksom). — *Avec les notations précédentes, l'application* $Q \mapsto \mathcal{E}(P_K^* Q)$ *est Gâteaux différentiable sur l'espace des poids continus. Plus précisément, si* Q *et* v *sont des fonctions continues sur* K *on a*

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{E} \circ P_K^*(Q + tv))\bigg|_{t=0} = \int v \,\mathrm{MA}(P_K^* Q).$$

Démonstration. — Nous suivons ici Lu et Nguyen (voir [38, Lemma 6.13]) qui ont grandement simplifié la démonstration originale. Comme d'habitude il est plus simple de se limiter au cas ample pour lequel fonctions extrémales sont continues et les définitions de MA et $\mathcal{E}$ ne posent pas de problèmes.

Observons d'abord que d'après le lemme 4.2 et la proposition 4.4, $\mathcal{E} \circ P_K^*$ est concave et continue donc elle admet des dérivées dans toutes les directions. Le point est donc d'identifier cette dérivée. Quitte à changer v en $-v$, il suffit de s'intéresser à la dérivée à droite. Par concavité de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}' = \mathrm{MA}$, pour $t > 0$ on a

$$\mathcal{E}(P_K^*(Q + tv)) - \mathcal{E}(P_K^*(Q)) \leqslant \int (P_K^*(Q + tv) - P_K^* Q) \,\mathrm{MA}(P_K^* Q).$$

Ensuite par le lemme 4.3 on a $P_K^*Q = Q$, $\mathrm{MA}(P_K^*Q)$-p.p., et par définition on a $P_K(Q + tv) \leqslant (Q + tv)$ sur K et donc $P_K^*(Q + tv) \leqslant (Q + tv)$ quasi-partout sur K, ainsi

$$\int (P_K^*(Q + tv) - P_K^*Q)\, \mathrm{MA}(P_K^*Q) \leqslant \int ((Q + tv) - Q)\, \mathrm{MA}(P_K^*Q) = t \int v\mathrm{MA}(P_K^*Q).$$

Toujours par concavité on a également

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(P_K^*(Q + tv)) - \mathcal{E}(P_K^*(Q)) &\geqslant \int (P_K^*(Q + tv) - P_K^*Q)\, \mathrm{MA}(P_K^*(Q + tv)) \\ &\geqslant \int ((Q + tv) - Q)\, \mathrm{MA}(P_K^*(Q + tv))\end{aligned}$$

où dans la deuxième inégalité on a utilisé de même $P_K^*(Q + tv) = Q + tv$ et $P_K^*Q \leqslant Q$ $\mathrm{MA}(P_K^*(Q + tv))$-p.p. Finalement,

$$\int v\mathrm{MA}(P_K^*Q)) \leqslant \frac{1}{t} \left(\mathcal{E}(P_K^*(Q + tv)) - \mathcal{E}(P_K^*(Q))\right) \leqslant \int v\mathrm{MA}(P_K^*(Q + tv))$$

et le résultat suit, car par le lemme 4.2 et la continuité de l'opérateur de Monge-Ampère pour la convergence uniforme on a $\mathrm{MA}(P_K^*(Q+tv)) \rightharpoonup \mathrm{MA}(P_K^*Q))$ quand t tend vers 0. □

4.3. Volume des boules dans les espaces de sections. — Les constantes de Tchebycheff définies aux §§ 1.2 et 2.2 peuvent être vues comme donnant des informations géométriques sur la boule unité de $(\mathcal{P}_k(\mathbb{C}^n), \|\cdot\|_K)$, qui asymptotiquement définissent la capacité. Nous allons ici nous intéresser au *volume* de cette boule unité. Comme il n'y a pas de normalisation naturelle pour la mesure de Haar sur $H^0(X, L^k)$, il sera plutôt question de *quotients* de volumes.

Soit comme précédemment K un compact non pluripolaire et h une métrique continue sur $L|_K$. Pour tout $k \geqslant 1$, h^k induit une métrique continue sur $L^k|_K$ et on peut définir une norme sur $H^0(X, L^k)$ par $\|s\|_{L^\infty(K,h^k)} = \sup_K |s|_{h^k}$. De même si μ est une mesure sur K ne chargeant pas les pluripolaires, on définit $\|s\|^2_{L^2(\mu,h^k)} = \int |s|^2_{h^k}\, d\mu$. À ces normes correspondent des boules unité respectives $B^\infty(K, h^k)$ et $B^2(\mu, h^k)$ dans $H^0(X, L^k)$.

Le deuxième théorème principal de [10] est le suivant.

Théorème 4.6 (Berman-Boucksom). — *Soient L un fibré gros sur une variété complexe X, et pour $j = 1, 2$, K_j un compact non pluripolaire et h_j une métrique continue sur K_j. Alors*

$$\frac{1}{2kh^0(X, L^k)} \log \frac{\mathrm{vol}(B^\infty(K_1, h_1^k))}{\mathrm{vol}(B^\infty(K_2, h_2^k))} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{E}_{\mathrm{eq}}(K_1, h_1) - \mathcal{E}_{\mathrm{eq}}(K_2, h_2). \tag{13}$$

De même si pour $j = 1, 2$, μ_j est une mesure de probabilité satisfaisant la propriété de Bernstein-Markov relativement à (K_j, h_j) on a

$$\frac{1}{2kh^0(X, L^k)} \log \frac{\mathrm{vol}(B^2(\mu_1, h_1^k))}{\mathrm{vol}(B^2(\mu_2, h_2^k))} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{E}_{\mathrm{eq}}(K_1, h_1) - \mathcal{E}_{\mathrm{eq}}(K_2, h_2). \tag{14}$$

Dans ces énoncés le volume est relatif à n'importe quelle mesure de Haar sur $H^0(X, L^k)$ et comme remarqué plus haut le quotient est bien défini. Comme à la section 3 on dit que μ a la *propriété de Bernstein-Markov relativement à* (K, h) s'il existe une suite (M_k) telle que pour toute section $s \in H^0(X, L^k)$ on a

$$\|s\|_{L^2(\mu,h^k)} \leqslant \|s\|_{L^\infty(K,h^k)} \leqslant M_k \|s\|_{L^2(\mu,h^k)} \text{ et } \lim_{k\to\infty} (M_k)^{1/k} = 1. \tag{15}$$

On a dans le cas global des critères analogues à ceux des §§ 3.2 et 3.3 (avec essentiellement les mêmes démonstrations) qui montrent que cette condition est fréquemment satisfaite. Par exemple la mesure d'équilibre de tout compact régulier muni d'un poids continu est de Bernstein-Markov, de même que toute mesure à densité continue et strictement positive sur X. Alors comme $\dim_{\mathbb{R}} H^0(X, L^k) = 2h^0(X, L^k)$ on en déduit que

$$\frac{1}{2kh^0(X, L^k)} \log \frac{\mathrm{vol}(B^\infty(K, h^k))}{\mathrm{vol}(B^2(\mu, h^k))} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

par conséquent les assertions (13) et (14) sont équivalentes.

4.3.1. *Noyau de Bergman.* — Soient L un fibré en droites sur X et h une métrique quelconque sur L ; on dispose donc de la métrique h^k sur L^k. Soit également μ une mesure de probabilité sur X. Elle induit une structure hermitienne sur $H^0(X, L^k)$ dont la norme associée est $\|s\|^2_{L^2(\mu,h^k)}$. Le noyau de Bergman associé est défini comme précédemment par $K(x, y) = \sum s_j(x) \otimes \overline{s_j(y)}$, où (s_j) est une base orthonormale quelconque de cet espace hermitien. C'est une section du fibré $L \boxtimes \overline{L}$ sur $X \times X$ (on rappelle que $L \boxtimes \overline{L} = \pi_1^* L \otimes \pi_2^* \overline{L}$, où π_1 et π_2 sont les projections naturelles de $X \times \overline{X}$). La *fonction de Bergman* associée à (X, L^k) est par définition

$$B_k(\mu, h) = \sum_{j=1}^{N_k} |s_j|^2_{h^k}$$

où l'on a noté $N_k = h^0(X, L^k)$. Un exercice très simple de géométrie hermitienne montre que $B_k(\mu, h)$ mesure la distortion ponctuelle de la norme $L^2(\mu, h^k)$, i.e. (le carré de) la norme de l'opérateur d'évaluation en x :

$$B_k(\mu, h)(x) = \sup_{s\in H^0(X,L^k)\setminus\{0\}} \frac{|s(x)|^2_h}{\|s\|^2_{L^2(\mu,h^k)}}.$$

On définit finalement la *mesure de Bergman* associée à (X, L^k) par :

$$\beta_k(\mu, h) = \frac{1}{N_k} B_k(\mu, h)\mu, \tag{16}$$

qui est clairement une mesure de probabilité. On a le théorème de convergence suivant, qui est en fait l'ingrédient technique principal du théorème 4.1.

Théorème 4.7. — *Si L est ample, h est une métrique lisse et positive sur L, et μ une mesure à densité lisse et strictement positive sur X, la suite des mesures de Bergman $\beta_k(\mu, h)$ converge faiblement vers $\frac{1}{\mathrm{vol}(L)}\Theta_h^n$.*

Noter la parenté de ce résultat avec les méthodes du §3.4. On constate également comme au théorème 3.10 que la limite ne dépend pas du choix (raisonnable) de μ. L'argument montre en effet la convergence en tout point en employant un argument de changement d'échelle qui gomme le choix de la mesure (lisse) de départ. On peut également observer que $\frac{1}{\mathrm{vol}(L)}\Theta_h^n = \mu_{\mathrm{eq}}(X, h)$. Sous cette forme l'énoncé se généralise comme suit :

Théorème 4.8 (Berman [6]). — *Si L est gros, h est une métrique lisse arbitraire sur L et μ une mesure à densité lisse et strictement positive sur X, la suite des mesures de Bergman $\beta_k(\mu, h)$ converge faiblement vers $\mu_{\mathrm{eq}}(X, h)$.*

4.3.2. *Démonstration du théorème 4.6.* — Supposons pour simplifier que L est ample et K est régulier. Observons d'abord qu'en prenant des différences, il suffit de montrer (13) et (14) dans le cas où $K_2 = X$, h_2 est lisse et (strictement) positive, et μ_2 est à densité lisse et strictement positive.

Observons qu'il existe une métrique semi-positive continue $h_{1,K}$ telle que pour tout $k \geqslant 0$ et toute section $s \in H^0(X, L^k)$ on a $\|s\|_{L^\infty(K,h_1^k)} = \|s\|_{L^\infty(K,h_{1,K}^k)}$. On peut alors remplacer (K_1, h_1) par $(X, h_{1,K})$ dans l'énoncé. En effet, avec les notations du § 4.1.4, h_0 étant une métrique auxiliaire positive fixée (par exemple h_2), notons $h_1 = h_0 e^{-Q}$. Si $s \in H^0(X, L)$, la fonction $\log |s|_{h_0}$ est ω-psh, donc par définition de la fonction extrémale si $|s|_{h_1} \leqslant c$ sur K on a $\log |s|_{h_0} - c \leqslant Q$ sur K et donc $\log |s|_{h_0} - c \leqslant P_K Q$ sur X. On en déduit que $\sup_K(\log |s|_{h_0} - Q) = \sup_X(\log |s|_{h_0} - P_K Q)$. Le raisonnement pour L^k est identique et il suffit donc de poser $h_{1,K} = h_0 e^{-P_K Q}$, qui est continue car K est supposé régulier.

On peut maintenant appliquer le théorème de régularisation de Richberg pour les fonctions psh continues (voir par exemple [26, I.5.E]), qui implique qu'il existe une suite de métriques lisses et strictement psh $(h_{1,j})$ convergeant uniformément vers $h_{1,K}$. On a alors par convergence uniforme

$$\mathcal{E}_{\mathrm{eq}}(X, h_{1,K}) = \mathcal{E}(X, h_{1,K}) = \lim_{j\to\infty} \mathcal{E}(X, h_{1,j}).$$

On se convainc par ailleurs aisément que

$$\frac{1}{2kh^0(X, L^k)} \log \frac{\mathrm{vol}(B^\infty(X, h_{1,K}^k))}{\mathrm{vol}(B^\infty(X, h_{1,j}^k))} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

uniformément par rapport à k. En effet si ε_j est une suite telle que $e^{-\varepsilon_j} \leqslant \frac{|\cdot|_{h_{1,j}}}{|\cdot|_{h_{1,K}}} \leqslant e^{\varepsilon_j}$, on a

$$e^{-k\varepsilon_j} B^\infty(X, h_{1,j}^k) \subset B^\infty(X, h_{1,K}^k) \subset e^{k\varepsilon_j} B^\infty(X, h_{1,j}^k)$$

et donc

$$-\varepsilon_j \leqslant \frac{1}{2kh^0(X,L^k)} \log \frac{\mathrm{vol}(B^\infty(X,h_{1,K}^k))}{\mathrm{vol}(B^\infty(X,h_{1,j}^k))} \leqslant \varepsilon_j.$$

Ceci montre que pour démontrer le théorème, on peut également supposer que $K_1 = X$ et que h_1 est lisse et strictement positive.

Comme on l'a déjà remarqué, les assertions (13) et (14) sont équivalentes, et nous allons maintenant passer au point de vue L^2. Prenons $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Nous devons montrer que

$$\frac{1}{2kh^0(X,L^k)} \log \frac{\mathrm{vol}(B^2(\mu,h_1^k))}{\mathrm{vol}(B^2(\mu,h_2^k))} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{E}(X,h_1) - \mathcal{E}(X,h_2).$$

La preuve est basée sur le fait suivant : si V est un espace vectoriel complexe muni de deux produits scalaires hermitiens $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$, alors le quotient des volumes des boules unités correspondantes s'exprime comme un déterminant de Gram. Plus précisément, si $N = \dim(V)$ et $e_1,\ldots,e_N$ est une base orthonormale relativement à $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$, on a

$$\frac{\mathrm{vol}(B_{\langle\cdot,\cdot\rangle_2}(0,1))}{\mathrm{vol}(B_{\langle\cdot,\cdot\rangle_1}(0,1))} = \det \mathrm{Gram}_1(e_1,\ldots,e_N) = \det(\langle e_i,e_j\rangle_1)_{i,j=1,\ldots,N}.$$

En dérivant ce déterminant on peut ainsi par un calcul simple déterminer la différentielle de la fonctionnelle $h \mapsto \mathrm{vol}(B^2(\mu,h))$:

Lemme 4.9. — *Les dérivées directionnelles de la fonctionnelle $h \mapsto \frac{1}{2kN_k} \log \mathrm{vol}(B^2(\mu,h^k))$ sont données par l'intégration contre la mesure de Bergman $\beta_k(\mu,h)$, i.e. si v est une fonction lisse sur X alors*

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2kN_k} \log \mathrm{vol}(B^2(\mu,h^k e^{-ktv}))\bigg|_{t=0} = \int_X v\, d\beta_k(\mu,h).$$

Démonstration. — Fixons une base orthonormale $(s_1,\ldots,s_{N_k})$ de sections de L^k relativement à (μ,h^k). On a

$$\log \frac{\mathrm{vol}(B^2(\mu,h^k e^{-ktv}))}{\mathrm{vol}(B^2(\mu,h^k))} = -\log\det(\langle s_i,s_j\rangle_{h^k e^{-ktv}})_{i,j} = -\log\det\left(\int |s_i\overline{s_j}|_{h^k}\, e^{-2ktv} d\mu\right)_{i,j}$$

et en utilisant $d(\log\circ\det)_{\mathrm{Id}} = \mathrm{trace}$

$$\begin{aligned}(17)\quad \frac{1}{2kN_k}\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \log \mathrm{vol}(B^2(\mu,h^k e^{-ktv})) &= -\frac{1}{2kN_k}\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \mathrm{trace}\left(\int |s_i\overline{s_j}|_{h^k}\, e^{-2ktv} d\mu\right)_{i,j}\\ &= -\frac{1}{2kN_k}\int \sum_{i=1}^{N_k} |s_i|_{h^k}^2\,(-2kv)d\mu = \int v d\beta_k(\mu,h),\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Nous pouvons maintenant conclure la preuve du théorème 4.6 dans le cas ample. Si pour $t \in [0,1]$ on pose $h_t = h_1^t h_2^{1-t} = h_2 e^{-tv}$ on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2kh^0(X,L^k)} \log \frac{\mathrm{vol}(B^2(\mu,h_1^k))}{\mathrm{vol}(B^2(\mu,h_2^k))} &= \int_0^1 \left(\int_X v \, d\beta_k(\mu,h_t)\right) dt && \text{d'après (17)} \\
&\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mathrm{vol}(L)} \int_0^1 \left(\int_X v \Theta_{h_t}^n\right) dt && \text{par le théorème 4.7} \\
&= \frac{1}{\mathrm{vol}(L)} \int_0^1 \frac{d}{dt} E(X,h_t) dt && \text{par la proposition 4.4} \\
&= \frac{1}{\mathrm{vol}(L)} (E(X,h_1) - E(X,h_2))
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat annoncé.

Dans le cas où L est supposé simplement gros, l'argument est similaire excepté que dans le dernier calcul on remplace le théorème 4.7 par le théorème 4.8 et la proposition 4.4 par le théorème 4.5. □

5. ÉQUIDISTRIBUTION

Nous allons voir dans cette section comment la combinaison des théorèmes 4.5 et 4.6 ont permis à Berman, Boucksom et Witt Nyström de démontrer plusieurs résultats importants d'équidistribution.

Supposons que L est un fibré gros au-dessus de X et fixons K_0 un compact non pluripolaire de X muni d'une métrique h_0 continue et d'une mesure μ_0 de Bernstein-Markov relativement à (K_0, h_0). Quitte à multiplier la métrique par une constante, on peut normaliser l'énergie de Monge-Ampère par $\mathcal{E}_{\mathrm{eq}}(K_0, h_0) = 0$. On normalise également la mesure de Lebesgue sur $H^0(X, L^k)$ de sorte que $\mathrm{vol}(B^2(\mu_0, h_0^k)) = 1$. Ceci a pour effet d'éliminer la différence dans (14). On peut penser à prendre $K_0 = X$ et h_0 et μ_0 lisses, mais pour les applications au diamètre transfini dans $\mathbb{C}^n$ par exemple il vaut mieux prendre pour K_0 le tore unité de $\mathbb{C}^n$ et μ_0 sa mesure de Haar.

Si (K, h) est un compact pondéré muni d'une mesure de Bernstein-Markov μ, nous noterons

$$\mathcal{L}_k(\mu, h) = (2kh^0(L^k))^{-1} \log \mathrm{vol}\, B^2(\mu, h^k),$$

de sorte qu'avec les normalisations précédentes, par le théorème 4.6, quand $k \to \infty$ on a $\mathcal{L}_k(\mu, h) \to \mathcal{E}_{\mathrm{eq}}(K, h)$.

5.1. Schéma général. — Les résultats d'équidistribution qui suivent sont tous basés sur le même schéma, qui est une abstraction de l'argument de convergence de [46]. On se donne une suite de fonctionnelles $\mathcal{F}_k$ définies sur un voisinage de h dans l'espace des métriques continues sur $L|_K$. Noter que celui-ci est simplement un espace affine modelé sur $C^0(K)$ puisque toute métrique sur $L|_K$ s'écrit sous la forme he^{-v}. Faisons les hypothèses suivantes :

(i) l'application $C^0(K) \ni v \mapsto \mathcal{F}_k(he^{-v})$ est concave sur un voisinage de l'origine et Gâteaux différentiable en 0 ;

(ii) pour $v \in C^0(K)$ au voisinage de 0 on a $\liminf_{k\to\infty} \mathcal{F}_k(he^{-v}) \geqslant \mathcal{E}_{\mathrm{eq}}(K, he^{-v})$;

(iii) $\lim_{k\to\infty} \mathcal{F}_k(h) = \mathcal{E}_{\mathrm{eq}}(K, h)$.

Alors pour tout $v \in C^0(K)$ on a

$$\lim_{k\to\infty} d\mathcal{F}_h(v) = \langle \mu_{\mathrm{eq}(K,h)}, v\rangle.$$

La preuve est très simple et découle directement du lemme élémentaire suivant :

LEMME 5.1. — *Soient U un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, (f_k) une suite de fonctions réelles concaves sur U et g une fonction définie sur U, toutes dérivables en 0. On suppose que*

— $\liminf_{k\to\infty} f_k \geqslant g$ *;*

— $\lim_{k\to\infty} f_k(0) = g(0)$.

Alors $\lim_{k\to\infty} f'_k(0) = g'(0)$.

5.2. Mesures de Bergman. — L'application la plus directe de cette méthode concerne les fonctionnelles $\mathcal{L}_k$ elles-mêmes. On obtient ainsi le théorème suivant issu de [12], qui est une généralisation des théorèmes 4.7 et 4.8.

THÉORÈME 5.2. — *Soient L un fibré en droites gros sur une variété complexe X et (K, h) un compact pondéré sur X muni d'une mesure μ satisfaisant la propriété de Bernstein-Markov. Alors la suite des mesures de Bergman $\beta_k(\mu, h)$ (définies en* (16)*) converge quand $k \to \infty$ vers $\mu_{\mathrm{eq}}(K, h)$.*

Démonstration. — Il faut vérifier que les fonctionnelles $\mathcal{L}_k(\mu, h)$ vérifient les hypothèses du §5.1. Les hypothèses *(ii)* et *(iii)* sont satisfaites par le théorème 4.6. La différentiabilité de $\mathcal{L}_k(\mu, h)$ par rapport à h a été démontrée en (17), reste donc à établir sa concavité. Cela peut se faire par un calcul direct un peu pénible (voir [14, Lem. 3.6]) ou en utilisant le calcul suivant qui va jouer un rôle important dans la suite.

Fixons une base orthonormale $(s_i)_{1\leqslant i\leqslant N_k}$ de sections de $H^0(L^k)$ relativement à (μ_0, h_0). Avec la normalisation que nous avons choisie pour le volume on a

$$\log \mathrm{vol}(B^2(\mu, h)) = -\det\left(\langle s_i, s_j\rangle_{L^2(\mu, h^k)}\right).$$

Considérons maintenant le fibré en droites $(L^k)^{\boxtimes N_k}$ sur X^{N^k}, dont les sections locales sont de la forme $s_1(x_1)\cdots s_{N_k}(x_{N_k})$, où les s_i sont des sections locales de L^k. Il est muni d'une métrique induite par h que nous noterons simplement $|\cdot|_h$, et dont le poids dans les coordonnées précédentes est de la forme $e^{-(\phi(x_1)+\cdots+\phi(x_{N_k}))}$. La base de sections (s_i) induit une section de $(L^k)^{\boxtimes N_k}$ qui est définie en coordonnées locales par $\det(s_i(x_j))_{1\leqslant i,j\leqslant N_k}$.

LEMME 5.3. — *Avec les notations précédentes on a la formule*

$$\det\Big(\langle s_i, s_j\rangle_{L^2(\mu,h^k)}\Big) = N_k! \int_{X^{N^k}} |\det(s_i(x_j))|_h^2 \, d\mu(x_1)\cdots d\mu(x_{N_k}).$$

La concavité de $\mathcal{L}_k$ par rapport à h s'en déduit immédiatement : en effet faisons varier la métrique en remplaçant h par he^{-v}. On a alors

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_k(\mu, he^{-v}) &= \frac{1}{2kN_k} \log \operatorname{vol}(B^2(\mu, h^k e^{-kv}))\\ &= -\frac{1}{2kN_k} \log \int_{X^{N^k}} |\det(s_i(x_j))|_h^2 \, e^{-2kN_k v} d\mu(x_1)\cdots d\mu(x_{N_k})\end{aligned}$$

et cette dernière intégrale est une fonction concave de v : c'est en effet une conséquence directe de l'inégalité de Hölder. □

Démonstration du lemme 5.3. — Pour éviter des complications un peu artificielles d'algèbre linéaire, plaçons-nous dans le cas d'un compact de $\mathbb{C}^n$ muni du poids $Q = 0$. On se donne une base $(s_1, \ldots, s_N)$ de l'espace des polynômes d'un degré donné et μ une mesure sur K, et on doit démontrer la formule

$$\int_{K^N} |\det(s_i(x_j))|^2 \, d\mu(x_1)\cdots d\mu(x_N) = N! \det(\langle s_i, s_j\rangle_{L^2(\mu)})_{i,j=1,\ldots,N} \tag{18}$$

qui est en fait connue des spécialistes de matrices aléatoires (voir [25, §5.4]). Soit σ_i une base orthonormale de l'espace des polynômes pour la structure induite par $L^2(\mu)$ et $A = (a_{i,j})$ la matrice telle que $s_i = \sum_j a_{i,j}\sigma_j$. Alors on vérifie simplement que

$$\det(\langle s_i, s_j\rangle_{L^2(\mu)}) = |\det(A)|^2 \det(\langle \sigma_i, \sigma_j\rangle_{L^2(\mu)}) = |\det(A)|^2,$$

et donc il suffit de montrer que dans le cas d'une base orthonormale, le membre de gauche de (18) vaut $N!$. Pour cela développons

$$\begin{aligned}|\det(s_i(x_j))|^2 &= \det(s_i(x_j))\overline{\det(s_i(x_j))}\\ &= \Bigg(\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_N} \epsilon(\tau) s_1\Big(x_{\tau(1)}\Big)\cdots s_N\Big(x_{\tau(N)}\Big)\Bigg)\overline{\Bigg(\sum_{\tau'\in\mathfrak{S}_N} \epsilon(\tau') s_1\Big(x_{\tau'(1)}\Big)\cdots s_N\Big(x_{\tau'(N)}\Big)\Bigg)}\\ &= \sum_{(\tau,\tau')\in(\mathfrak{S}_N)^2} \epsilon(\tau)\epsilon(\tau') s_1\Big(x_{\tau(1)}\Big)\cdots s_N\Big(x_{\tau(N)}\Big)\overline{s_1\Big(x_{\tau'(1)}\Big)\cdots s_N\Big(x_{\tau'(N)}\Big)}.\end{aligned}$$

Si l'on intègre cette dernière expression par rapport à $d\mu(x_1)\cdots d\mu(x_N)$, comme

$$\int s_i(x)\overline{s_j(x)} d\mu(x) = \delta_{j,k}$$

les seules contributions non nulles sont pour $\tau = \tau'$ et chacune de ces contributions vaut 1, d'où le résultat. $\square$

5.3. Points de Fekete. — Considérons comme dans la preuve du théorème 5.2 une base (ordonnée) S de sections de $H^0(X, L^k)$, $S = (s_1, \dots, s_{N_k})$, et la section associée $\det(S)$ de $H^0(X^{N_k}, (L^k)^{\boxtimes N_k})$. Rappelons que h induit une métrique sur $L^{\boxtimes N_k}$. Si comme précédemment (K, h) est un compact pondéré et μ une mesure de Bernstein-Markov sur (K, h), on peut alors considérer les quantités $\|\det(S)\|_{L^\infty(K^{N_k},h)}$ et $\|\det(S)\|_{L^2(\mu^{N_k},h)}$ respectivement norme uniforme de $|\det(S)|_h$ sur K^{N_k} et norme L^2 de $|\det(S)|_h$ relativement à μ^{N_k}. Comme précédemment, grâce à la condition de Bernstein Markov, ces deux quantités sont comparables :

$$\|\det(S)\|_{L^2(\mu^{N_k},h)} \leqslant \|\det(S)\|_{L^\infty(K^{N_k},h)} \leqslant M_k \|\det(S)\|_{L^2(\mu^{N_k},h)}\,, \tag{19}$$

avec $\lim M_k^{1/kN_k} = 1$. Ceci s'obtient simplement par intégration coordonnée par coordonnée et applications successives de (15).

Rappelons que nous avons fixé des données de référence (K_0, h_0, μ_0) et normalisé l'énergie par $\mathcal{E}_{\mathrm{eq}}(K_0, h_0) = 0$. Généralisant le §2.3 on définit ainsi le k-diamètre logarithmique de (K, h) (relativement aux données de référence) par

$$d_k(K, h) = \frac{1}{kN_k} \log \|\det(S)\|_{L^\infty(K^{N_k},h)}\,,$$

où S est une base orthonormale de $H^0(X, L^k)$ relativement à (μ_0, h_0^k). Si μ_0 est la mesure de Haar sur le tore unité de $\mathbb{C}^n$, les monômes forment une base de polynômes orthogonaux et on retrouve la définition du §2.3 (à une constante multiplicative $\frac{n}{n+1}$ près : $d_k = \frac{n}{n+1} \log \delta_k$). Une *configuration de Fekete* associée à (K, h^k) est un point de K^{N_k} où la norme $\|\det(S)\|_{L^\infty(K^{N_k},h)}$ (i.e. le k-diamètre) est réalisé(e).

Théorème 5.4. — *Soit L un fibré en droites gros sur X, et (K, h) un compact pondéré non pluripolaire. Alors avec les normalisations précédentes, la suite des k-diamètres logarithmiques $d_k(K, h)$ converge vers $-\mathcal{E}_{\mathrm{eq}}(K, h)$ quand $k \to \infty$.*

Nous démontrerons ce théorème sous l'hypothèse qu'il existe une mesure μ sur (K, h) satisfaisant la propriété de Bernstein-Markov (voir [10, Cor. A] pour le cas général). Par ailleurs tout compact non pluripolaire de $\mathbb{C}^n$ porte une mesure de Bernstein Markov pour tout poids continu (voir [16, Cor. 3.8]). On obtient ainsi une nouvelle preuve de l'existence du diamètre transfini dans $\mathbb{C}^n$ (théorème 2.7) ainsi que son interprétation comme une énergie de Monge-Ampère.

Démonstration. — D'après l'estimée de distortion L^2-L^∞ (19), il suffit de démontrer la convergence des « k-diamètres L^2 » $\frac{1}{kN_k} \log \|\det(S)\|_{L^2(\mu^{N_k},h)}$. Or il se trouve que le lemme 5.3 exprime $\|\det(S)\|^2_{L^2(\mu^{N_k},h)}$ comme un déterminant de Gram :

$$\begin{aligned}(20)\qquad \frac{1}{kN_k}\log\|\det(S)\|_{L^2(\mu^{N_k},h)} &= \frac{1}{2kN_k}\log\det\left(\langle s_i,s_j\rangle_{L^2(\mu,h^k)}\right) - \frac{1}{2kN_k}\log(N_k!)\\ &= \frac{1}{2kN_k}\frac{\log\mathrm{vol}(B^2(\mu_0,h_0^k))}{\log\mathrm{vol}(B^2(\mu,h^k))} + \frac{1}{2kN_k}O\left(N_k\log N_k\right).\end{aligned}$$

D'où le résultat, en utilisant le théorème 4.6 et l'estimée $N_k = O(k^n)$. □

On peut finalement démontrer l'équidistribution des points de Fekete :

Théorème 5.5. — *Soit L un fibré en droites gros sur X et (K,h) un compact non pluripolaire muni d'une métrique continue sur $L|_K$. Soit, pour tout k, F_k une configuration de Fekete associée à (K,h_k). Alors la suite des mesures équidistribuées $\frac{1}{N_k}[F_k]$ converge vers $\mu_{\mathrm{eq}}(K,h)$.*

Démonstration. — Posons $\mu_k = \frac{1}{N_k}[F_k]$. Nous allons considérer la suite de fonctionnelles $\mathcal{F}_k(h) = \mathcal{L}_k(\mu_k,h)$ et vérifier les trois points du critère général. Nous avons démontré au cours de la preuve du théorème 5.2 que $h\mapsto\mathcal{L}_k(\mu,h)$ est concave pour toute mesure μ donc $\mathcal{F}_k$ est concave. Sa différentielle se calcule exactement comme au lemme 4.9 et vaut $\beta(\mu_k,h)$. Mais comme la mesure μ_k est atomique, si (s_j) est une base orthonormale de sections de $H^0(X,L^k)$ pour la norme $L^2(\mu_k,h^k)$ on a pour tout j,

$$\int|s_j|^2_{h^k}\,d\mu_k = \frac{1}{N_k}\sum_{x\in F_k}|s_j(x)|^2_{h^k} = 1$$

d'où

$$\beta(\mu_k,h) = \frac{1}{N_k}\left(\sum_{j=1}^{N_k}|s_j|^2_{h^k}\right)\mu_k = \mu_k$$

et le point *(i)* est établi. Pour le point *(ii)* on remarque que pour toute mesure μ sur K on a $\mathcal{L}_k(\mu,h)\geqslant\frac{1}{2kN_k}\log\mathrm{vol}(B^\infty(K,h^k)$: en effet comme la norme L^2 est dominée par la norme L^∞ on a $B^\infty(K,h^k)\subset B^2(\mu,h^k)$, d'où l'inégalité correspondante entre les volumes. On obtient bien que $\liminf_k\mathcal{L}_k(\mu_k,h)\geqslant\mathcal{E}_{\mathrm{eq}}(K,h)$ pour tout h.

Reste à vérifier le point *(iii)* : nous allons pour cela montrer que $\mathcal{L}_k(\mu_k,h) = -d_k(K,h)+o(1)$ quand k tend vers l'infini. Pour cela nous utilisons à nouveau l'expression du volume comme déterminant de Gram et le lemme 5.3 :

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}\,B^2(\mu_k,h^k)^{-1} &= \det\left(\langle s_i,s_j\rangle_{L^2(\mu_k,h^k)}\right)\\ &= \frac{1}{N_k!}\int_{X^{N^k}}|\det(s_i(x_j))|^2_h\,d\mu_k(x_1)\cdots d\mu_k(x_{N_k})\\ &= \frac{1}{N_k^{N_k}N_k!}\sum_{(x_1,\ldots,x_{N_k})\in F_k^{N_k}}|\det(s_i(x_j))|^2_h = \frac{1}{N_k^{N_k}}\|\det(S)\|_{L^\infty(K^{N_k},h)}\end{aligned}$$

où la dernière égalité vient de ce qu'un terme de la dernière somme est non nul quand les $x_1, \ldots, x_{N_k}$ sont distincts et vaut alors $\|\det(S)\|_{L^\infty(K^{N_k},h)}$ puisque F_k est une configuration de Fekete. En prenant le log et en utilisant le fait que $N_k \log N_k = o(kN_k)$ on obtient l'estimée annoncée, et on conclut par le théorème 5.4. $\square$

Remarque 5.6. — Le résultat vaut avec la même démonstration si la suite de configurations F_k n'est qu'*asymptotiquement* de Fekete, c'est-à-dire, avec des notations évidentes, que $(kN_k)^{-1} \log |\det(S(F_k))| - d_k(K, h) = o(1)$.

5.4. Équidistribution arithmétique. — (Voir [23] pour plus d'informations sur les notions de ce paragraphe.) Soient X une variété projective lisse définie sur un corps de nombres K et L un fibré en droites gros sur X défini sur K. Pour simplifier on supposera $K = \mathbb{Q}$. On peut alors définir une notion de *métrique adélique* sur L : il s'agit d'une collection h de métriques h_v sur L_v, où v varie sur l'ensemble des *places* $\mathcal{P} \cup \{\infty\}$ ($\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers) qui vérifient certaines conditions de cohérence et de continuité aux places non archimédiennes (nous n'entrerons pas dans les détails), et telle que h_∞ est continue sur $X(\mathbb{C})$. Une telle métrique adélique sera dorénavant fixée aux places p-adiques et nous ne ferons varier la métrique qu'à la place complexe. Une *section adélique* de L est alors une collection de sections de L_v telles que $\|s\|_v \leqslant 1$ (norme uniforme à la place v) hors d'un ensemble fini de places. On note $H^0(L)_{\mathbb{A}}$ l'espace des sections adéliques, dont la boule unité est $B_{\mathbb{A}}(L, h) = H^0(L)_{\mathcal{A}} \cap \prod_{v \in \mathcal{P} \cup \{\infty\}} B_v^\infty(X_v, h_v)$. Le groupe $H^0(L)_{\mathbb{A}}$ possède une mesure de Haar que l'on peut normaliser de la manière suivante : $H^0(L)_{\mathbb{Q}}$ se plonge comme un réseau dans $H^0(L)_{\mathbb{A}}$ et on normalise la mesure de Haar de sorte que son covolume soit 1. On fait de même pour toutes les puissances de L et on peut ainsi considérer l'*énergie adélique à l'équilibre* :

$$\mathcal{E}_{\mathbb{A},\mathrm{eq}}(L, h) = \limsup_{k \to \infty} \frac{1}{kN_k} \log \operatorname{vol} B_{\mathbb{A}}(L^k, h^k).$$

On montre facilement à partir des théorèmes 4.5 et 4.6 que ceci définit une fonction différentiable au sens de Gâteaux sur l'ensemble des métriques continues (rappelons que seule la métrique archimédienne varie). Une version du théorème de Minkowski assure l'existence d'une section s de L^k sur $\mathbb{Q}$ dont la norme à la place archimédienne est contrôlée par $C \operatorname{vol} B^\infty(L^k, h^k)^{1/kN_k}$ et vérifiant $\|s\|_v \leqslant 1$ aux places non archimédiennes.

Associée à ces données on a aussi une notion de *hauteur*, définie pour $x \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ par

$$\mathrm{h}_{\mathbb{A},L,h}(x) = -\frac{1}{\deg(x)} \sum_{y \in G \cdot x} \left(\log |s(y)|_h + \sum_p \log |s(y)|_{h_p} \right)$$

où $G \cdot x$ est l'orbite de x sous le groupe de Galois et s est une section quelconque de $H^0(L)_{\mathbb{Q}}$ n'admettant ni zéro ni pôle en x. On voit également que $\mathrm{h}_{\mathbb{A},L^k,h^k}(x) = k\mathrm{h}_{\mathbb{A},L,h}(x)$.

En utilisant une section s de L^k fournie par le théorème de Minkowski, on voit que si x n'appartient pas au lieu des zéros ou des pôles de s, on a

$$\mathrm{h}_{\mathbb{A},L,h}(x) \geqslant \frac{1}{kN_k} \log \operatorname{vol} B_{\mathbb{A}}(L^k, h^k) + O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Finalement si (x_j) est une suite de points de X qui est *générique*, au sens où elle quitte asymptotiquement toute sous-variété stricte, on obtient $\liminf_{j\to\infty} \mathrm{h}_{\mathbb{A},L,h}(x) \geqslant \mathcal{E}_{\mathbb{A},\mathrm{eq}}(L,h)$. On dit en général que (x_j) est une suite de points de *petite hauteur* si

$$\lim_{j\to\infty} \mathrm{h}_{\mathbb{A},L,h}(x_j) = \mathcal{E}_{\mathbb{A},\mathrm{eq}}(L,h).$$

Le théorème suivant est une généralisation d'un théorème de Yuan [51] qui traitait du cas ample (mais donne l'équidistribution à toutes les places) et qui lui même était une généralisation du théorème de Szpiro, Ullmo et Zhang [46].

THÉORÈME 5.7. — *Soient X une variété projective lisse définie sur $\mathbb{Q}$ et L un fibré en droites gros sur X défini sur $\mathbb{Q}$, muni d'une métrique adélique $h_{\mathbb{A}}$ comme ci-dessus. Si (x_j) est une suite générique de points de petite hauteur sur X alors on a équidistribution des orbites de Galois vers la mesure d'équilibre :*

$$\frac{1}{|G\cdot x_j|}[G\cdot x_j] \underset{j\to\infty}{\rightharpoonup} \mu_{\mathrm{eq}}(X,h).$$

Démonstration. — On applique le schéma général à la suite de fonctionnelles $\mathcal{F}_j(h) = \mathrm{h}_{\mathbb{A},L,h}(x_j)$. La discussion précédente et l'hypothèse de petite hauteur montrent que les conditions *(ii)* et *(iii)* sont satisfaites. Pour la condition *(i)* on remarque que la hauteur satisfait la relation

$$\mathrm{h}_{\mathbb{A},L,he^{-v}}(x) = \mathrm{h}_{\mathbb{A},L,h}(x) + \frac{1}{|G\cdot x|}\left\langle [G\cdot x], v\right\rangle.$$

Le résultat suit. □

5.5. Autres résultats et compléments. — Berman, Boucksom et Witt Nyström donnent dans [12] plusieurs autres résultats d'équidistribution dans le même esprit, concernant par exemple les points optimaux pour l'interpolation.

Plusieurs travaux récents (Ortega-Cerda et Lev [36], Dinh, Ma et Nguyen [29]) se sont attachés à donner des estimations sur la vitesse de convergence des points de Fekete. L'approche de [29] suit plus ou moins pas à pas celle exposée ici, en tâchant de rendre explicites les vitesses de convergence à chaque étape. Par exemple dans le lemme 5.1, on peut rendre la convergence quantitative si on demande que g soit de classe C^1 avec une borne sur le module de continuité de g'. Ceci mène naturellement à estimer la dépendance de la mesure d'équilibre $\mu_{\mathrm{eq}(K,h)}$ en fonction de h, ainsi que la régularité des enveloppes $P_{K,\omega}Q$. Les auteurs utilisent des espaces de fonctions hölderiennes et définissent le concept suivant : un compact pondéré est (C^α, C^β) régulier s'il est régulier et si la projection $P_{K,\omega}$ définit un opérateur borné de C^α dans C^β. Ils montrent ainsi que si L est ample, h est hölderienne et (K,h) est (C^α, C^β) (pour des exposants appropriés), alors on peut estimer la vitesse de convergence des configurations de Fekete vers la mesure d'équilibre pour la distance de Wasserstein.

6. GRANDES DÉVIATIONS ET MESURES CANONIQUES

Dans cette section finale nous passons en revue certains résultats plus récents dus à Berman [7, 8, 9] qui culminent avec la construction d'une mesure canonique pour toute variété projective de dimension de Kodaira strictement positive, par des méthodes probabilistes.

6.1. Processus ponctuels et formalisme des grandes déviations. — Un *processus ponctuel* à N points sur un espace X est une application mesurable ξ d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ vers l'ensemble des sous-ensembles de N points de X (i.e. $X^N/\mathfrak{S}_N$). Sa loi est donc une mesure de probabilité sur X^N symétrique par permutation des facteurs. La *mesure empirique* d'un processus ponctuel à N points est la mesure aléatoire δ_ξ définie par $\delta_\xi(\omega) = \frac{1}{N}[\xi(\omega)]$. La loi de cette mesure empirique est donc une mesure de probabilité sur $\mathcal{M}(X)$ qui sera notée Γ_ξ. En pratique, nous supposerons toujours que X est un espace métrique compact de sorte que $\mathcal{M}(X)$ est compact et métrisable.

Si (ξ_N) est une suite de processus ponctuels à N points dont les mesures empiriques convergent en loi vers une mesure μ, on utilise classiquement le formalisme des grandes déviations pour quantifier cette convergence. Intuitivement, il s'agit d'estimer la probabilité qu'une réalisation de la mesure δ_{ξ_N} soit éloignée de la mesure limite μ, au sens de la topologie faible sur $\mathcal{M}(X)$.

Formellement, soient a_N une suite de réels positifs et tendant vers $+\infty$ et I une fonction sci sur $\mathcal{M}(X)$. On dit qu'une suite (Γ_N) de mesures de probabilité sur $\mathcal{M}(X)$ satisfait un *principe de grandes déviations* avec vitesse (a_N) et fonction de taux I, si pour tout borélien B de $\mathcal{M}(X)$ on a

$$-\inf_{\nu \in \mathring{B}} I(\nu) \leqslant \liminf_{N\to\infty} \frac{1}{a_N} \log \Gamma_N(B) \leqslant \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{a_N} \log \Gamma_N(B) \leqslant -\inf_{\nu\in\overline{B}} I(\nu). \tag{21}$$

Typiquement, I admet un unique minimum égal à 0 en la mesure limite μ, et si V est un voisinage de μ, on a $\inf_{V^c} I > 0$ et modulo effets de bord, on aura

$$\mathbb{P}\left(\delta_{\xi_N} \notin V\right) \approx \exp\left(-a_N \inf_{V^c} I\right).$$

Il existe de nombreuses techniques pour établir la propriété de grandes déviations, y compris quand on ne connaît pas *a priori* la limite μ. L'une d'entre elles est la proposition suivante (cf. [28, Prop. 4.1.1]).

Proposition 6.1. — *Soit X un compact et fixons une base d'ouverts $\mathcal{U}$ pour la topologie faible sur $\mathcal{M}(X)$. Soient (Γ_N) une suite de mesures de probabilité sur $\mathcal{M}(X)$ et (a_N) une suite de réels positifs tendant vers l'infini. Pour $\nu \in \mathcal{M}(X)$ posons*

$$I(\nu) = -\inf_{U\in\mathcal{U}, U\ni\nu}\left(\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{a_N}\log\Gamma_N(U)\right).$$

Alors si on a également

$$I(\nu) = -\inf_{U\in\mathcal{U}, U\ni\nu}\left(\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{a_N}\log\Gamma_N(U)\right),$$

la suite Γ_N satisfait un principe de grandes déviations avec vitesse (a_N) et fonction de taux I. En particulier si I admet un unique minimiseur μ, alors (Γ_N) converge faiblement vers μ.

Une autre méthode est fournie par le théorème de Gärtner-Ellis (voir [28, Cor. 4.6.14]), qui se spécialise à notre situation de la manière suivante :

Théorème 6.2. — *Soient X un compact et (Γ_N) une suite de mesures de probabilité sur $\mathcal{M}(X)$. Supposons qu'il existe une suite de réels positifs (a_N) tendant vers l'infini telle que la suite (Λ_N) de fonctionnelles sur $C(X)$ définies par*

$$\Lambda_N : u \longmapsto \frac{1}{a_N}\log\int_{\mathcal{M}(K)} e^{a_N\langle u,\nu\rangle}d\Gamma_N(\nu)$$

converge vers une fonctionnelle Λ sur $C(X)$ différentiable au sens de Gâteaux.

Alors la suite (Γ_N) satisfait un principe de grandes déviations de vitesse (a_N) et dont la fonction de taux est la transformée de Legendre Λ^* de Λ :

$$\Lambda^*(\nu) = \sup_{u\in C(K)}\left(\Lambda(u) - \langle u,\nu\rangle\right).$$

6.2. Points de Fekete et grandes déviations

6.2.1. *Un processus déterminantal.* — Plaçons-nous maintenant dans le cadre des §§ 4 et § 5 : on se donne L un fibré en droites ample (ou gros) sur une variété complexe X, un compact non pluripolaire K pondéré par une métrique h sur $L|_K$, et une mesure ν sur K ayant la propriété de Bernstein-Markov relativement à (K, h). Rappelons que h induit une métrique sur le fibré en droites $L^{\boxtimes N}$ sur $K^N \subset X^N$. Une base de sections S de L induit une section $\det(S)$ de $L^{\boxtimes N}$ et donc une mesure positive $|\det(S)|_h^2\,\nu^N$ sur K^N. Un changement de base multiplie cette mesure par une constante positive, ainsi si l'on pose $Z = \int|\det(S)|_h^2\,\nu^N$, la mesure sur K^N définie par

$$\xi : A \longmapsto \xi(A) = \frac{1}{Z}\int_A |\det(S)|_h^2\,\nu^N$$

est une mesure de probabilité sur K^N ne dépendant que de (h,ν), et symétrique par permutation des facteurs. En d'autres termes, c'est un processus ponctuel à N points, qui entre dans la catégorie des *processus déterminantaux.* Si maintenant pour $k \geqslant 1$ on remplace L par L^k, fibré que l'on munit de la métrique h^k induite par h, on définit une suite de processus ponctuels sur K à N_k points ($N_k = \dim H^0(L^k)$), associée à la donnée (h, ν). Pour mémoire, dans le cas classique d'un compact de $\mathbb{C}^n$ muni du poids $Q = 0$, $|\det(S)|_h^2\,(x_1, \cdots, x_{N_k})$ n'est autre que le déterminant de Vandermonde $|\det\left(e_i(x_j)\right)|^2$, où (e_i) est une base de $\mathcal{P}_k(\mathbb{C}^n)$.

Si comme au §5.3 on se fixe une donnée de référence (K_0, h_0, μ_0) et on choisit les bases S_k orthonormales relativement à $L^2(\mu_0, h_0^k)$, le théorème 5.4 et l'inégalité de Bernstein-Markov (19) montrent que la suite $Z_k^{1/2kN_k}$ converge vers le diamètre transfini de (K, h), égal à $-\mathcal{E}_{\rm eq}(K, h)$. Une application directe de l'inégalité de Markov montre que

$$\mathbb{P}\left(|\det(S(\xi_k))|_h^{1/kN_k} < e^{d_k(K,h)-\varepsilon}\right) \leqslant \frac{1}{Z_k} e^{2kN_k(d_k(K,h)-\varepsilon)}$$

converge exponentiellement vers 0 quand k tend vers l'infini. Ainsi par le lemme de Borel-Cantelli une suite indépendante $(\xi_k(\omega))$ de réalisations de notre processus ponctuel est presque sûrement asymptotiquement de Fekete, et donc $\delta_{\xi_k(\omega)} \rightharpoonup \mu_{\rm eq}(K, h)$. On a dans ce contexte un principe de grandes déviations dû à Berman [7] (voir aussi Bloom-Levenberg [16]).

Théorème 6.3. — *Sous les hypothèses précédentes, la suite des lois des mesures empiriques des processus déterminantaux ξ_k vérifie un principe de grandes déviations de vitesse $2kN_k$, associé à une fonction de taux H admettant un unique minimum en $\mu_{{\rm eq}(K,h)}$.*

Pour démontrer ce théorème, on peut appliquer l'une ou l'autre des méthodes présentées au §6.1 (les deux approches sont développées dans chacun des articles [7] et [16]). Une base d'ouverts $\mathcal{U}$ de $\mathcal{M}(K)$ étant fixée on peut ainsi poser

$$\underline{H}(\nu) = -\inf_{U \in \mathcal{U}, U \ni \nu} \left(\liminf_{k\to\infty} \frac{1}{2kN_k} \log \Gamma_k(U)\right)$$

et

$$\overline{H}(\nu) = -\inf_{U \in \mathcal{U}, U \ni \nu} \left(\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{2kN_k} \log \Gamma_k(U)\right)$$

où Γ_k est la loi de δ_{ξ_k}, et il s'agit de montrer que $\overline{H} = \underline{H}$, ce qui se fait par la théorie du pluripotentiel. L'autre méthode basée sur le théorème 6.2 repose (on s'en doute) sur le théorème 4.5. En effet en développant les définitions et en appliquant le lemme 5.3 et le calcul (20) on lie directement les fonctionnelles Λ_N du théorème 6.2 et les volumes des boules dans $H^0(X, L^k)$.

Bloom et Levenberg [16] introduisent également des fonctionnelles plus directement liées à la définition des points de Fekete :

$$\overline{W}(\nu) = \inf_{U \in \mathcal{U}, U \ni \nu} \left(\limsup_{k\to\infty} W_k(U)\right) \text{ où } W_k(U) = \sup\left\{|\det(S(\xi))|_h^{1/kN_k},\ |\xi| = N_k,\ \delta_\xi \in U\right\}$$

et de même $\underline{W}(\nu)$ où la limsup est remplacée par une liminf (il faut ici normaliser comme précédemment et prendre des bases S orthonormales). On voit que $\overline{W}(\nu)$ est essentiellement la limite supérieure des $|\det(S(\xi_k))|_h^{1/kN_k}$, où (ξ_k) est une suite de configurations de N_k points telle que $\delta_{\xi_k} \rightharpoonup \nu$. Par conséquent l'équidistribution des configurations asymptotiquement de Fekete montre que $\overline{W}$ admet un unique maximum en $\mu_{\text{eq}}(K,h)$. Bloom et Levenberg montrent que dans le cas d'un compact pondéré de $\mathbb{C}^n$ on a

$$\overline{W}(\nu) = \underline{W}(\nu) =: W(\nu) \text{ et } H(\nu) = \log W(\mu_{\text{eq}}(K,h) - \log W(\nu)$$

(leur argument doit passer sans difficulté au cas ample général).

6.2.2. *Retour sur l'électrostatique.* — La fonction de taux H est une fonctionnelle sur l'espace des mesures sur K, qui est minimale précisément pour la mesure d'équilibre. Ces propriétés rappellent celles de l'énergie électrostatique du §1.1. Berman, Boucksom, Guedj et Zeriahi définissent justement dans [20] *l'énergie pluricomplexe* d'une mesure μ comme une transformée de Legendre de $\mathcal{E}$ de la manière suivante. Supposons pour simplifier que h s'étende à une métrique lisse sur L et soit ω sa forme de courbure. Si μ est une mesure de probabilité sur K on pose

$$E_\omega(\mu) = \sup_{\varphi \in \mathrm{PSH}(X,\omega)} \left(\mathcal{E}_\omega(\varphi) - \langle \varphi, \mu \rangle\right).$$

Le théorème de Gartner-Ellis 6.2 montre que la fonction de taux dans le théorème 6.3 est alors égale à

$$H_{(K,h)}(\mu) = E_\omega(\mu) - C(K,h) \text{ où } C(K,h) = \inf_{\mu \in \mathcal{M}(K)} E_\omega(\mu).$$

La constante $e^{-\frac{n}{n+1}C(K,h)}$ est appelée *capacité électrostatique pluricomplexe* dans [20], et elle généralise la capacité électrostatique du §1.1. Cette énergie apparaît *a posteriori* comme la version macroscopique de l'énergie d'interaction déterminantale évoquée à la remarque 2.8. On peut en fait relire tout ce qui précède à l'aune de la mécanique statistique et des grandes déviations (voir [19] pour une présentation dans cet esprit).

6.3. Un processus ponctuel canonique. — Toutes les constructions que nous avons faites jusqu'ici reposent sur la donnée d'un fibré en droites muni d'une métrique. Une variété complexe X de dimension n admet un fibré en droites canonique K_X qui est le fibré des $(n,0)$-formes holomorphes sur X. Supposons X projective. La dimension $N_k = \dim H^0(X, K_X^k)$ est par définition le k^{e}*plurigenre* de X. Si la suite N_k tend vers l'infini, on montre qu'elle croît à vitesse polynomiale, et le nombre

$$\kappa = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\log k} \log \dim H^0(K_X^k)$$

s'appelle la *dimension de Kodaira* de X. C'est un entier compris entre 1 et $n = \dim(X)$. Si $\kappa = n$ (i.e. K_X est gros) on dit que X est de *type général.* Si en outre K_X est ample, il admet une métrique canonique dont la forme de courbure ω_{KE} vérifie l'équation de Kähler-Einstein $\mathrm{Ric}(\omega_{\mathrm{KE}}) = -\omega_{\mathrm{KE}}$, et qui a été construite par Aubin et Yau. L'extension au cas de fibrés gros a récemment donné lieu à une abondante littérature. Pour tout cela on consultera le livre de Guedj et Zeriahi [32]

Berman fait dans [8, 9] la très jolie observation suivante : *si* $N_k > 0$ *alors* X *admet un processus ponctuel canonique* ξ_k *à* N_k *points,* que nous appellerons *processus pluricanonique de degré* k. Il faut pour justifier ceci construire une mesure de probabilité symétrique sur X^{N_k}. En effet si s est une section de K_X^k, elle s'écrit dans des coordonnées locales $z = (z_1, \ldots, z_n)$ sous la forme $s(z)(dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n)^{\otimes k}$ et les règles de changement de coordonnées des formes pluricanoniques $(dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n)^{\otimes k}$ font que la densité (i.e. la mesure positive) s'exprimant dans ces coordonnées locales par

$$|s(z)|^{2/k}\, idz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge \cdots \wedge idz_n \wedge d\overline{z}_n$$

est globalement bien définie. Si maintenant $(s_1, \ldots, s_{N_k})$ est une base de $H^0(X, K_X^k)$, on définit comme au §5.3 la section $\det(S)$ de $(K_X^k)^{\boxtimes N_k}$ sur X^{N_k}. Si on fixe des coordonnées locales $z^{(j)} = (z_1^{(j)}, \ldots, z_n^{(j)})$, $j = 1, \cdots, N_k$ sur les facteurs et on pose $\omega^{(j)} = dz_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge dz_n^{(j)}$, l'expression de $\det(S)$ est de la forme

$$\det(S)\Big(z^{(1)}, \ldots, z^{(N_k)}\Big)\Big(\omega^{(1)}\Big)^{\otimes k} \otimes \cdots \otimes \Big(\omega^{(N_k)}\Big)^{\otimes k}$$

et comme $\det(S)$ dépend linéairement de chaque s_j, l'expression

$$i^{n^2 N_k} \left|\det(S)\Big(z^{(1)}, \ldots, z^{(N_k)}\Big)\right|^{2/k} \omega^{(1)} \wedge \overline{\omega^{(1)}} \wedge \cdots \wedge \omega^{(N_k)} \wedge \overline{\omega^{(N_k)}}$$

définit une mesure positive sur X^{N_k}, invariante par permutation des facteurs. Finalement $\det(S)$ ne dépend du choix de S qu'à une constante multiplicative près, donc si on normalise par la masse totale on obtient bien une mesure de probabilité $\mu^{(N_k)}$ sur X^{N_k} ne dépendant d'aucun choix.

Théorème 6.4 ([8, 9]). — *Soit* X *une variété projective de dimension de Kodaira strictement positive. La suite des mesures empiriques des processus pluricanoniques converge en loi vers une mesure de probabilité* μ_X. *Si* K_X *est ample,* μ_X *est la forme volume de la métrique de Kähler-Einstein.*

La mesure canonique μ_X avait précédemment été construite par d'autres méthodes par Song et Tian [45] et Tsuji [48]. Dans le cas où X est ample on obtient également par une méthode similaire la forme de courbure ω_{KE} elle-même (voir [9, Cor 1.3].

Pour démontrer le théorème on traite d'abord le cas où K_X est gros, puis on en déduit le cas général par un argument de « dévissage » : en effet à une transformation birationnelle près, une variété de dimension de Kodaira strictement positive fibre sur son « modèle canonique » qui est de type général (c'est la fibration d'Iitaka, voir [35]). La démonstration dans le cas gros repose sur un nouveau principe de grandes déviations dans l'esprit du théorème 6.2, faisant intervenir des idées de mécanique statistique et de géométrie riemannienne en grande dimension.

Remarque 6.5. — Dans le cas où la dimension de Kodaira de X est $-\infty$, on peut appliquer une analyse similaire aux puissances du fibré anticanonique K_X^{-1}. L'existence de métriques de Kähler-Einstein est alors beaucoup plus délicate et sujette à certaines obstructions (voir par exemple l'exposé de P. Eyssidieux dans ce séminaire [30]). Berman propose une interprétation probabiliste de ces obstructions dans [8] et conjecture la convergence des mesures empiriques des processus ponctuels anti-pluricanoniques vers la forme volume de Kähler-Einstein dans les cas favorables.

RÉFÉRENCES

[1] A. Alexandrov – « On the theory of mixed volumes of convex bodies III : Extension of two theorems of Minkowski on convex polyhedra to arbitrary convex bodies. », *Mat. Sb.* **3 (1)** (1938), p. 27–44, [Traduction anglaise disponible dans Selected works Part I : Selected scientific papers. Gordon and Breach, 1996.].

[2] N. Anantharaman – « Topologie des hypersurfaces nodales de fonctions aléatoires gaussiennes [d'après Nazarov et Sodin, Gayet et Welschinger] », *Astérisque* (2017), no. 390, p. Exp. No. 1116, 369–408, Séminaire Bourbaki. Vol. 2015/2016. Exposés 1104–1119.

[3] E. Bedford & B. A. Taylor – « The Dirichlet problem for a complex Monge-Ampère equation », *Invent. Math.* **37** (1976), no. 1, p. 1–44.

[4] ———, « A new capacity for plurisubharmonic functions », *Acta Math.* **149** (1982), no. 1-2, p. 1–40.

[5] ———, « Plurisubharmonic functions with logarithmic singularities », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **38** (1988), no. 4, p. 133–171.

[6] R. Berman – « Bergman kernels and equilibrium measures for line bundles over projective manifolds », *Amer. J. Math.* **131** (2009), no. 5, p. 1485–1524.

[7] ———, « Determinantal point processes and fermions on complex manifolds : large deviations and bosonization », *Comm. Math. Phys.* **327** (2014), no. 1, p. 1–47.

[8] ———, « Kähler-Einstein metrics, canonical random point processes and birational geometry », in *Algebraic Geometry, Salt Lake City*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 97, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015, p. 29–74.

[9] ———, « Large deviations for Gibbs measures with singular Hamiltonians and emergence of Kähler-Einstein metrics », *Comm. Math. Phys.* **354** (2017), no. 3, p. 1133–1172.

[10] R. Berman & S. Boucksom – « Growth of balls of holomorphic sections and energy at equilibrium », *Invent. Math.* **181** (2010), no. 2, p. 337–394.

[11] R. Berman, S. Boucksom, V. Guedj & A. Zeriahi – « A variational approach to complex Monge-Ampère equations », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **117** (2013), p. 179–245.

[12] R. Berman, S. Boucksom & D. Witt Nyström – « Fekete points and convergence towards equilibrium measures on complex manifolds », *Acta Math.* **207** (2011), no. 1, p. 1–27.

[13] T. Bloom – « Orthogonal polynomials in $\mathbf{C}^n$ », *Indiana Univ. Math. J.* **46** (1997), no. 2, p. 427–452.

[14] T. Bloom, L. Bos, N. Levenberg & S. Waldron – « On the convergence of optimal measures », *Constr. Approx.* **32** (2010), no. 1, p. 159–179.

[15] T. Bloom & N. Levenberg – « Transfinite diameter notions in $\mathbb{C}^N$ and integrals of Vandermonde determinants », *Ark. Mat.* **48** (2010), no. 1, p. 17–40.

[16] ———, « Pluripotential energy and large deviation », *Indiana Univ. Math. J.* **62** (2013), no. 2, p. 523–550.

[17] T. Bloom, N. Levenberg, F. Piazzon & F. Wielonsky – « Bernstein-Markov : a survey », *Dolomites Research Notes on Approximation* **8** (2015), no. Special issue, p. 75–91.

[18] T. Bloom & B. Shiffman – « Zeros of random polynomials on $\mathbb{C}^m$ », *Math. Res. Lett.* **14** (2007), no. 3, p. 469–479.

[19] S. Boucksom – « Limite thermodynamique et théorie du potentiel », *Gaz. Math.* (2015), no. 146, p. 16–26.

[20] S. Boucksom, P. Eyssidieux, V. Guedj & A. Zeriahi – « Monge-Ampère equations in big cohomology classes », *Acta Math.* **205** (2010), no. 2, p. 199–262.

[21] H. J. Bremermann – « On a generalized Dirichlet problem for plurisubharmonic functions and pseudo-convex domains. Characterization of Šilov boundaries », *Trans. Amer. Math. Soc.* **91** (1959), p. 246–276.

[22] A. Brudnyi – « On local behavior of holomorphic functions along complex submanifolds of $\mathbb{C}^N$ », *Invent. Math.* **173** (2008), no. 2, p. 315–363.

[23] A. Chambert-Loir – « Arakelov geometry, heights, equidistribution, and the bogomolov conjecture », in *Notes de l'ecole d'été Géométrie d'Arakelov et applications diophantiennes*, à paraître.

[24] D. Coman & E. A. Poletsky – « Transcendence measures and algebraic growth of entire functions », *Invent. Math.* **170** (2007), no. 1, p. 103–145.

[25] P. A. Deift – *Orthogonal polynomials and random matrices : a Riemann-Hilbert approach*, Courant Lecture Notes in Mathematics, vol. 3, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York ; American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[26] J.-P. Demailly – « Complex analytic and differential geometry. », disponible à l'adresse `https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf`.

[27] ———, « Variational approach for complex Monge-Ampère equations and geometric applications », *Astérisque* (2017), no. 390, p. Exp. No. 1112, 245–275, Séminaire Bourbaki. Vol. 2015/2016. Exposés 1104–1119.

[28] A. Dembo & O. Zeitouni – *Large deviations techniques and applications*, seconde éd., Applications of Mathematics (New York), vol. 38, Springer-Verlag, New York, 1998.

[29] T.-C. Dinh, X. Ma & V.-A. Nguyên – « Equidistribution speed for Fekete points associated with an ample line bundle », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **50** (2017), no. 3, p. 545–578.

[30] P. Eyssidieux – « Métriques de Kähler-Einstein sur les variétés de Fano [d'après Chen-Donaldson-Sun et Tian] », *Astérisque* (2016), no. 380, Séminaire Bourbaki. Vol. 2014/2015, p. Exp. No. 1095, 207–229.

[31] M. Fekete – « Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten », *Mathematische Zeitschrift* **17** (1923), no. 1, p. 228–249.

[32] V. Guedj & A. Zeriahi – *Degenerate complex Monge-Ampère equations*, EMS Tracts in Mathematics, vol. 26, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2017.

[33] M. Klimek – *Pluripotential theory*, London Mathematical Society Monographs. New Series, vol. 6, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1991, Oxford Science Publications.

[34] S. Kołodziej – « The logarithmic capacity in $\mathbf{C}^n$ », *Ann. Polon. Math.* **48** (1988), no. 3, p. 253–267.

[35] R. Lazarsfeld – *Positivity in algebraic geometry. I*, Ergeb. Math. Grenz. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 48, Springer-Verlag, Berlin, 2004, Classical setting : line bundles and linear series.

[36] N. Lev & J. Ortega-Cerdà – « Equidistribution estimates for Fekete points on complex manifolds », *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **18** (2016), no. 2, p. 425–464.

[37] N. Levenberg – « Weighted pluripotential theory results of Berman-Boucksom », arXiv:1010.4035, 2010.

[38] C. Lu & V. D. Nguyen – « Degenerate complex Hessian equations on compact Kähler manifolds. », *Indiana Univ. Math. J.* **64** (2015), no. 6, p. 1721–1745.

[39] R. Rumely – « On Bilu's equidistribution theorem », in *Spectral problems in geometry and arithmetic (Iowa City, IA, 1997)*, Contemp. Math., vol. 237, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, p. 159–166.

[40] E. B. Saff & V. Totik – *Logarithmic potentials with external fields*, Grund. Math. Wiss. [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 316, Springer-Verlag, Berlin, 1997, Appendix B by Thomas Bloom.

[41] J.-P. Serre – « Distribution asymptotique des valeurs propres des endomorphismes de Frobenius [d'après Abel, Chebyshev, Robinson,...] », Séminaire Bourbaki. Exposé 1146, 2018.

[42] B. Shiffman – « Convergence of random zeros on complex manifolds », *Sci. China Ser. A* **51** (2008), no. 4, p. 707–720.

[43] J. Siciak – « Extremal plurisubharmonic functions in $\mathbf{C}^n$ », *Ann. Polon. Math.* **39** (1981), p. 175–211.

[44] J. Siciak – « Families of polynomials and determining measures », *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (5)* **9** (1988), no. 2, p. 193–211.

[45] J. Song & G. Tian – « Canonical measures and Kähler-Ricci flow », *J. Amer. Math. Soc.* **25** (2012), no. 2, p. 303–353.

[46] L. Szpiro, E. Ullmo & S.-W. Zhang – « Équirépartition des petits points », *Invent. Math.* **127** (1997), no. 2, p. 337–347.

[47] G. Tian – « On a set of polarized Kähler metrics on algebraic manifolds », *J. Differential Geom.* **32** (1990), no. 1, p. 99–130.

[48] H. Tsuji – « Canonical measures and the dynamical systems of Bergman kernels », arXiv:0805.1829, 2008.

[49] M. Tsuji – *Potential theory in modern function theory*, Chelsea Publishing Co., New York, 1975, Reprinting of the 1959 original.

[50] J. L. Ullman – « On the regular behaviour of orthogonal polynomials », *Proc. London Math. Soc. (3)* **24** (1972), p. 119–148.

[51] X. Yuan – « Big line bundles over arithmetic varieties », *Invent. Math.* **173** (2008), no. 3, p. 603–649.

[52] V. Zaharjuta – « Transfinite diameter, Chebychev constants and capacity for a compactum in $\mathbb{C}^n$ », *Mat. Sb. (N.S.)* **96(138)** (1975), p. 374–389, 503.

[53] ———, « Extremal plurisubharmonic functions, orthogonal polynomials, and the Bernstein-Walsh theorem for functions of several complex variables », *Ann. Polon. Math.* **33** (1976/77), no. 1-2, p. 137–148.

Romain DUJARDIN

Sorbonne Universités
Laboratoire de probabilités, statistique et modélisation UMR 8001
4 place Jussieu
75005 Paris, France
E-mail : `romain.dujardin@upmc.fr`