

APPLICATIONS HARMONIQUES EN COURBURE NÉGATIVE
[d'après Benoist, Hulin, Markovic...]

par François GUÉRITAUD

1. INTRODUCTION

Le théorème suivant est le résultat principal de [BH17b].

THÉORÈME 1.1. — *Soient X et Y des variétés de Hadamard dont toutes les courbures sectionnelles appartiennent à $[-b^2, -a^2]$, où $0 < a < b$. Pour tout plongement (c, C) -quasi-isométrique $f : X \rightarrow Y$, il existe une unique application harmonique $h : X \rightarrow Y$ à distance uniformément bornée de f , i.e. telle que $\sup_{x \in X} d_Y(f(x), h(x))$ soit fini. Cette quantité peut être bornée en fonction de a, b, c, C et de $k = \dim X$ et $\ell = \dim Y$.*

Une *variété de Hadamard* X est une variété riemannienne complète, simplement connexe, de dimension $k \geq 2$ finie et à courbure sectionnelle ≤ 0 . Une telle variété X est homéomorphe à \mathbb{R}^k , un homéomorphisme (faiblement dilatant) étant donné par l'application exponentielle $\exp : T_o X \rightarrow X$, où $o \in X$ est un point base. La contrainte sur les courbures contenue dans l'énoncé est parfois appelée un *pincement* (strictement négatif); dans cet exposé on dira aussi que X et Y sont $(-b^2, -a^2)$ -pincées, ou simplement *pincées* lorsqu'il existe de tels $a, b > 0$.

La propriété de *plongement quasi-isométrique* qui apparaît dans l'énoncé signifie que pour tous $x, x' \in X$,

$$(1.1) \quad \frac{1}{c} d_X(x, x') - C \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq c d_X(x, x') + C$$

où d_X, d_Y sont les fonctions distance sur X et Y . Une isométrie correspond à $(c, C) = (1, 0)$; en général $c \geq 1$ et $C \geq 0$.

Une application est dite *harmonique* si elle minimise localement l'énergie calculée en intégrant la norme L^2 de la différentielle; nous reviendrons sur cette notion dans les rappels de la partie 3.

2. HISTOIRE ET CONTEXTE

Eells et Sampson ont montré dans [ES64] que toute application lisse entre variétés riemanniennes compactes à courbure négative est homotope à une application harmonique ; leur argument consistait à déformer l'application selon le *flot de la chaleur*. Le théorème 1.1 remplace l'hypothèse de cocompacité par une hypothèse de quasi-isométrie. Notons au passage que l'application h qu'il produit n'est pas toujours injective [FOR00].

Régularité au bord

La question à laquelle répond le théorème 1.1 a d'abord émergé dans le contexte des applications quasi-conformes φ du bord d'un espace symétrique de rang un dans lui-même. Bien que leur incidence sur le théorème proprement dit ne soit qu'historique, attardons-nous brièvement sur ces questions de régularité au bord.

Une variété de Hadamard pincée X est en particulier un espace Gromov-hyperbolique, et admet donc un bord idéal $\partial_\infty X$. Ce bord est une sphère topologique, munie d'une classe naturelle de métriques (mutuellement Hölder-équivalentes) dont on peut fixer une représentante. Pour Y une autre variété de Hadamard pincée, et $\varphi : \partial_\infty X \rightarrow \partial_\infty Y$ continue, notons

$$Q_\varphi^r(\xi) := \max_{d(\xi', \xi) \leq r} d(\varphi(\xi'), \varphi(\xi)) \quad \text{et} \quad q_\varphi^r(\xi) := \min_{d(\xi', \xi) \geq r} d(\varphi(\xi'), \varphi(\xi))$$

où $\xi \in \partial_\infty X$ et $r > 0$. Considérons alors les propriétés suivantes :

- (i) φ est *quasi-symétrique* : pour tous $0 < r < R$, le rapport $\frac{Q_\varphi^R(\xi)}{q_\varphi^r(\xi)}$ est majoré par une fonction continue de $\frac{R}{r}$ indépendante de ξ ;
- (ii) φ est *quasi-conforme* : $\sup_{\xi \in \partial_\infty X} \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{Q_\varphi^r(\xi)}{q_\varphi^r(\xi)} < \infty$;
- (iii) φ prolonge continûment un plongement quasi-isométrique $X \xrightarrow{f} Y$;
- (iv) on a (iii) et $f : X \rightarrow Y$ peut de plus être choisie harmonique.

Les notions (i) et (ii) ne dépendent pas des métriques représentantes choisies sur $\partial_\infty X$ et $\partial_\infty Y$. L'implication (i) \Rightarrow (ii) est évidente.

Pour X, Y des espaces symétriques réels de rang un, la réciproque est vraie ([P89], voir aussi [HK98]) : (i) \Leftrightarrow (ii). Le cas général reste ouvert.

Les propriétés (iii) et (iv) sont en fait équivalentes à (i). L'implication (iii) \Rightarrow (i) est un résultat classique de Gromov [Gr87, §7], préexistant dans [M73]. La réciproque, plus difficile, est due à Bonk et Schramm [BS00]. (Quand $X = Y$ est un espace symétrique de rang un, cette réciproque remonte à un argument de Tukia [T85] ; Paulin [Pa96] en donnait une version pour les graphes de Cayley de groupes hyperboliques.) L'implication (iii) \Rightarrow (iv), dont la réciproque est triviale, équivaut à la partie « existence » du théorème 1.1.

Genèse du problème

Schoen conjecturait dans [Sc93] que *toute application quasi-symétrique du cercle $\partial_\infty\mathbb{H}^2$ dans lui-même étend un unique difféomorphisme quasi-conforme harmonique de \mathbb{H}^2* . Dans [LW98], Li et Wang observaient qu'on peut remplacer « *difféomorphisme quasi-conforme* » par « *quasi-isométrie* », et étendaient conjecturalement ce nouvel énoncé à tout espace symétrique⁽¹⁾ de rang réel 1. Ils montraient en outre l'unicité de l'extension harmonique quasi-isométrique (si elle existe), d'après un argument de Li et Tam [LT98] que nous reprendrons à la partie 5. Sans hypothèse de quasi-isométrie, pas d'unicité : l'identité du demi-plan supérieur \mathbb{H}^2 et l'application harmonique $x + iy \mapsto x + i \sinh(y)$ ont le même prolongement continu à $\partial_\infty\mathbb{H}^2$.

La conjecture de Schoen était donc ramenée à l'implication (i) \Rightarrow (iv) pour $X = Y = \mathbb{H}^2$. Par ailleurs, Pansu montrait dès [P89] que l'extension (existe et) est isométrique dès que $X = Y$ est un espace hyperbolique quaternionique ou octonionique.

Progrès récents

La conjecture de Schoen a été finalement montrée par Markovic dans [M17]. Il avait auparavant résolu dans [M15] le cas de \mathbb{H}^3 , plus favorable en ce qu'il respecte le principe de rigidité de Mostow : toute application quasi-conforme du bord $\partial_\infty\mathbb{H}^3 \simeq \mathbb{S}^2$ dans lui-même est différentiable presque partout. Le cas de \mathbb{H}^n (pour $n \geq 3$) est traité dans [LM18], et le cas où X, Y sont des espaces symétriques de rang 1 quelconques (éventuellement distincts) dans [BH17a]. Ce dernier résultat prouve en particulier la conjecture de Li-Wang.

Ces progrès récents, ainsi que le théorème 1.1 qui les contient tous, peuvent être vus comme des épures successives d'un même argument d'existence, avec cependant d'importantes différences techniques. Les difficultés liées à la courbure variable dans une variété de Hadamard pincée X sont maintenant absorbées par [BH17c], dont le résultat principal (th. 3.6 ci-dessous) permet de comparer les mesures visuelle et harmonique sur une sphère de X , indépendamment de son rayon. Ces inégalités sont un pendant fini de [KL90], qui donnait des estimations analogues sur la sphère à l'infini.

La jeune postérité de ces arguments d'existence comprend déjà des prépublications offrant plusieurs directions de généralisation. Dans [SW18], Sidler et Wenger donnent une version du théorème 1.1 (sans l'unicité, qui peut être mise en défaut) dans laquelle l'espace but Y est un espace Gromov-hyperbolique CAT(0) localement compact. La notion d'application harmonique dans ce contexte est due à Korevaar et Schoen [KS93].

Dans [PS17], Pankka et Souto étendent les arguments de [BH17a] pour montrer que toute application *quasi-régulière* $\varphi : \partial_\infty\mathbb{H}^n \rightarrow \partial_\infty\mathbb{H}^n$ étend continûment une application harmonique $f : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$. La quasi-régularité est une généralisation de la quasi-conformité, pour des applications qui ne sont pas nécessairement des homéomorphismes.

⁽¹⁾Tous les espaces symétriques rencontrés dans cet exposé seront implicitement supposés de type non compact.

Résultats voisins

Le théorème 1.1 peut aussi être rapproché du lemme de Morse [M21, Gr87], correspondant à $X = \mathbb{R}$: *tout plongement quasi-isométrique de la droite dans une variété de Hadamard pincée Y est à distance bornée d'une géodésique*. En effet, les applications harmoniques (non constantes) de la droite dans une variété riemannienne sont les géodésiques paramétrées à vitesse uniforme. Dans le lemme de Morse cependant, il peut être nécessaire de reparamétriser la géodésique (i.e. le théorème 1.1 ne s'étend pas littéralement au cas $X = \mathbb{R}$).

Il est concevable qu'on puisse affaiblir les hypothèses de pincement dans le théorème 1.1. Sans elles cependant, le lemme de Morse devient faux, même s'il subsiste sous une forme atténuée pour Y un espace symétrique irréductible de rang supérieur : voir [KLP14, G17].

En revanche, si X et Y sont tous deux des espaces symétriques irréductibles de rang supérieur, alors tout plongement quasi-isométrique $f : X \rightarrow Y$ est à distance bornée d'un plongement isométrique (à un changement d'échelle près). Ce résultat est dû à Kleiner-Leeb [KL97] ; voir aussi Eskin-Farb [EF97].

Étendre harmoniquement une fonction *scalaire* φ définie sur le bord d'une variété de Hadamard pincée, c'est possible sans autre hypothèse que la continuité de φ : ce résultat est dû indépendamment à Anderson et Sullivan [And84, Su84]. Pour φ à valeurs dans le bord d'une autre variété de Hadamard, la situation est moins favorable : bien qu'il y ait existence et unicité des extensions harmoniques pour φ lisse, dans [M15] Markovic exhibe une suite de difféomorphismes du cercle qui convergent uniformément vers l'identité mais dont les extensions harmoniques au disque n'ont pas de limite continue. Une hypothèse plus forte que la continuité est donc bien nécessaire dans la conjecture de Schoen, du moins si l'on veut que le prolongement dépende continûment de la donnée. L'introduction de [LW98] contient de plus amples références.

3. NOTATIONS ET RAPPELS

Dans tout l'exposé, pour X une variété de Hadamard, $x, y, z \in X$ et $r > 0$, on notera :

- $\mathbb{B}_X(x, r)$ ou $\mathbb{B}(x, r)$ la boule de centre x et de rayon r ;
- $\angle_x(y, z) \in [0, \pi]$ l'angle formé en x (supposé distinct de y et z) par les rayons géodésiques $[xy]$ et $[xz]$.

3.1. Fonctions et applications harmoniques

Une application $f : X \rightarrow Y$ de classe \mathcal{C}^2 entre variétés riemanniennes admet un *laplacien*

$$\Delta f : X \rightarrow TY$$

tel que $\Delta f(x) \in T_{f(x)}Y$ pour tout $x \in X$: par définition, Δ est la trace du carré de l'opérateur de différentiation D . Intuitivement, $\Delta f(x)$ mesure l'écart (de second ordre)

entre f et son approximation par l'application tangente $D_x f$, moyenné sur une petite boule centrée en x . Le flot de la chaleur dont il a été question plus haut consiste à déformer f dans la direction de Δf .

3.1.1. Définitions. — Concrètement, on peut munir un voisinage de $x \in X$ d'un système de coordonnées *osculatrices* (ξ_1, \dots, ξ_k) dans lequel la forme quadratique donnant la métrique est constante au premier ordre, égale à

$$\sum_{1 \leq i < j \leq k} (\delta_{ij} + o(|\xi|)) d\xi_i d\xi_j$$

près du point $(0, \dots, 0)$ représentant x : par exemple, l'application exponentielle $\exp_x : T_x X \rightarrow X$ envoie les coordonnées orthonormées de l'espace vectoriel $T_x X$ sur un tel système. En munissant un voisinage de $y = f(x) \in Y$ d'un système de coordonnées $(\eta_1, \dots, \eta_\ell)$ satisfaisant la même propriété pour Y , et quitte à noter (f_1, \dots, f_ℓ) les composantes de f selon ces coordonnées, on peut exprimer

$$\Delta f(x) = \sum_{j=1}^{\ell} \left(\sum_{i=1}^k \frac{\partial^2 f_j}{\partial \xi_i^2} \right) \frac{\partial}{\partial \eta_j}.$$

L'expression dans un système de coordonnées quelconque devient plus compliquée, mais en tout état de cause la formule de $\Delta f(x)$ dépend uniquement du 2-jet de f en x , et des 1-jets des métriques en x et $f(x)$. Pour f une fonction scalaire ($Y = \mathbb{R}$), elle prend la forme

$$\Delta f = \frac{1}{v} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$$

où (g_{ij}) est le tenseur métrique, (g^{ij}) son inverse, et $v = \sqrt{\det(g_{ij})}$ l'élément de volume de X .

DÉFINITION 3.1. — *L'application f est harmonique si $\Delta f = 0$. Cela correspond au fait que f est un point critique (pour les perturbations à support compact) de l'énergie L^2 , définie comme $\int_X \|Df\|^2$.*

Le *problème de Dirichlet* consiste à trouver une application harmonique sur un domaine B (ouvert borné) lorsqu'on connaît sa restriction à ∂B . Il admet toujours une unique solution sur les variétés de Hadamard : cela provient par convergence faible du fait que l'énergie L^2 est une fonctionnelle convexe, car en courbure négative chaque distance $d_Y(f(x), f(x'))$ est une fonction convexe de l'application f (pour l'interpolation géodésique entre applications).

Le cas $Y = \mathbb{R}$, correspondant au laplacien ordinaire, est d'un intérêt particulier. Une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée

- *harmonique* si $\Delta f = 0$,
- *sous-harmonique* si $\Delta f \geq 0$,
- *super-harmonique* si $\Delta f \leq 0$.

Cette convention se justifie par le fait que si B est un domaine ouvert borné de X , trois fonctions $f, f^-, f^+ : B \rightarrow \mathbb{R}$ coïncidant au bord de B et telles que $\Delta f = 0$ et $\Delta f^- \geq 0 \geq \Delta f^+$ satisfont toujours

$$f^- \leq f \leq f^+.$$

Aussi, une manière puissante de borner une fonction harmonique inconnue sur B est de trouver des « barrières » sous-harmoniques et super-harmoniques qui l’encadrent sur ∂B (donc sur B).

3.1.2. Estimations harmoniques. — Les quelques lemmes suivants sont une source naturelle de barrières.

LEMME 3.2 ([BH17a, lem. 2.5]). — *Si la courbure sectionnelle est $\leq -a^2$, alors la fonction distance $\varphi = d(o, \cdot)$ vérifie $\Delta\varphi \geq a$.*

LEMME 3.3 ([BH17a, lem. 3.2]). — *Si $h : X \rightarrow Y$ est une application harmonique (partiellement définie) entre variétés de Hadamard, et $\varphi : Y \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe, alors $\varphi \circ h$ est sous-harmonique. Par exemple, pour tout $y \in Y$ la fonction $d(y, h(\cdot))$ est sous-harmonique sur X .*

LEMME 3.4 ([BH17c, cor. 2.2]). — *Sur une variété de Hadamard à courbure strictement négative pincée, étant donné $\lambda > 0$, la fonction $\varphi := e^{-\lambda d(x, \cdot)}$ est*

- (i) *super-harmonique pour λ assez petit ;*
- (ii) *sous-harmonique hors d’un petit voisinage de x pour λ assez grand.*

Les bornes sur λ peuvent être rendues explicites en fonction de la dimension et des constantes de courbure.

La propriété suivante, tirée de [C80], est analogue à l’inégalité de Schwarz rencontrée en analyse complexe.

LEMME 3.5. — *Si $h : X \rightarrow Y$ est une application harmonique entre variétés de Hadamard pincées, définie sur une boule $B = \mathbb{B}_X(x, 1)$, alors*

$$\frac{\|Dh(x)\|}{\text{diam}(h(B))} = O(1).$$

Cette borne peut être rendue explicite en fonction de la dimension et des constantes de courbure.

Rappelons aussi qu’une fonction sous-harmonique f définie sur un ouvert connexe satisfait le *principe du maximum* : si f atteint son supremum alors f est constante.

3.1.3. Mesures harmoniques. — Soit $B \subset X$ un ouvert borné à bord lisse. Tout point x de B définit une mesure σ_x^B sur ∂B caractérisée par la propriété suivante : quelle que soit $f : \overline{B} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et harmonique sur B ,

$$(3.1) \quad f(x) = \int_{\partial B} f \, d\sigma_x^B.$$

La mesure σ_x^B peut être vue comme la mesure de sortie (de B) du mouvement brownien issu de x . Une autre façon de le dire est que l'espérance d'une fonction harmonique, en un point soumis à un mouvement brownien, reste constante au cours du temps. En analyse complexe, on appelle aussi σ_x^B le noyau de Poisson.

La mesure σ_x est intimement liée à la *fonction de Green*

$$G_x^B : B \setminus \{x\} \rightarrow \mathbb{R}^+.$$

Par définition, G_x^B est la solution, au sens des distributions, de l'équation $-\Delta G_x^B = \delta_x$ (mesure de Dirac en x), sous la contrainte $G_x^B|_{\partial B} = 0$. La fonction G_x^B possède en x une singularité en $r^{-(\dim X - 2)}$ (ou en $\log \frac{1}{r}$ si $\dim X = 2$), où r désigne le rayon. Si $B \subset B'$, alors $G_x^B \leq G_x^{B'}$ sur $B \setminus \{x\}$. Le lien avec la mesure harmonique σ_x^B est donné par l'identité

$$(3.2) \quad \frac{d\sigma_x^B}{d\lambda_{\partial B}}(y) = \frac{\partial G_x^B(y)}{\partial \hat{n}}$$

pour tout $y \in \partial B$, où \hat{n} désigne la normale rentrante en y , et $d\lambda_{\partial B}$ est la mesure de Lebesgue induite par la métrique riemannienne de X sur l'hypersurface ∂B . L'identité (3.2) s'obtient à partir de (3.1) et de la deuxième identité de Green, ou « intégration par parties »

$$\int_B (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) = \int_{\partial B} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{n}} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \hat{n}} \right) d\lambda_{\partial B}$$

en faisant $\varphi = f$ (fonction test harmonique) et $\psi = G_x^B$.

Pour X un espace symétrique et B une boule de centre x , la mesure σ_x^B coïncide avec la mesure visuelle en x . En courbure variable, cette propriété d'isotropie reste vraie en un sens grossier : dans [BH17c], Benoist et Hulin montrent le résultat de comparaison suivant.

THÉORÈME 3.6. — Soient $0 < a < b$ et $k \geq 2$. Il existe $M, N \geq 1$ tels que pour toute variété de Hadamard $(-b^2, -a^2)$ -pinçée X de dimension k , pour toute boule B de centre $x \in X$ et tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\frac{1}{M} \theta^N \leq \sigma_x^B(C^\theta \cap \partial B) \leq M \theta^{\frac{1}{N}}$$

où C^θ désigne n'importe quel cône de sommet x et d'ouverture θ .

La preuve consiste essentiellement à donner de bonnes estimations de la fonction de Green G_x^B près de ∂B , en la bornant de part et d'autre par des « barrières » sous-harmoniques et super-harmoniques bien choisies. Nous en donnerons une idée plus précise dans la partie 6.

Pour la preuve du théorème 1.1, n'importe quelles bornes > 0 sur $\sigma_x^B(C^\theta \cap \partial B)$ (continues, nulles en $\theta = 0$) feraient l'affaire, du moment qu'elles ne dépendent que de θ et pas du rayon de B . Notons que la troisième mesure portée par ∂B , celle de Lebesgue, peut en courbure variable être très différente de la mesure harmonique σ_x^B et de la mesure visuelle, lorsque la boule B est grande.

Dans [KL90], Kifer et Ledrappier avaient donné des estimations du même type que le théorème 3.6 pour les mesures harmonique et visuelle à l'infini. Malgré ces bornes, ces deux mesures à l'infini sont en général singulières l'une par rapport à l'autre, et même étrangères : c'est par exemple ce qui se produit si X est le revêtement universel d'une surface compacte à courbure strictement négative non constante.

3.2. Géométrie hyperbolique

Toute variété de Hadamard X à courbure pincée est un espace Gromov-hyperbolique : cela signifie qu'il existe $\delta > 0$ (dépendant des constantes de courbure) tel que pour tout triangle ABC de X , le δ -voisinage de l'union des segments AB et AC contienne le segment BC . Voici quelques propriétés de géométrie hyperbolique que nous utiliserons (voir la figure 1).

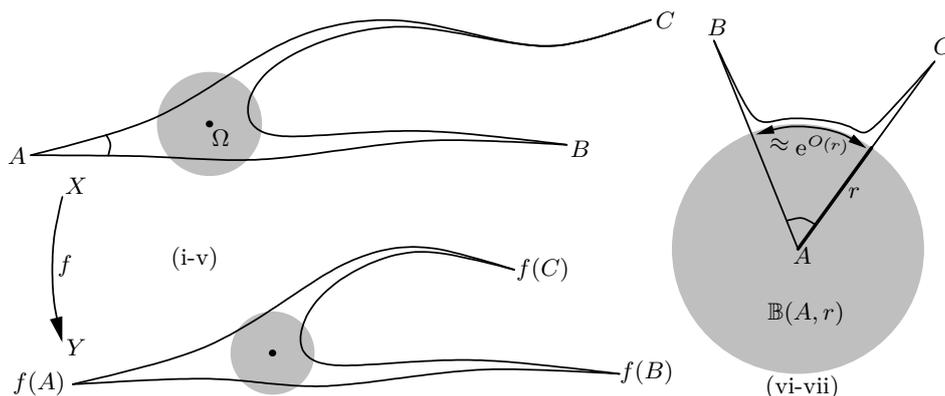


FIGURE 1. Illustration du fait 3.7.(i–vii)

FAIT 3.7. — Soit X un espace Gromov-hyperbolique.

- (i) Tout triplet de points (A, B, C) de X admet un centroïde $\Omega = \mathcal{O}(A, B, C)$, i.e. un point situé à distance bornée de chacun des trois côtés. On a $d(A, B) = d(A, \Omega) + d(\Omega, B) + O(1)$.
- (ii) Ce centroïde est unique à perturbation finie près, i.e. deux fonctions centroïdes $\mathcal{O}, \mathcal{O}' : X^3 \rightarrow X$ restent à distance uniformément bornée l'une de l'autre.
- (iii) Tout plongement quasi-isométrique $f : X \rightarrow Y$ entre espaces Gromov-hyperboliques respecte les centroïdes : $d_Y(f(\mathcal{O}(A, B, C)), \mathcal{O}(f(A), f(B), f(C)))$ est borné indépendamment de $A, B, C \in X$.
- (iv) Si, dans la suite, X est une variété de Hadamard $(-b^2, -a^2)$ -pincée où $0 < a < b$, alors toute minoration de $\angle_A(B, C)$ entraîne une majoration de $d(A, \Omega)$, où $\Omega := \mathcal{O}(A, B, C)$.

- (v) Réciproquement, toute majoration M assez grande de $d(A, \Omega)$ entraîne une minoration de $\angle_A(B, C)$, du moment que les côtés AB et AC sont de longueurs $\geq 2M$.
- (vi) Si $\angle_A(B, C)$ est minoré et $d(A, B), d(A, C) \geq r \geq 1$, alors tout arc de $X \setminus \mathbb{B}(A, r)$ reliant B à C est de longueur au moins $m.e^{ar}$, où $m > 0$ dépend seulement de la minoration de l'angle.
- (vii) Un secteur angulaire de valeur θ intercepte, sur la sphère de rayon r centrée en son sommet, un arc dont la longueur appartient à $[\theta \sinh(ar)/a, \theta \sinh(br)/b]$.

Toutes les estimations d'angles ou de distances contenues dans l'énoncé ci-dessus peuvent être rendues explicites en fonction des constantes de pincement.

L'argument d'unicité du théorème 1.1 fera aussi appel aux estimations CAT (Cartan–Alexandrov–Toponogov) : rappelons qu'une variété de Hadamard X est $(-b^2, -a^2)$ -pincée si, et seulement si, pour tout triangle ABC de X , et pour tous points $P \in [AB]$ et $Q \in [AC]$,

$$d_{\mathbb{H}_b^2}(P^b, Q^b) \leq d_X(P, Q) \leq d_{\mathbb{H}_a^2}(P^a, Q^a)$$

où \mathbb{H}_κ^2 est un plan de courbure constante $-\kappa^2$ et le triangle $A^\kappa B^\kappa C^\kappa$ de \mathbb{H}_κ^2 a les mêmes longueurs de côtés que ABC , avec $P^\kappa \in [A^\kappa B^\kappa]$, $Q^\kappa \in [A^\kappa C^\kappa]$ vérifiant $d(P^\kappa, A^\kappa) = d(P, A)$ et $d(Q^\kappa, A^\kappa) = d(Q, A)$.

Notons enfin que les opérations de barycentre se comportent bien en courbure négative. En conséquence, avant de montrer le théorème 1.1, une étape de lissage par convolution permet de se placer dans le cas où f est continue et c -lipschitzienne (i.e. la partie additive de la borne supérieure de (1.1) peut être omise). On peut de plus supposer que le laplacien de f est borné.

4. EXISTENCE

Cette partie est le cœur de la preuve du théorème 1.1.

Pour $R > 0$, notons h_R le prolongement harmonique de $f|_{\partial \mathcal{B}_R}$ où $\mathcal{B}_R := \mathbb{B}_X(o, R)$. Soit $\rho_R := \max_{x \in \mathcal{B}_R} d(f(x), h_R(x))$, atteint en un point $x_R \in \mathcal{B}_R$.

LEMME 4.1. — On a $\overline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} \rho_R < +\infty$.

Le lemme 4.1 entraîne l'existence dans le théorème 1.1. En effet, il dit que les fonctions harmoniques $h_R : \mathcal{B}_R \rightarrow Y$ restent à distance bornée de $f|_{\mathcal{B}_R}$ quand R tend vers $+\infty$. Par le lemme 3.5, les dérivées premières des h_R restent bornées également, donc par le théorème d'Ascoli une sous-suite $(h_{R_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact. On peut montrer que les dérivées secondes convergent également (c'est une conséquence des estimations a priori, ou estimations de Schauder pour les équations différentielles elliptiques), de sorte que la limite h est harmonique — et, par construction, à distance bornée de f .

Démonstration du lemme 4.1. — Supposons que $\overline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} \rho_R = +\infty$ et cherchons une contradiction. Soit $r_R > 0$ tel que

$$1 \ll r_R \ll \log \rho_R.$$

La stratégie consiste à montrer qu’une proportion non nulle de la sphère $\partial\mathbb{B}_X(x_R, r_R)$ est envoyée par f dans une région proche, vue depuis $f(x_R)$, de la direction dans laquelle se trouve $h_R(x_R)$, et que cela est incompatible avec la propriété de quasi-isométrie de f . La lenteur de la croissance de r_R est commandée, comme on le verra, par les bornes du théorème 3.6.

Estimations de bord

Le résultat suivant montre que la distance de x_R au bord $\partial\mathcal{B}_R$ du domaine est au moins de l’ordre de ρ_R .

LEMME 4.2. — *Il existe $L > 0$ tel que pour tout $R > 0$ et tout $x \in \mathcal{B}_R$,*

$$d_Y(f(x), h_R(x)) \leq L d_X(x, \partial\mathcal{B}_R).$$

Démonstration. — Soit $y \in Y$ un point de la demi-droite $[h_R(x), f(x))$, très loin au delà de $f(x)$ et de tout $f(\mathcal{B}_R)$. Choisissons une grande constante L et soit

$$\varphi(z) := \underbrace{d(y, h_R(z))}_{\varphi_1(z)} - \underbrace{d(y, f(z))}_{\varphi_2(z)} + \underbrace{L(d(o, z) - R)}_{\varphi_3(z)}.$$

On a $\varphi(\partial\mathcal{B}_R) = 0$ et il s’agit de montrer que $\varphi(x) \leq 0$. Il suffit donc de montrer que φ est sous-harmonique ($\Delta\varphi \geq 0$) sur \mathcal{B}_R .

La fonction φ_1 est sous-harmonique par le lemme 3.3, car h est harmonique. La fonction φ_2 est de laplacien borné, par régularité de f sur \mathcal{B}_R et de $d(y, \cdot)$ sur $f(\mathcal{B}_R)$. Comme le laplacien de $d(o, \cdot)$ est minoré par la constante de pincement $a > 0$ de X (lemme 3.2), il suffit de choisir L assez grand pour que $\Delta\varphi \geq 0$. \square

Notons désormais (h, ρ, x, r) pour (h_R, ρ_R, x_R, r_R) : ainsi ρ est simplement une distance arbitrairement grande, égale à $d(f(x), h(x))$. On rappelle $1 \ll r \ll \log \rho$. Soit $B_r := \mathbb{B}_X(x, r)$. Comme $\rho > Lr$, le lemme 4.2 implique $B_r \subset \mathcal{B}_R$, i.e. que h est bien définie sur B_r .

Estimations intérieures

Montrons maintenant que ρ ne saurait être arbitrairement grand. La fonction

$$\begin{aligned} B_r &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \rho_h : z &\longmapsto d_Y(f(x), h(z)) \end{aligned}$$

est sous-harmonique, par le lemme 3.3. Elle satisfait $\rho_h(x) = \rho$. Par maximalité de ρ , tout point de $h(B_r)$ se trouve à distance au plus ρ d’un point de $f(B_r) \subset \mathbb{B}_Y(f(x), rc)$: donc $\rho_h \leq \rho + rc$ par l’inégalité triangulaire.

Par ailleurs on a $\rho_h(B_r) \geq \rho/2$: en effet, s’il en allait autrement, comme par le lemme 3.5 l’application h est $O(\rho)$ -lipschitzienne sur B_r , la fonction ρ_h resterait $\leq 3\rho/4$

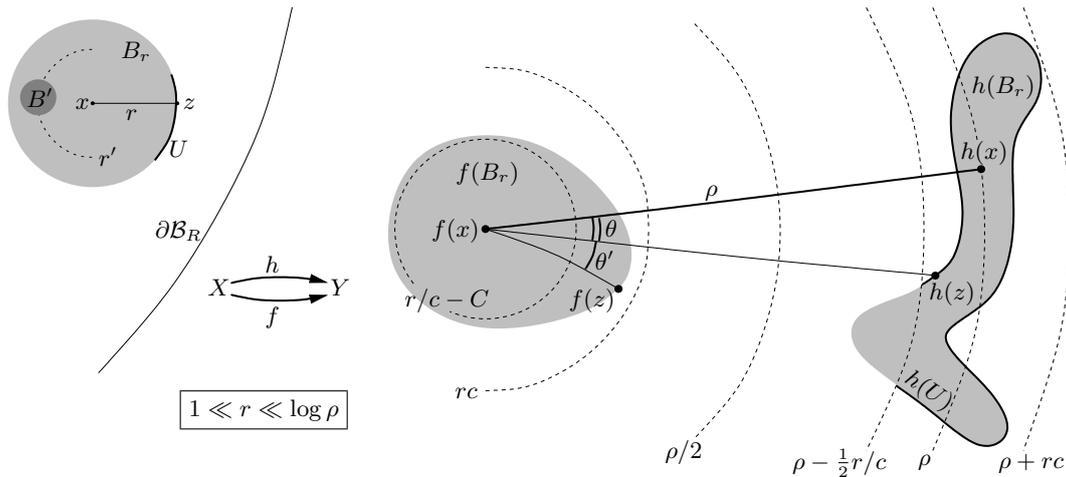


FIGURE 2. Estimation de $\angle_{f(x)}(f(z), h(x))$. Les cercles pointillés indiquent la distance à $f(x)$. On rappelle que f est (c, C) -quasi-isométrique et c -lipschitzienne.

sur une boule $B' \subset B_r$ de rayon ≈ 1 . Étant centrée en un point à distance $r' \leq r$ de x , la boule B' occupe un angle d'ordre au moins e^{-br} dans la sphère visuelle de x (fait 3.7.vii). Cela représente une portion d'ordre au moins $e^{-b'r}$ de $\partial B_{r'}$ pour la mesure harmonique, par les estimations (M, N) du théorème 3.6 (tout $b' > Nb$ fait l'affaire dès que r est assez grand). On a alors par sous-harmonicité de ρ_h

$$\rho = \rho_h(x) \leq \int_{\partial B_{r'}} \rho_h d\sigma_x^{B_{r'}} \leq (\rho + cr) + e^{-b'r}(-\rho/4)$$

d'où $\rho \leq 4e^{b'r}cr$, qui est exclu puisque $r \ll \log \rho$.

Par conséquent, pour tout $z \in B_r$ l'angle $\theta := \angle_{f(x)}(h(x), h(z))$ est petit : s'il était minoré (indépendamment de ρ) alors l'image par h du segment $[xz]$, étant extérieure à $\mathbb{B}_Y(f(x), \rho/2)$, serait de longueur exponentielle en ρ (fait 3.7.vi), or $h|_{B_r}$ est $O(\rho)$ -lipschitzienne par le lemme 3.5.

Montrons encore que $\theta' := \angle_{f(x)}(h(z), f(z))$ est petit pour z dans

$$U := \{z \in \partial B_r \mid \rho_h(z) \geq \rho - \frac{1}{2}r/c\}.$$

Si θ' était minoré indépendamment de ρ pour quelque $z \in U$, on aurait par le fait 3.7.iv et 3.7.i

$$\begin{aligned} d(h(z), f(z)) &\geq d(h(z), f(x)) + d(f(x), f(z)) - O(1) \\ &\geq \rho + \frac{1}{2}r/c - O(1) > \rho \end{aligned}$$

(car $r \gg 1$), qui est impossible par maximalité de ρ .

Ainsi $\angle_{f(x)}(h(x), f(z)) \leq \theta + \theta'$ est petit pour tout $z \in U$. Mais la proportion u de ∂B_r occupée par U , pour la mesure harmonique $d\sigma_x^{B_r}$, est minorée indépendamment de ρ : en effet, par sous-harmonicité de ρ_h

$$\rho = \rho_h(x) \leq \int_{\partial B_r} \rho_h d\sigma_x^{B_r} \leq (1 - u)(\rho - \frac{1}{2}r/c) + u(\rho + rc)$$

d'où $u \geq (1 + 2c^2)^{-1}$.

Par conséquent (théorème 3.6), U n'est pas confiné à une petite boule de ∂B_r pour la mesure visuelle : il existe $z, z' \in U$ tels que l'angle $\angle_x(z, z')$ soit minoré indépendamment de ρ . Alors le centroïde $\mathcal{O}(x, z, z')$ est à distance majorée de x (fait 3.7.iv), donc $\mathcal{O}(f(x), f(z), f(z'))$ est à distance majorée de $f(x)$ (fait 3.7.iii). Il s'ensuit que l'angle $\angle_{f(x)}(f(z), f(z'))$ est aussi minoré (fait 3.7.v) : or on a vu que $\angle_{f(x)}(h(x), f(z))$ et $\angle_{f(x)}(h(x), f(z'))$ devaient être petits ; contradiction. Le lemme 4.1 est démontré. \square

5. UNICITÉ

L'unicité dans le théorème 1.1 procède d'un argument qui remonte à [LT98] et [LW98]. Il occupe près de la moitié de la longueur de [BH17b] ; cette technicité est due à des questions d'extraction de limites géométriques qui s'évanouissent en grande partie quand X et Y sont des espaces homogènes. Soient $h_0, h_1 : X \rightarrow Y$ deux plongements quasi-isométriques harmoniques entre variétés de Hadamard pincées, tels que $\varphi(x) := d(h_0(x), h_1(x))$ vérifie $\delta := \sup_X \varphi < \infty$. Supposons, par l'absurde, que $h_0 \neq h_1$, i.e. que $\delta > 0$.

Interpolations partielles

Rappelons que toute application harmonique minimise localement l'énergie L^2 , et que cette fonctionnelle énergie est une fonction convexe pour l'interpolation géodésique entre applications (par convexité de la fonction distance). Cette convexité de la fonctionnelle permettrait de montrer l'unicité si h_0, h_1 étaient égales hors d'un compact. Comme ce n'est pas le cas, nous utiliserons une forme d'interpolation partielle.

Supposons tout d'abord que φ *atteigne* son extremum δ . La fonction φ , en tant que composée de $(h_0, h_1) : X \rightarrow Y \times Y$ (harmonique) et de $d_Y : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}^+$ (convexe), est sous-harmonique par le lemme 3.3. Le principe du maximum dit alors que φ est *constante* : $\varphi \equiv \delta$.

Pour tout $t \in [0, 1]$, soit $h_t(x)$ le point du segment géodésique $[h_0(x), h_1(x)]$ situé à distance $t\delta$ de $h_0(x)$. Soit $(x, V) \in T(X)$: la convexité de la fonction distance entraîne que

$$\Phi_t^V := \|dh_t(V)\|^2 \text{ est une fonction convexe de } t \in [0, 1].$$

L'unicité dans le théorème 1.1 découle du raffinement suivant :

PROPOSITION 5.1. — Φ_t^V est une fonction affine de $t \in [0, 1]$.

En effet, en courbure strictement négative, un tel comportement n'est possible que si h_0 et h_1 sont à valeurs dans une même droite (et égales à une translation de la droite près, puisque $\varphi \equiv \delta$). Cela est impossible quand h_0, h_1 sont des plongements quasi-isométriques de la variété de Hadamard X , dont la dimension est $k \geq 2$.

Preuve de la proposition 5.1. — Soit $\eta : X \rightarrow [0, 1]$ une fonction lisse, à support compact contenant x . Pour $0 < \varepsilon < 1/2$, considérons les interpolations partielles

$$f_\varepsilon(x) := h_{\varepsilon\eta(x)}(x) \quad \text{et} \quad g_\varepsilon(x) := h_{1-\varepsilon\eta(x)}(x).$$

La différentiation donne

$$\begin{aligned} df_\varepsilon(V) &= dh_{\varepsilon\eta(x)}(V) + \varepsilon d\eta(V) \left. \frac{\partial h_t(x)}{\partial t} \right|_{t=\varepsilon\eta(x)} \\ dg_\varepsilon(V) &= dh_{1-\varepsilon\eta(x)}(V) - \varepsilon d\eta(V) \left. \frac{\partial h_t(x)}{\partial t} \right|_{t=1-\varepsilon\eta(x)}. \end{aligned}$$

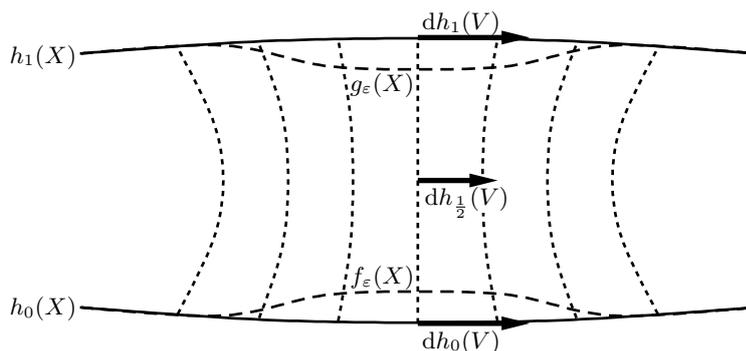


FIGURE 3. Interpolation locale en courbure négative : sauf cas dégénérés, $t \mapsto \Phi_t^V = \|dh_t(V)\|^2$ est *strictement* convexe.

Or la propriété $\varphi \equiv \delta$ (dans un voisinage de x) entraîne que le produit scalaire de $dh_t(V)$ et $\frac{\partial h_t(x)}{\partial t}$ est indépendant de t . On obtient donc

$$\begin{aligned} \|df_\varepsilon(V)\|^2 + \|dg_\varepsilon(V)\|^2 &= \Phi_{\varepsilon\eta(x)}^V + \Phi_{1-\varepsilon\eta(x)}^V + 2\varepsilon^2 \|d\eta(V)\|^2 \delta^2 \\ &\leq \Phi_0^V + \Phi_1^V - 2\varepsilon\eta(x) \underbrace{(\Phi_0^V + \Phi_1^V - 2\Phi_{1/2}^V)}_{=:\Psi^V \geq 0} + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

par convexité de Φ . Il suffit de montrer que le terme noté Ψ^V est nul : supposons $\Psi^V > 0$. Cette inégalité reste vraie pour de petites perturbations de (x, V) . Or l'énergie $E(h)$ d'une fonction h sur le support \mathcal{U} de η est l'intégrale de $\|dh(V)\|^2$ sur le fibré unitaire tangent de \mathcal{U} . Intégrée, l'inégalité précédente donne donc (en prenant ε assez petit pour pouvoir négliger le terme quadratique)

$$E(f_\varepsilon) + E(g_\varepsilon) \leq E(h_0) + E(h_1).$$

Comme h_0 et h_1 minimisent localement l'énergie, il y a égalité et finalement $\Psi^V \equiv 0$. \square

Limites géométriques

Dans le cas où la fonction φ n'atteindrait pas son supremum δ , la stratégie est de se ramener au cas précédent par un argument de limites géométriques. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de X telle que $d(h_0(x_n), h_1(x_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \delta$. Plaçons les points base de X, Y en x_n et $y_n := h_0(x_n)$. On peut extraire de la suite d'espaces métriques pointés (X, x_n) une limite géométrique (X^∞, x^∞) , au sens de Gromov-Hausdorff, qui est encore un espace métrique pointé propre (i.e. dont les boules fermées sont compactes). Cet argument

d'extraction, très général et dû à Cheeger–Gromov, repose uniquement sur la propriété suivante (conséquence ici des bornes inférieures de courbure) : *pour tous $R, \varepsilon > 0$ il existe N tel que pour tout n , la boule $\mathbb{B}_X(x_n, R)$ soit recouverte par au plus N boules de rayon ε .*

On peut de même extraire une limite (Y^∞, y^∞) . Comme h_0 est harmonique et quasi-isométrique, elle est lipschitzienne par le lemme 3.5, et on peut encore extraire une application limite $h_0^\infty : (X^\infty, x^\infty) \rightarrow (Y^\infty, y^\infty)$ de même constante de Lipschitz que h_0 , ainsi qu'une autre application $h_1^\infty : X^\infty \rightarrow Y^\infty$ à distance $\leq \delta$ de la première. Par construction, $d(h_0^\infty(x^\infty), h_1^\infty(x^\infty)) = \delta$. Il reste donc uniquement à s'assurer que X^∞, Y^∞ sont bien des variétés de Hadamard pincées, et que h_0^∞, h_1^∞ sont bien harmoniques.

L'outil principal est l'existence d'un système de *cartes* uniformément régulières de X et Y , dans lesquelles les tenseurs métriques et les applications h_0, h_1 admettent aussi des expressions uniformément régulières. Plus exactement, le pincement de la courbure assure pour tout $0 < \alpha < 1$ l'existence d'un atlas de X tel que :

- (i) les cartes sont des boules de rayons uniformes ;
- (ii) les changements de cartes sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$;
- (iii) les tenseurs métriques sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^{1,\alpha}$;
- (iv) les symboles de Christoffel sont de classe $\mathcal{C}^{0,\alpha}$ (i.e. α -höldériens) ;
- (v) toutes les normes $\mathcal{C}^{i,\alpha}$ qui précèdent sont uniformément bornées.

De telles cartes, sous une hypothèse de lissité \mathcal{C}^∞ (non uniforme) de X qu'on peut probablement affaiblir, sont construites dans [J84, Pe94] (en prenant pour fonctions coordonnées des fonctions harmoniques).

Les bornes (v) assurent une propriété d'équicontinuité : une sous-suite d'atlas converge vers un atlas de X^∞ ayant les mêmes propriétés de régularité. La même chose vaut pour Y^∞ .

Comme on l'a observé à la partie 3.1.1, la régularité (ii-iii) est suffisante pour donner un sens à la notion d'application harmonique $X^\infty \rightarrow Y^\infty$. Les applications lipschitziennes et harmoniques $h_0, h_1 : X \rightarrow Y$ sont soumises à des *estimations a priori* (ou estimations de Schauder, déjà rencontrées plus haut, pour les équations différentielles elliptiques) qui montrent qu'elles sont *uniformément* $\mathcal{C}^{2,\alpha}$. Par uniformité, h_0^∞ et h_1^∞ héritent de la même régularité, et sont encore harmoniques.

La régularité (iii) du tenseur métrique est en revanche insuffisante (de justesse) pour appliquer la définition différentielle de la courbure sectionnelle à la limite. Cependant, les inégalités de pincement CAT- $(-b^2, -a^2)$ auxquelles sont soumis les espaces X, Y sont héritées par les limites X^∞, Y^∞ . La borne inférieure $-b^2$ assure notamment l'unicité des géodésiques. Cela s'avère suffisant pour faire fonctionner l'argument d'interpolation partielle comme dans le cas lisse.

6. ESTIMATION DES MESURES HARMONIQUES

Nous donnons ici les grandes idées de la preuve du théorème 3.6, tirée de [BH17c]. Pour $u, v > 0$, nous utiliserons la notation $u \lesssim v$ pour signifier que $u \leq Mv$ où M est une constante dépendant des constantes de pincement, de la dimension, ainsi que d'éventuels paramètres supplémentaires placés en indice : par exemple $u \lesssim_\varepsilon v$. On notera $u \approx v$ quand $u \lesssim v$ et $u \gtrsim v$.

Rappelons l'inégalité de Harnack [LW02] :

PROPOSITION 6.1. — *Soit $\varepsilon > 0$ et soit X une variété de Hadamard à courbure $\geq -b^2$. Il existe $H > 0$ tel que toute fonction harmonique $h > 0$ définie dans un ε -voisinage d'un segment $[x, x']$ de X vérifie*

$$e^{-Hd(x,x')} \leq \frac{h(x')}{h(x)} \leq e^{Hd(x,x')}.$$

Un autre ingrédient essentiel est la barrière d'Anderson-Schoen, sorte de variante du lemme 3.4.(i) :

PROPOSITION 6.2. — *Sur une variété de Hadamard X pincée, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout rayon géodésique $[xy]$ de X , il existe une fonction super-harmonique $u_{[xy]} > 0$ sur X vérifiant*

- (i) $u_{[xy]}(z) \geq 1$ quand $\angle_x(y, z) \leq \frac{\pi}{2}$;
- (ii) $u_{[xy]}(z) \lesssim e^{-\delta d(x,z)}$ quand $\angle_x(y, z) = \pi$.

Une inégalité d'Ancona [Anc87], valable sur les variétés de Hadamard pincées, dit qu'étant donnés deux rayons $0 < r < r'$, une fonction de Green définie sur un r' -voisinage de son pôle x est $\approx_{r,r'} 1$ à distance r de x . On utilisera aussi les propriétés suivantes, qui en sont une conséquence. Rappelons que G_x^B désigne la fonction de Green de pôle x définie sur un domaine B , et \hat{n} la normale rentrante en un point de ∂B .

PROPOSITION 6.3. — *Soient $0 < a < b$, soit X une variété de Hadamard $(-b^2, -a^2)$ -pincée et soit $\varepsilon > 0$. Pour toute boule $B \subset X$ de rayon $R > 1$ et tous $(x, \xi) \in B \times \partial B$,*

- (i) si $d(x, \xi) \geq \varepsilon$ alors $\frac{\partial G_x^B}{\partial \hat{n}}(\xi) \lesssim_\varepsilon 1$;
- (ii) si $d(x, \xi) \leq \frac{1}{\varepsilon}$ et $d(x, \partial B) \geq \varepsilon$ alors $\frac{\partial G_x^B}{\partial \hat{n}}(\xi) \gtrsim_\varepsilon 1$.

Démonstration. — Choisissons $\lambda > 0$, grand au sens du lemme 3.4.(ii) : pour tout $p \in X$, la fonction $e^{-\lambda d(p, \cdot)}$ est sous-harmonique hors de $\mathbb{B}(p, \frac{1}{2})$. On a $\lambda \approx 1$. Soit B^\pm la boule concentrique à B , de rayon $R \pm 1$.

Pour (i), soit $p \in \partial B^+$ tel que $d(p, \xi) = 1$. Il suffit de montrer que près de ξ on a $G_x^B \lesssim_\varepsilon \varphi := e^{-\lambda} - e^{-\lambda d(p, \cdot)}$ (qui s'annule en ξ). Par les estimations d'Ancona, $G_x^{B^+} \lesssim_\varepsilon 1$ sur le bord de $\mathcal{U} := \mathbb{B}(x, \frac{\varepsilon}{2})$; a fortiori $G_x^B \lesssim_\varepsilon 1$ sur $\partial \mathcal{U}$. Donc $G_x^B \lesssim_\varepsilon \varphi$ sur $\partial \mathcal{U}$. On a aussi $0 = G_x^B \leq \varphi$ sur ∂B . Comme $B \setminus \mathcal{U}$ est inclus dans la région $X \setminus \mathbb{B}(p, \frac{1}{2})$ où φ est super-harmonique, on a $G_x^B \lesssim_\varepsilon \varphi$ sur $B \setminus \mathcal{U}$.

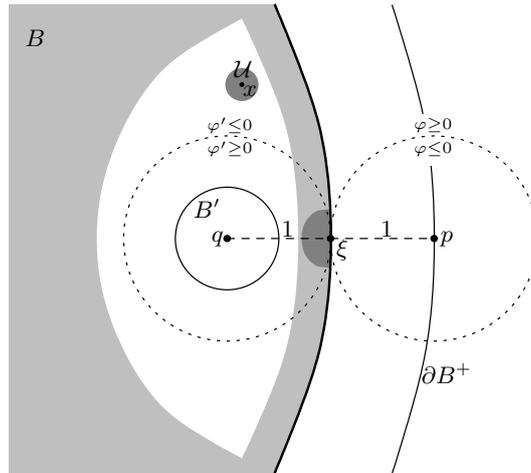


FIGURE 4. Illustration de la proposition 6.3

Pour (ii), soit $q \in \partial B^-$ tel que $d(q, \xi) = 1$. Il suffit de montrer que près de ξ on a $G_x^B \gtrsim_\varepsilon \varphi' := e^{-\lambda d(q, \cdot)} - e^{-\lambda}$ (qui s'annule en ξ). Par les estimations d'Ancona, $G_x^B \gtrsim_\varepsilon 1$ à une petite distance de x , donc quitte à appliquer l'inégalité de Harnack sur un segment de longueur $\lesssim_\varepsilon 1$, on a encore $G_x^B \gtrsim_\varepsilon 1$ sur $\partial B'$, où $B' := \mathbb{B}(q, \frac{1}{2})$. Donc $G_x^B \gtrsim_\varepsilon \varphi'$ sur $\partial B'$. On a aussi $0 = G_x^B \geq \varphi'$ sur ∂B . Comme φ' est sous-harmonique sur $B \setminus B'$, on a $G_x^B \gtrsim_\varepsilon \varphi'$ sur $B \setminus B'$. \square

Soient à présent $B := \mathbb{B}_X(x, R)$ et $\xi \in \partial B$, et $C_{[x\xi]}^\theta$ un cône visuel de sommet x , d'axe $[x\xi]$ et d'angle θ . On notera parfois $C^\theta := C_{[x\xi]}^\theta$. Rappelons que par (3.1)-(3.2), pour tout $x' \in B$, la mesure harmonique $\sigma_{x'}^B$ sur ∂B vérifie

$$(6.1) \quad \sigma_{x'}^B(C^\theta \cap \partial B) = h_R^\theta(x') = \int_{C^\theta \cap \partial B} \frac{\partial G_{x'}^B}{\partial \hat{n}}(\xi) d\xi$$

où $h_R^\theta : B \rightarrow [0, 1]$ est la fonction harmonique qui coïncide sur ∂B avec la fonction caractéristique de C^θ , et où l'intégration se fait par rapport à la mesure de Lebesgue $(k - 1)$ -dimensionnelle de ∂B . Le théorème 3.6 découle de l'égalité de gauche et de l'encadrement suivant.

PROPOSITION 6.4. — Soient $0 < a < b$ et X une variété de Hadamard $(-b^2, -a^2)$ -pincée de dimension k . Soit H une constante de Harnack donnée par la proposition 6.1 pour $\varepsilon = 1$, et soit δ donné par la proposition 6.2. On peut supposer $\frac{\delta}{b} \leq k - 1 \leq \frac{H}{a}$. Alors pour tout cône C^θ de sommet $x \in X$ et d'ouverture θ , et tout $R > 0$,

$$\theta^{H/a} \lesssim h_R^\theta(x) \lesssim \theta^{\delta/b}.$$

Démonstration. — Si R est borné, l'égalité de droite de (6.1) et la proposition 6.3 disent que $h_R^\theta(x)$ est de l'ordre de la mesure de Lebesgue de C^θ dans ∂B , et les estimations trigonométriques (fait 3.7.vii) montrent que celle-ci est de l'ordre de θ^{k-1} : en d'autres termes, la densité relative des mesures visuelle et harmonique sur ∂B est contrôlée, et $h_R^\theta(x) \approx_R \theta^{k-1}$. On suppose donc désormais $R \gg 1$.

Pour θ pas trop petit (en fonction de R), la stratégie est d'estimer $h_R^\theta(x)$ par les propositions 6.1 et 6.2. Pour θ plus petit, on affinera en estimant d'abord, comme ci-dessus, les valeurs de h_R^θ à distance ≈ 1 de ξ , au moyen de (6.1) et de la proposition 6.3.

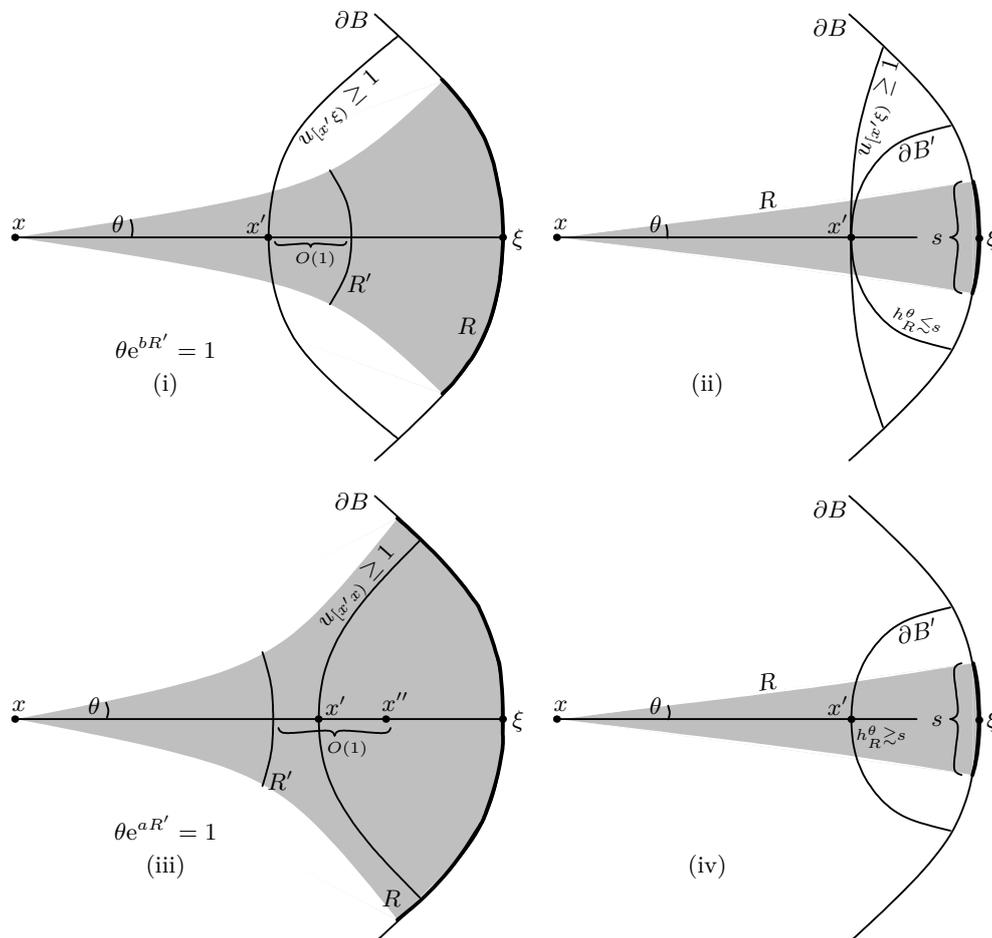


FIGURE 5. Majorations (i–ii) et minorations (iii–iv) de $h_R^\theta(x)$. Le cône $C^\theta = C_{[x\xi]}^\theta$ est grisé.

Majoration de $h_R^\theta(x)$

À distance R , l'écartement atteint par les rayons de C^θ est $\lesssim \theta e^{bR}$. Si ce nombre est ≥ 1 , soit $R' \leq R$ tel que $\theta e^{bR'} = 1$: il existe un point $x' \in [x\xi]$ à distance $R' - O(1)$ de x tel que $C_{[x\xi]}^\theta \cap \partial B \subset C_{[x'\xi]}^{\pi/2} \cap \partial B$ (figure 5.i). La barrière super-harmonique $u_{[x'\xi]} \geq h_R^\theta$ donne

$$h_R^\theta(x) \leq u_{[x'\xi]}(x) \lesssim e^{-\delta R'} = \theta^{\delta/b}.$$

Si au contraire $\theta e^{bR} \leq 1$, il existe $x' \in [x\xi]$ à distance ≈ 1 de ξ tel que la boule $B' := \mathbb{B}(\xi, d(\xi, x'))$ contienne $C^\theta \cap \partial B$ (figure 5.ii). On peut en outre supposer que $\partial B'$ reste à distance $\gtrsim 1$ de $C^\theta \cap \partial B$, dont la mesure de Lebesgue est notée s . On a alors $h_R^\theta \lesssim s$ sur $B \cap \partial B'$, par (6.1) et la proposition 6.3.(i). Ainsi, par super-harmonicité,

$h_R^\theta \lesssim s \cdot u_{[x'\xi]}$ sur $B \setminus B'$. Comme $s \lesssim (\theta e^{bR})^{k-1}$ par les estimations trigonométriques, il vient

$$h_R^\theta(x) \lesssim s \cdot u_{[x'\xi]}(x) \lesssim (\theta e^{bR})^{k-1} e^{-\delta R} = \theta^{k-1} (e^{bR})^{k-1-\frac{\delta}{b}} \leq \theta^{\delta/b}$$

en utilisant $\frac{\delta}{b} \leq k-1$ et $e^{bR} \leq \frac{1}{\theta}$ pour la dernière inégalité.

Minoration de $h_R^\theta(x)$

Soit $R' > 0$ tel que $\theta e^{aR'} = 1$, et supposons d'abord que $R' \leq R - L$, où $L \approx 1$ est un nombre assez grand que nous allons déterminer. À distance R' , l'écartement atteint par les rayons de C^θ est $\gtrsim \theta e^{aR'} = 1$.

Si la marge L est assez grande, on peut trouver $x' \in [x\xi] \cap B$ à distance $R' + O(1)$ de x tel que $C_{[x'\xi]}^{\pi/2} \subset C_{[x\xi]}^\theta$ (figure 5.iii). Pour tout $x'' \in [x', \xi]$, la barrière sous-harmonique $1 - u_{[x'x]} \leq h_R^\theta$ donne

$$h_R^\theta(x'') \geq 1 - u_{[x'x]}(x'').$$

Rappelons que $u_{[x'x]}(x'') \lesssim e^{-\delta d(x', x'')}$. Si la marge L est assez grande, on peut donc prendre $d(x', x'') \approx 1$ assez grand pour que $u_{[x'x]}(x'') \leq \frac{1}{2}$. Alors l'inégalité ci-dessus donne $h_R^\theta(x'') \gtrsim 1$, et l'inégalité de Harnack appliquée au segment $[x, x'']$, de longueur $R' + O(1)$, donne

$$h_R^\theta(x) \gtrsim e^{-HR'} h_R^\theta(x'') \gtrsim e^{-HR'} = \theta^{H/a}.$$

Si au contraire $R' \geq R - L$, i.e. $\theta e^{aR} \leq e^{aL} \approx 1$, soit $x' \in [x\xi]$ tel que $d(x', \xi) = 1$ (figure 5.iv). La boule $B' := \mathbb{B}_X(\xi, 1)$ contient une boule de rayon $\approx \theta e^{aR}$ de ∂B , contenue dans C^θ , de mesure de Lebesgue $s \gtrsim (\theta e^{aR})^{k-1}$. Or $h_R^\theta(x') \gtrsim s$, par (6.1) et la proposition 6.3.(ii). L'inégalité de Harnack appliquée au segment $[x, x']$, de longueur $R - 1$, donne

$$h_R^\theta(x) \gtrsim e^{-HR} h_R^\theta(x') \gtrsim e^{-HR} (\theta e^{aR})^{k-1} = \theta^{k-1} (e^{-aR})^{\frac{H}{a} - (k-1)} \gtrsim \theta^{H/a}$$

en utilisant $\frac{H}{a} \geq k-1$ et $e^{-aR} \gtrsim \theta$ pour la dernière inégalité. \square

REMERCIEMENTS

Je remercie Y. Benoist, M. Bourdon, F. Ledrappier ainsi qu'une incarnation de N. Bourbaki pour leurs précieuses explications et leurs commentaires sur ce texte.

RÉFÉRENCES

- [Anc87] A. ANCONA, *Negatively curved manifolds, elliptic operators, and the Martin boundary*, Ann. of Math. **125** (1987), 495-536.
- [And84] M. ANDERSON, *The Dirichlet problem at infinity for manifolds of negative curvature*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 701-721.
- [AS85] M. ANDERSON, R. SCHOEN, *Positive harmonic functions on complete manifolds of negative curvature*, Ann. of Math. **121** (1985), 429-461.

- [BH17a] Y. BENOIST, D. HULIN, *Quasiisometric harmonic maps between rank one symmetric spaces*, *Annals of Mathematics* **185** (2017), 895-917.
- [BH17b] Y. BENOIST, D. HULIN, *Harmonic quasi-isometric maps II : negatively curved manifolds*, prépublication, arXiv :1702.04369.
- [BH17c] Y. BENOIST, D. HULIN, *Harmonic measures on negatively curved manifolds*, prépublication, www.math.u-psud.fr/~benoist/prepubli/17harmonic3.pdf
- [BS00] M. BONK, O. SCHRAMM, *Embeddings of Gromov hyperbolic spaces*, *Geom. & Funct. Anal.* **10** (2000), 266-306.
- [C80] S. CHENG, *Liouville theorem for harmonic maps*, in *Geometry of the Laplace operator*, Amer. Math. Soc. (1980), 147-151.
- [ES64] J. EELLS, J.H. SAMPSON, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, *Amer. J. Math.* **86** (1964), 109-160.
- [EF97] A. ESKIN, B. FARB, *Quasi-flats and rigidity in higher rank symmetric spaces*, *J. Amer. Math. Soc.* **10** (1997), 653-692.
- [FOR00] F. FARRELL, P. ONTANEDA, M. RAGHUNATHAN, *Non-univalent harmonic maps homotopic to diffeomorphisms*, *J. Diff. Geom.* **54** (2000), 227-253.
- [Gr87] M. GROMOV, *Hyperbolic groups*, dans *Essays in group theory*, MSRI Publ., vol. 8, Springer, New York, 1987.
- [G17] O. GUICHARD, *Groupes convexes-cocompacts en rang supérieur, d'après Labourie, Kapovich, Leeb, Porti,...* Séminaire Bourbaki 1138 (octobre 2017).
- [HK98] J. HEINONEN, P. KOSKELA, *Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry*, *Acta Math.* **181** (1998), 1-61.
- [J84] J. JOST, *Harmonic mappings between Riemannian manifolds*, Proc. Centre Math. Analysis, Australian Nat. Univ., 1984.
- [KL97] B. KLEINER, B. LEEB, *Rigidity of quasi-isometries for symmetric spaces and Euclidean buildings*, *Publ. Math. IHÉS* **86** (1997), 115-197.
- [KLP14] M. KAPOVICH, B. LEEB, J. PORTI, *A Morse Lemma for quasigeodesics in symmetric spaces and euclidean buildings*, prépublication, arXiv :1411.4176
- [KL90] Y. KIFER, F. LEDRAPPIER, *Hausdorff dimension of harmonic measures on negatively curved manifolds*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **318**-2 (1990), 685-704.
- [KS93] N.J. KOREVAAR, R.M. SCHOEN, *Sobolev spaces and harmonic maps for metric space targets*, *Comm. Anal. Geom.* **1.3-4** (1993), 561-659.
- [LM18] M. LEMM, V. MARKOVIC, *Heat flows on hyperbolic spaces*, *J. Differential Geom.* **108**-3 (2018), 495-529.
- [LT98] P. LI, L.-F. TAM, *Uniqueness and regularity of proper harmonic maps II*, *Indiana Univ. Math. J.* **42** (1993), 591-635.
- [LW98] P. LI, J. WANG, *Harmonic rough isometries into Hadamard space*, *Asian J. Math.* **2** (1998), 419-442.
- [LW02] P. LI, J. WANG, *Complete manifolds with positive spectrum II*, *J. Diff. Geom.* **62** (2002), 143-162.

- [M15] V. MARKOVIC, *Harmonic maps between 3-dimensional hyperbolic spaces*, Invent. Math. **199** (2015), 921-951.
- [M17] V. MARKOVIC, *Harmonic maps and the Schoen conjecture*, J. Amer. Math. Soc. **30** (2017), 799-817.
- [M21] H. M. MORSE, *A fundamental class of geodesics on any closed surface of genus greater than one*, Trans. Amer. Math. Soc. **26** (1924), 25-60.
- [M73] G. MOSTOW, *Strong rigidity of locally symmetric spaces*, Ann. Math. Stud. Vol. 78, Princeton Univ. Press, 1973.
- [PS17] P. PANKKA, J. SOUTO, *Harmonic extensions of quasiregular maps*, prépublication arXiv :1711.08287 [math.DG]
- [P89] P. PANSU, *Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un*, Ann. of Math. **129** (1989), 1-60.
- [Pa96] F. PAULIN, *Un groupe hyperbolique est déterminé par son bord*, J. London Math. Soc. **54** (1996), 50-74.
- [Pe94] P. PETERSEN, *Convergence theorems in Riemannian geometry*, Math. Sci. Res. Inst. Publ. **30** (Cambridge Univ. Press 1994), 167-202.
- [Sc93] R. SCHOEN, *The role of harmonic maps in rigidity and deformation problems*, in *Complex geometry* (Dekker 1993), 179-200.
- [SW18] H. SIDLER, S. WENGER, *Harmonic quasi-isometric maps into Gromov hyperbolic $CAT(0)$ -spaces*, prépublication arXiv :1804.06286 [math.DG]
- [Su84] D. SULLIVAN, *The Dirichlet problem at infinity for a negatively curved manifold*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 723-732.
- [T85] P. TUKIA, *Quasi-conformal extension of quasi-symmetric mappings compatible with a Möbius group*, Acta Math. **154** (1985), 153-193.

François GUÉRITAUD

CNRS & Université de Lille

Laboratoire Paul Painlevé

59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

E-mail : Francois.Gueritaud@math.univ-lille1.fr