Séminaire BOURBAKI Mars 2018
70e année, 2017–2018, nº 1144

RELATIONS DE HODGE–RIEMANN ET COMBINATOIRE DES MATROÏDES [d'après K. Adiprasito, J. Huh et E. Katz]

par **Antoine CHAMBERT–LOIR**

… alors que le savant classe hors du temps vécu,
situe et fixe à l'écart de la vie.
Philippe Jaccottet, *La semaison*

1. MATROÏDES

Inventée par Whitney (1935), la notion de *matroïde* est une abstraction de la propriété d'indépendance linéaire. Elle admet plusieurs formalisations équivalentes, en termes de *bases*, de *parties libres*, de *circuits*, d'une *fonction rang*, etc. Nous utiliserons ici celle qui met en jeu le concept de *plat*.

Définition 1.1. — *Soit* E *un ensemble* fini.(1) *Un matroïde* M *sur* E *est la donnée d'une partie* $\mathscr{P}_{\mathrm{M}}$ *de* $\mathfrak{P}(\mathrm{E})$ — *les* plats *de* M — *vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) *L'intersection de toute famille de plats de* M *est un plat.*
(ii) *Pour tout plat* P *de* M*, distinct de* M*, l'ensemble des plats de* M *qui sont minimaux parmi ceux contenant strictement* P *recouvre* E*.*

On notera en général $|\mathrm{M}|$, voire M, l'ensemble sous-jacent à un matroïde M.

1.2. — Rappelons brièvement les autres formalisations de la notion de matroïde. en renvoyant à (Welsh, 1976), (White, 1986, 1987) ou (Oxley, 1992) pour plus de détails.

Soit M un matroïde sur un ensemble E. Muni de la relation d'inclusion sur $\mathfrak{P}(\mathrm{E})$, l'ensemble des plats de M est un ensemble ordonné. C'est un *treillis* : toute partie possède une borne inférieure (notée $\wedge$), l'intersection de ses membres, et une borne supérieure (notée $\vee$), l'intersection de la famille des plats de M qui contiennent chacun

(1)Dans ce texte, il sera uniquement question de matroïdes finis. En fait, la formalisation des matroïdes sur un ensemble infini est récente : une condition naturelle consiste à imposer à la propriété d'être une partie libre d'être de caractère fini, mais Bruhn *et al.* (2013) mettent en évidence qu'on obtient une classe plus intéressante de matroïdes infinis en imposant un axiome d'existence de parties libres maximales.

de ses membres. Si X est une partie de E, on note $\langle X \rangle$ le plat engendré par X, c'est-à-dire le plus petit plat de M qui contient X. Au matroïde M, on associe naturellement deux fonctions *rang* et *corang* : le rang $\mathrm{rg}_{\mathrm{M}}(\mathrm{P})$ d'un plat P est la plus grande longueur d'une chaîne de plats de sommet P, son corang $\mathrm{corg}_{\mathrm{M}}(\mathrm{P})$ est la plus grande longueur d'une chaîne de plats de base P. On définit plus généralement le rang (resp. le corang) d'une partie A de M comme celui du plat qu'elle engendre.

Une partie L de E est dite *liée* s'il existe une partie $\mathrm{L}' \subsetneq \mathrm{L}$ telle que $\langle \mathrm{L}' \rangle = \langle \mathrm{L} \rangle$; elle est dite *libre* sinon. L'ensemble des parties libres vérifient les propriétés suivantes :

(i) $\varnothing$ est libre ;
(ii) Toute partie d'une partie libre est libre ;
(iii) Si A et B sont des parties libres de M telles que $\mathrm{Card}(\mathrm{B}) > \mathrm{Card}(\mathrm{A})$, il existe $x \in \mathrm{B} - \mathrm{A}$ tel que $\mathrm{A} \cup \{x\}$ soit libre (variante du « lemme d'échange »).

Inversement, toute partie de $\mathfrak{P}(\mathrm{E})$ vérifiant ces trois propriétés est l'ensemble des parties libres d'un unique matroïde sur E.

Une *base* de M est une partie libre maximale. Il en existe ; on déduit du lemme d'échange que toutes les bases de M ont même cardinal et que toutes les chaînes maximales de plats ont même cardinal, égal au rang de M (c'est-à-dire du plat E de M). Autrement dit, pour tout plat P de M, on a $\mathrm{rg}_{\mathrm{M}}(\mathrm{P}) + \mathrm{corg}_{\mathrm{M}}(\mathrm{P}) = \mathrm{rg}_{\mathrm{M}}(|\mathrm{M}|)$ (le treillis associé à M est « caténaire »). De plus, pour tout couple (P, Q) de plats de M, on a la relation

$$\mathrm{rg}_{\mathrm{M}}(\mathrm{P}) + \mathrm{rg}_{\mathrm{M}}(\mathrm{Q}) \geqslant \mathrm{rg}_{\mathrm{M}}(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) + \mathrm{rg}_{\mathrm{M}}(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) \ ; \tag{1.3}$$

le treillis associé à M est dit *sous-modulaire*. Inversement, tout treillis caténaire sous-modulaire est le treillis des plats d'un matroïde.

Exemple 1.4. — Soit V un espace vectoriel (resp. un espace affine, resp. un espace projectif) sur un corps K et soit $\Phi = (v_e)_{e \in \mathrm{E}}$ une famille finie d'éléments de V. Il existe un matroïde M dont les plats sont les parties de E de la forme $\{e \in \mathrm{E} \ ; \ v_e \in \mathrm{W}\}$, où W parcourt l'ensemble des sous-espaces vectoriels (resp. affines, resp. projectifs) de V. Les parties libres de ce matroïde sont les sous-familles libres (resp. affinement libres, resp. projectivement libres) de Φ. Dans le cas vectoriel, le rang d'un plat P est la dimension de l'espace vectoriel engendré par la famille $(v_e)_{e \in \mathrm{P}}$; dans le cas affine resp. (projectif), on a $\mathrm{rg}_{\mathrm{M}}(\varnothing) = 0$ et $\mathrm{rg}_{\mathrm{M}}(\mathrm{P}) - 1$ est la dimension du sous-espace affine (resp. projectif) de V engendré par la famille $(v_e)_{e \in \mathrm{P}}$.

De tels matroïdes sont dits *représentables* sur K.

Lorsqu'on prend pour Φ l'ensemble des points de l'espace projectif $\mathbf{P}_2(\mathbf{F}_2)$, on obtient le *matroïde de Fano*. Il n'est représentable que sur un corps de caractéristique 2.

Les matroïdes représentables apparaissent naturellement via l'arrangement d'hyperplans qu'ils définissent dans l'espace vectoriel dual $\mathrm{V}^\vee$ (resp. l'espace affine, resp. projectif). Les plats sont alors les intersections d'hyperplans de l'arrangement et leur rang est leur codimension.

D'après Nelson (2018), lorsque n tend vers l'infini, la proportion du nombre de matroïdes sur l'ensemble $\{1,\dots,n\}$ qui sont représentables (sur *un* corps non précisé) tend vers 0.

Exemple 1.5. — Soit G un graphe fini et soit E l'ensemble des arêtes de G. Il existe un unique matroïde M(G) sur E dont les parties libres sont les forêts de G. De manière équivalente, ses circuits, c'est-à-dire les parties liées minimales, sont les cycles dans le graphe G ; ses plats sont les parties P telles que les extrémités de toute arête $e \in \mathrm{E} - \mathrm{P}$ n'appartiennent pas à la même composante connexe du sous-graphe de G ayant même ensemble de sommets que G et P pour ensemble d'arêtes.

Si $\mathrm{G_P}$ est le plus grand sous-graphe de G d'ensemble d'arêtes P, $\mathrm{rg}_{\mathrm{M(G)}}(\mathrm{P}) + \mathrm{Card}(\pi_0(\mathrm{G_P}))$ est le nombre de sommets de G.

Le matroïde M(G) est représentable sur tout corps. Soit S l'ensemble des sommets de G. Soit K un corps et notons (x_s) la base canonique du K-espace vectoriel $\mathrm{K^S}$. Fixons une orientation F de G et identifions une flèche $f \in \mathrm{F}$ à l'arête correspondante $\{f, \overline{f}\}$. Pour toute flèche $f \in \mathrm{F}$ d'origine o et de terme t, posons $v_f = x_t - x_o \in \mathrm{K^S}$. Alors le matroïde associé à la famille $(v_f)_{f\in\mathrm{F}}$ s'identifie au matroïde M(G).

1.6. — Mentionnons quelques autres constructions de matroïdes.

a) Soit $\mathrm{M_1}$ et $\mathrm{M_2}$ des matroïdes. Il existe alors un unique matroïde M sur l'ensemble $|\mathrm{M_1}| \coprod |\mathrm{M_2}|$ dont les plats sont les réunions d'un plat de $\mathrm{M_1}$ et d'un plat de $\mathrm{M_2}$. On le note $\mathrm{M_1} \oplus \mathrm{M_2}$.
b) Soit M un matroïde. Il existe, sur l'ensemble $|\mathrm{M}|$, une unique structure de matroïde dont les bases sont les complémentaires des bases de M. On l'appelle le *matroïde dual* M^* de M. Sa fonction rang est liée à celle de M par la relation
$$\mathrm{rg}_{\mathrm{M}^*}(\mathrm{A}) - \mathrm{rg}_{\mathrm{M}}(|\mathrm{M}| - \mathrm{A}) = \mathrm{Card}(|\mathrm{M}|) - r_{\mathrm{M}}(|\mathrm{M}|),$$
pour toute partie A de $|\mathrm{M}|$.
c) Soit M un matroïde et soit F une partie de $|\mathrm{M}|$. L'ensemble des plats de M qui sont contenus dans F est une structure de matroïde sur F, que l'on note $\mathrm{M}\,|\,\mathrm{F}$; c'est la *restriction* de M à F ; on la voit aussi comme la *suppression* de $|\mathrm{M}| - \mathrm{F}$ dans M et on la note alors $\mathrm{M}\backslash(|\mathrm{M}| - \mathrm{F})$. Sa fonction rang est la restriction à $\mathfrak{P}(\mathrm{F})$ de la fonction rang de M.
d) Soit M un matroïde et soit F une partie de $|\mathrm{M}|$. L'ensemble des parties P de $|\mathrm{M}| - \mathrm{F}$ telles que $\mathrm{P} \cup \mathrm{F}$ soit un plat de M est une structure de matroïde sur l'ensemble $|\mathrm{M}| - \mathrm{F}$; autrement dit, le treillis de ses plats est le sous-treillis de $\mathscr{P}_{\mathrm{M}}$ formé des plats de M qui contiennent F. On l'appelle la *contraction* de F dans M et on la note M/F. Sa fonction rang vérifie $\mathrm{rg}_{\mathrm{M/F}}(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}_{\mathrm{M}}(\mathrm{A} \cup \mathrm{F}) - \mathrm{rg}_{\mathrm{M}}(\mathrm{A})$, pour toute partie A de $|\mathrm{M}| - \mathrm{F}$.

1.7. — Soit M un matroïde. Une boucle de M est un point $e \in |\mathrm{M}|$ qui appartient à tout plat. Soit $m = \langle\varnothing\rangle$ le plus petit plat de M. Le matroïde contracté M/m est sans boucle et a même treillis des plats que M.

Supposons M sans boucle. La relation $\langle x\rangle = \langle y\rangle$ dans E est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les plats de M de rang 1. Lorsque ces classes d'équivalence sont réduites à un élément, on dit que le matroïde est une *géométrie combinatoire.* En général, le matroïde M induit une géométrie combinatoire $\overline{\mathrm{M}}$ sur l'ensemble quotient $\overline{\mathrm{E}}$; la surjection canonique de E sur $\overline{\mathrm{E}}$ induit un isomorphisme du treillis des plats de M sur celui de $\overline{\mathrm{M}}$.

Définition 1.8. — *Soit* M *un matroïde. Le* polynôme caractéristique *de* M *est défini par*

$$\chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}) = \sum_{\mathrm{A}\subset|\mathrm{M}|} (-1)^{\mathrm{Card}(\mathrm{A})}\mathrm{T}^{\mathrm{corg}_{\mathrm{M}}(\langle\mathrm{A}\rangle)}.$$

C'est un polynôme unitaire de degré $\leqslant \mathrm{rg}(\mathrm{M})$. Lorsque $|\mathrm{M}|$ est vide, on a $\chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}) = 1$. Il y a deux matroïdes sur un ensemble $\{e\}$ de cardinal 1 : si $\mathscr{P}_{\mathrm{M}} = \{\varnothing, |\mathrm{M}|\}$, on a $\mathrm{rg}(\mathrm{M}) = 1$ et $\chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}) = \mathrm{T} - 1$; si $\mathscr{P}_{\mathrm{M}} = \{|\mathrm{M}|\}$, on a $\mathrm{rg}(\mathrm{M}) = 0$ et $\chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}) = 0$. En général, le polynôme $\chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{T})$ se calcule par récurrence à partir des deux règles :

$$\chi_{\mathrm{M}_1\oplus\mathrm{M}_2}(\mathrm{T}) = \chi_{\mathrm{M}_1}(\mathrm{T})\chi_{\mathrm{M}_2}(\mathrm{T})$$

et

$$\chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}) = \chi_{\mathrm{M}\setminus e}(\mathrm{T}) - \chi_{\mathrm{M}/e}(\mathrm{T})$$

pour tout point $e \in |\mathrm{M}|$ qui n'appartient pas à toute base de M. (Ces deux règles généralisent celles qui régissent le polynôme chromatique d'un graphe.)

Si $|\mathrm{M}|$ n'est pas vide, on a $\chi_{\mathrm{M}}(1) = 0$; on définit alors le polynôme caractéristique réduit par :

$$\overline{\chi_{\mathrm{M}}}(\mathrm{T}) = \chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{T})/(\mathrm{T}-1).$$

Exemple 1.9. — Supposons que M soit le matroïde M(G) associé à un graphe fini G. Alors, pour tout entier q,

$$\chi_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = \mathrm{T}^{\mathrm{Card}(\pi_0(\mathrm{G}))}\chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{T})$$

est le polynôme chromatique de G : pour tout entier q, $\chi_{\mathrm{G}}(q)$ est le nombre de coloriages de l'ensemble des sommets de G avec q couleurs tels que deux sommets reliés par une arête soient de couleurs distinctes.

Exemple 1.10. — Soit K un corps, soit n un entier, soit $(v_1, \dots, v_r)$ une famille libre de K^n et soit V le sous-espace vectoriel de K^n qu'elle engendre. Notons M le matroïde représentable correspondant. Le polynôme caractéristique de M s'interprète géométriquement dans l'anneau de Grothendieck $\mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_{\mathrm{K}})$ des K-variétés.

Rappelons que cet anneau est défini comme le quotient du groupe abélien libre sur l'ensemble $\mathrm{Var}_{\mathrm{K}}$ des classes d'isomorphie de K-variétés (= K-schémas de type fini) par la relation de découpage $[\mathrm{X}] = [\mathrm{X} - \mathrm{Y}] + [\mathrm{Y}]$ si X est une K-variété et Y un fermé de X, muni du produit $[\mathrm{X}][\mathrm{Y}] = [\mathrm{X} \times_{\mathrm{K}} \mathrm{Y}]$. Si X est une K-variété, on note e(X) sa classe dans $K_0(\mathrm{Var}_K)$. L'application e est une caractéristique d'Euler universelle. En particulier, lorsque $K = \mathbf{C}$, l'application qui, à une $\mathbf{C}$-variété V, associe son polynôme de Hodge–Deligne $E_V(u, v)$, se factorise par un homomorphisme d'anneaux de $K_0(\mathrm{Var}_{\mathbf{C}})$ dans $\mathbf{Z}[u, v]$. De même, lorsque K est un corps fini, l'application qui, à une K-variété V, associe le cardinal de V(K), se factorise par un homomorphisme d'anneaux de $K_0(\mathrm{Var}_K)$ dans $\mathbf{Z}$.

Notons $\mathbf{L} = \mathrm{e}(\mathbf{A}^1_K)$ la classe de la droite affine. Dans l'anneau de Grothendieck $K_0(\mathrm{Var}_K)$ des K-variétés, on a alors la relation

$$\mathrm{e}(V \cap \mathbf{G}^n_{\mathrm{m},K}) = \chi_M(\mathbf{L}).$$

(Cela se déduit de la formule d'inversion de Möbius dans le treillis des plats du matroïde M et de la formule (2.7) ; voir plus bas.) Comme l'unique homomorphisme d'anneaux de $\mathbf{Z}[T]$ dans $K_0(\mathrm{Var}_K)$ qui applique T sur $\mathbf{L}$ est injectif, cette relation caractérise χ_M.

Lorsque $K = \mathbf{C}$, le polynôme de Hodge–Deligne de la variété quasi-projective $V \cap (\mathbf{C}^\times)^n$ est donc égal à $\chi_M(uv)$. Lorsque $K = \mathbf{F}_q$ est un corps fini de cardinal q, on a de même $\mathrm{Card}(V \cap (K^\times)^n) = \chi_M(q)$.

En passant au quotient par l'action par homothéties de $\mathbf{G}_{\mathrm{m},K}$ sur l'espace affine $\mathbf{A}^n_K$, on en déduit aussi une interprétation géométrique du polynôme caractéristique réduit de M :

$$\mathrm{e}(\mathbf{P}(V \cap \mathbf{G}^n_{\mathrm{m},K})) = \overline{\chi_M}(\mathbf{L}).$$

Voici le théorème principal de cet exposé :

Théorème 1.11 (Adiprasito, Huh & Katz 2018). — *Soit* M *un matroïde de rang* > 0 *; posons* $r = \mathrm{rg}(M) - 1$ *et définissons des nombres entiers* $\mu^k(M)$*, pour* $0 \leqslant k \leqslant r$*, par*

$$\overline{\chi_M}(T) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \mu^k(M) T^{r-k}.$$

Alors, la suite $(\mu^0(M), \dots, \mu^r(M))$ *est* log-concave :

(i) *Pour tout entier* k *tel que* $0 \leqslant k \leqslant r$*, on a* $\mu^k(M) > 0$ *;*
(ii) *Pour tout entier* k *tel que* $0 < k < r$*, on a* $\mu^{k-1}(M)\mu^{k+1}(M) \leqslant \mu^k(M)^2$.
En particulier, cette suite est unimodale *:*
(iii) *Il existe un entier* ℓ *tel que*

$$\mu^0(M) \leqslant \mu^1(M) \leqslant \cdots \leqslant \mu^\ell(M) \geqslant \mu^{\ell+1}(M) \geqslant \cdots \geqslant \mu^r(M).$$

Plusieurs corollaires de ce théorème avaient été conjecturés dans les années 1970, (Rota, 1971; Heron, 1972; Mason, 1972; Welsh, 1976), parfois d'abord dans le cas des graphes et de leurs polynômes chromatiques (Read, 1968; Hoggar, 1974) :

COROLLAIRE 1.12 (conjecture de Heron–Rota–Welsh). — *Soit* M *un matroïde et soit* $r = \mathrm{rg}(\mathrm{M})$*. Définissons des nombres entiers* $w_k(\mathrm{M})$*, pour* $0 \leqslant k \leqslant r$*, par*

$$\chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k w_k(\mathrm{M}) \mathrm{T}^{r-k}.$$

Alors, la suite $(w_0(\mathrm{M}), \dots, w_r(\mathrm{M}))$ *est* log-concave *et* unimodale*.*

Les entiers $w_k(\mathrm{M})$ sont appelés nombres de Whitney de première espèce du matroïde M ; ils sont positifs ou nuls (voir plus bas).

COROLLAIRE 1.13 (conjecture de Welsh–Mason). — *Soit* M *un matroïde et soit* $r = \mathrm{rg}(\mathrm{M})$*. Pour tout entier* k*, notons* $f_k(\mathrm{M})$ *le nombre de parties libres de* M *de cardinal* k*. La suite* $(f_0(\mathrm{M}), \dots, f_r(\mathrm{M}))$ *est log-concave.*

Suivant LENZ (2013), ce corollaire se déduit du théorème 1.11 en considérant le matroïde M' sur l'ensemble $\mathrm{E}' = \mathrm{E} \coprod \{e\}$ dont les plats sont la partie vide et les parties $\mathrm{P} \cup \{e\}$, pour tout plat P de M (« coextension libre » de M). Ce matroïde est de rang $r+1$ et, d'après (BRYLAWSKI, 1982, Remark 6.15.3c), son polynôme caractéristique réduit vérifie

$$\overline{\chi_{\mathrm{M}'}}(\mathrm{T}) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k f_k(\mathrm{M}) \mathrm{T}^{r-k}.$$

1.14. — Bien que de nature purement combinatoire, la démonstration du théorème 1.11 est inspirée par la géométrie algébrique.

Supposons en effet que le matroïde M soit représentable sur un corps K, associé à l'arrangement d'hyperplans défini par la trace, sur un sous-espace projectif V de dimension r, des hyperplans de coordonnées de $\mathbf{P}_n(\mathrm{K})$. L'involution ι de Cremona est l'automorphisme birationnel de $\mathbf{P}_{n,\mathrm{K}}$ donné par $[x_0 : \dots : x_n] \mapsto [x_0^{-1} : \dots : x_n^{-1}]$. L'adhérence de Zariski dans $\mathbf{P}_{n,\mathrm{K}} \times \mathbf{P}_{n,\mathrm{K}}$ du graphe de la restriction de ι à V est alors une compactification lisse $\tilde{\mathrm{V}}$ de $\mathrm{V} \cap \mathbf{G}_{\mathrm{m},\mathrm{K}}^n$ dont le bord est un diviseur à croisements normaux stricts. (Cette construction est due à DE CONCINI & PROCESI (1995).)

THÉORÈME 1.15 (HUH & KATZ 2012). — *On a l'égalité*

$$[\tilde{\mathrm{V}}] = \sum_{k=0}^{r} \mu^k(\mathrm{M}) [\mathbf{P}_{r-k} \times \mathbf{P}_k]$$

dans le groupe $\mathrm{A}_r(\mathbf{P}_n \times \mathbf{P}_n)$ *des classes de cycles de dimension* r *sur* $\mathbf{P}_n \times \mathbf{P}_n$*.*

De manière équivalente, on a

$$\mu^k(\mathrm{M}) = \deg(c_1(\mathscr{L}_1)^{r-k} c_1(\mathscr{L}_2)^k \cap [\tilde{\mathrm{V}}]),$$

où $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ sont les fibrés en droites sur $\mathbf{P}_n \times \mathbf{P}_n$ déduits du fibré en droites $\mathscr{O}_{\mathbf{P}_n}(1)$ par la première et la seconde projection. La log-concavité de la suite $(\mu^0(\mathrm{M}), \dots, \mu^r(\mathrm{M}))$ se déduit alors du théorème de l'indice de Hodge, sous la forme des *inégalités de Khovanskii-Teissier* (KHOVANSKII, 1988; TEISSIER, 1979).

Lorsque K est de caractéristique zéro, Huh (2012) avait donné une première démonstration de la log-concavité de la suite $(\mu^k(\mathrm{M}))$, dans laquelle les coefficients $\mu^k(\mathrm{M})$ apparaissent comme les nombres de Milnor de la trace, sur un sous-espace général de dimension k, de la réunion des hyperplans de l'arrangement définissant M. L'inégalité de log-concavité se déduit alors de l'inégalité de Teissier pour les multiplicités (Eisenbud & Levine, 1977, Appendice).

On trouve par ailleurs dans Huh (2012) un très joli théorème qui caractérise les classes de cycles dans $\mathbf{P}_m \times \mathbf{P}_n$ qui sont, à un scalaire près, représentés par une sous-variété irréductible :

Théorème 1.16. — *Soit r un entier tel que $0 \leqslant r \leqslant \inf(m,n)$ et soit $(a_0,\dots,a_r)$ une suite d'entiers relatifs. Pour que la classe de cycle*

$$\alpha = \sum_{k=0}^{r} a_k[\mathbf{P}_{r-k} \times \mathbf{P}_k] \in \mathrm{A}_r(\mathbf{P}_m \times \mathbf{P}_n)$$

soit un multiple positif de la classe d'une sous-variété irréductible V *de $\mathbf{P}_m \times \mathbf{P}_n$, il faut et il suffit que l'une des deux conditions suivantes soit satisfaite :*

- *La classe α est un multiple positif de $[\mathbf{P}_m \times \mathbf{P}_n]$, $[\mathbf{P}_m \times \mathbf{P}_0]$, $[\mathbf{P}_0 \times \mathbf{P}_n]$ ou $[\mathbf{P}_0 \times \mathbf{P}_0]$;*
- *La suite $(a_0,\dots,a_r)$ est log-concave et $a_k > 0$ pour tout entier k tel que $0 < k < r$.*

Autrement dit, les inégalités de Khovanskii-Teissier caractérisent précisément les classes de cycles effectifs. Dans un esprit similaire, mentionnons le contre-exemple de Babaee & Huh (2017) à une version de la conjecture de Hodge pour les courants positifs : un courant fortement positif de type $(2,2)$ sur une variété complexe torique de dimension 4, lisse et projective, qui n'appartient pas au cône convexe fermé engendré par les courants d'intégration sur les sous-variétés.

1.17. — Ainsi, pour démontrer le théorème 1.11, Adiprasito, Huh & Katz (2018) associent à une géométrie combinatoire M une $\mathbf{R}$-algèbre graduée $\mathrm{A}(\mathrm{M})_{\mathbf{R}}$ qui vérifie les énoncés analogues à la dualité de Poincaré, le théorème de Lefschetz difficile et les inégalités de Hodge–Riemann.

De fait, $\mathrm{A}(\mathrm{M})_{\mathbf{R}}$ sera l'anneau de Chow (à coefficients réels) d'une variété torique lisse X_M (sur un corps K arbitraire) introduite par Feichtner & Yuzvinsky (2004). En général, la variété X_M n'est pas propre, et elle est de dimension $> \mathrm{rg}_\mathrm{M}(\mathrm{M})$, de sorte que son anneau de Chow A(M), ou son anneau de cohomologie H(M), n'a aucune raison de se comporter comme celui d'une variété projective lisse de dimension rg(M).

Lorsque le matroïde M est représentable, X_M admet une sous-variété projective lisse Y_M (c'est d'ailleurs la variété $\tilde{\mathrm{V}}$ du paragraphe précédent) telle que l'application $z \mapsto z \cap [\mathrm{Y}_\mathrm{M}]$ induise un isomorphisme de $\mathrm{A}(\mathrm{X}_\mathrm{M})$ sur $\mathrm{A}(\mathrm{Y}_\mathrm{M})$. En revanche, lorsque M n'est pas représentable sur K, il n'existe pas de K-variété propre et lisse Y et de morphisme de variétés $f\colon \mathrm{Y} \to \mathrm{X}_\mathrm{M}$ tel que f^* induise un isomorphisme de $\mathrm{A}(\mathrm{X}_\mathrm{M})$ sur $\mathrm{A}(\mathrm{Y})$ (Adiprasito, Huh & Katz, 2018, th. 5.12).

1.18. — Le principe n'est bien sûr pas nouveau de puiser l'inspiration d'une preuve de résultats de nature combinatoire dans la géométrie algébrique, par exemple via le dictionnaire qui, à tout polytope P de $\mathbf{R}^r$, à sommets entiers et de dimension r, associe une variété torique projective polarisée $(\mathrm{X_P}, \mathrm{L})$.

Dans ce dictionnaire, la dimension $h^0(\mathrm{X_P}, \mathrm{L}^{\otimes n})$ de l'espace de sections globales de la puissance n-ième de L correspond au nombre de points entiers du polytope nP et, via la formule de Hilbert–Samuel, relie le degré de $\mathrm{X_P}$ au volume de P. Plus généralement, les volumes mixtes correspondent à des nombres d'intersection. C'est ainsi que Khovanskii (1988) et Teissier (1979) déduisent les inégalités d'Alexandrov–Fenchel et de Brunn–Minkowski du théorème de l'indice de Hodge sur les surfaces et du théorème de Bertini.

Citons ainsi la conjecture de McMullen décrivant ce que peut être le nombre f_i de faces de dimension i donnée d'un polytope *simple* P de dimension d. McMullen considère une suite $(h_0, \dots, h_d)$ obtenue par combinaisons linéaires adéquates des f_i et postule trois familles de conditions sur cette suite pour que la suite initiale $(f_0, \dots, f_d)$ soit la suite des nombres de faces d'un polytope simple ; les premières, $h_k = h_{d-k}$, sont les *relations de Dehn–Sommerville ;* la seconde famille s'écrit $h_0 \leqslant h_1 \leqslant \cdots \leqslant h_{\lfloor d/2 \rfloor}$; la troisième est un peu technique et ce n'est pas la peine de la recopier ici.

Billera & Lee (1980) ont prouvé qu'elles sont suffisantes, et leur nécessité est démontrée par Stanley (1980) à l'aide de la géométrie algébrique. Lorsque le polytope est à sommets entiers, il observe en effet que l'entier h_k est la dimension de l'espace de cohomologie $\mathrm{H}^k(\mathrm{X_Q})_{\mathbf{R}}$ de la variété torique $\mathrm{X_Q}$ (sur $\mathbf{C}$, disons) associée au polytope Q polaire de P, de sorte que les conditions de McMullen découlent respectivement de trois propriétés cohomologiques de la cohomologie de $\mathrm{X_Q}$: la dualité de Poincaré, le théorème de Lefschetz difficile, et le fait que l'algèbre de cohomologie $\mathrm{H}(\mathrm{Y_Q})_{\mathbf{Q}}$ à coefficients rationnels soit engendrée par $\mathrm{H}^2(\mathrm{Y_Q})$. La variété $\mathrm{Y_Q}$ est projective, mais n'est pas nécessairement lisse, mais l'hypothèse que le polytope P est simple assure que la variété $\mathrm{Y_Q}$ est une « orbifolde », c'est-à-dire localement le quotient d'une variété lisse par l'action d'un groupe fini, de sorte que ces énoncés cohomologiques restent valides.

Par homothéties et approximation, on peut parfois déduire du cas d'un polytope à sommets entiers le cas d'un polytope à sommets réels quelconques, mais il existe des polytopes dont la combinatoire ne peut pas être obtenue par une déformation en un polytope à sommets rationnels. Cette complication ne se produit pas dans les deux exemples précédents ; pour la conjecture de McMullen, l'hypothèse que le polytope est simple est essentielle.

Ultérieurement, Stanley (1987) a généralisé cette étude aux polytopes non nécessairement simples : lorsque P est à sommets entiers, l'entier h_k est alors la dimension de l'espace de cohomologie d'intersection $\mathrm{IH}^k(\mathrm{X_Q})_{\mathbf{R}}$. L'extension de cette relation aux polytopes à sommets arbitraires a motivé d'une part une approche combinatoire de McMullen (1993), et d'autre part le développement d'une « cohomologie d'intersection des polytopes » et la preuve du théorème de Lefschetz difficile dans ce contexte (Karu, 2004).

1.19. — Le titre de ce rapport mentionne les inégalités de Hodge–Riemann. Comme on le verra plus tard, ces inégalités renforcent le théorème de Lefschetz difficile : si ce dernier signifie qu'une certaine forme bilinéaire est non dégénérée, les inégalités de Hodge–Riemann en précisent la signature.

En géométrie kählérienne le théorème de Lefschetz difficile est démontré *avant* les inégalités de Hodge–Riemann. C'est a fortiori le cas en géométrie algébrique, en particulier sur un corps de caractéristique positive où les inégalités de Hodge–Riemann sont encore une conjecture.

En revanche, il semble que les approches combinatoires du théorème de Lefschetz difficile ne puissent faire l'économie des inégalités de Hodge–Riemann. Outre le théorème de Karu (2004) déjà mentionné, mentionnons le rôle crucial que jouent ces inégalités dans la preuve du théorème de décomposition que proposent de Cataldo & Migliorini (2005) (voir aussi l'exposé de Williamson (2017) dans ce séminaire). Citons enfin la preuve par Elias & Williamson (2014) de la positivité des coefficients des polynômes de Kazhdan–Lusztig associés à un système de Coxeter général ; cf. également le rapport de Riche (2018) dans ce séminaire.

Les travaux dont il est question dans ce rapport suggèrent l'intérêt d'un analogue de la théorie de Hodge en géométrie tropicale. Je me contente ici de renvoyer à l'article de Itenberg, Katzarkov, Mikhalkin & Zharkov (2016) où sont construits des espaces de (p, q)-formes sur les variétés tropicales.

1.20. — L'unimodalité et la log-concavité sont des thèmes prégnants de la combinatoire énumérative. L'article de Stanley (1989), complété par celui de Brenti (1994), en fournit une excellente introduction.

À propos des résultats de cet exposé, je renvoie aussi au bref survol (Adiprasito, Huh & Katz, 2017) et surtout à l'article d'exposition de Baker (2018).

Je remercie enfin Karim Adiprasito, Matt Baker, Michel Brion, Antoine Ducros, Javier Fresán, Olivier Guichard, June Huh, Ilia Itenberg et Bernard Teissier pour leurs commentaires sur des premières versions de ce rapport.

2. ÉVENTAILS

2.1. — Soit $(\mathscr{P}, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné, disons fini, et soit A un anneau commutatif. L'algèbre de convolution $\mathscr{A}(\mathscr{P}; \mathrm{A})$ est le A-module des fonctions à valeurs dans A sur l'ensemble des couples (x, y) d'éléments de $\mathscr{P}$ tels que $x \preccurlyeq y$, muni du produit de convolution défini par

$$\varphi * \psi(x, y) = \sum_{x \preccurlyeq z \preccurlyeq y} \varphi(x, z)\psi(z, y).$$

Son élément unité δ est l'indicatrice de Kronecker. Un élément de $\mathscr{A}(\mathscr{P};\mathrm{A})$ est inversible si et seulement s'il ne prend que des valeurs inversibles en les couples de la forme (x,x). La fonction de Möbius de $\mathscr{P}$, notée μ, est l'inverse de la fonction constante $\mathbf{1}$ de valeur 1 ; elle est caractérisée par les relations

$$\mu(x,x)=1 \tag{2.2}$$

$$\sum_{x\preccurlyeq z\preccurlyeq y}\mu(x,z)=0 \tag{2.3}$$

pour tout $x\in\mathscr{P}$ d'une part, et tout couple (x,y) d'éléments de $\mathscr{P}$ tels que $x\prec y$. L'algèbre $\mathscr{A}(\mathscr{P};\mathrm{A})$ agit à gauche sur le A-module $\mathscr{F}(\mathscr{P};\mathrm{A})$ des fonctions de $\mathscr{P}$ dans A, par la formule :

$$\varphi * f(x)=\sum_{x\preccurlyeq y}\varphi(x,y)f(y).$$

La *formule d'inversion de Möbius* est alors, pour deux éléments f,g de $\mathscr{F}(\mathrm{P};\mathrm{A})$ l'équivalence entre les relations $g=\mathbf{1}*f$ et $f=\mu*g$; autrement dit :

$$g(x)=\sum_{x\preccurlyeq y}f(y)\quad\Leftrightarrow\quad f(y)=\sum_{y\preccurlyeq x}\mu(y,x)g(x).$$

Lorsque, de plus, $\mathscr{P}$ est un treillis, on a la relation (*théorème de Weisner*) :

$$\sum_{\sup(x,a)=\sup(\mathscr{P})}\mu(\inf(\mathscr{P}),x)=0 \tag{2.4}$$

pour tout $a\in\mathscr{P}$ distinct de $\inf(\mathscr{P})$. Et si, de plus, ce treillis est sous-modulaire, le signe de la fonction de Möbius est donné par :

$$(-1)^{\mathrm{rg}(y)-\mathrm{rg}(x)}\mu(x,y)\geqslant 0 \tag{2.5}$$

pour $x,y\in\mathscr{P}$ tels que $x\preccurlyeq y$.

2.6. — Le polynôme caractéristique d'un matroïde M s'exprime en termes de son treillis des plats, par la relation :

$$\chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{T})=\sum_{\mathrm{P}\in\mathscr{P}_{\mathrm{M}}}\mu(\varnothing,\mathrm{P})\mathrm{T}^{\mathrm{corg}_{\mathrm{M}}(\mathrm{P})}. \tag{2.7}$$

Cette relation permet aussi de supposer, dans les questions relatives au polynôme caractéristique χ_{M}, que le matroïde M est une géométrie combinatoire. Jointe aux inégalités (2.5), elle prouve enfin que les entiers $w_k(\mathrm{M})$ introduits dans le corollaire 1.12 sont positifs ou nuls.

2.8. — Soit M une géométrie combinatoire de rang $\geqslant 1$ sur un ensemble E ; posons $r=\mathrm{rg}_{\mathrm{M}}(\mathrm{M})-1$ et $n=\mathrm{Card}(\mathrm{E})-1$. On note $\mathrm{N}\simeq\mathbf{Z}^n$ le quotient du $\mathbf{Z}$-module libre $\mathbf{Z}^{\mathrm{E}}$, de base canonique $(e_i)_{i\in\mathrm{E}}$ par le sous-module engendré par $\sum e_i$; pour $i\in\mathrm{E}$, on note encore e_i l'image dans N de l'élément correspondant de $\mathbf{Z}^{\mathrm{E}}$. Pour toute partie I de E, on pose $e_{\mathrm{I}}=\sum_{i\in\mathrm{I}}e_i$.

Dans tout ce texte, un *drapeau* de plats de M sera une famille totalement ordonnée de plats de M distincts de $\varnothing$ et $|\mathrm{M}|$. Si $\mathscr{D}$ est un drapeau, on note alors $\sigma_{\mathscr{D}}$ le cône de $N_{\mathbf{R}}$ engendré par les vecteurs e_P, pour $P \in \mathscr{D}$; il est de dimension Card($\mathscr{D}$). Notons Σ_M l'ensemble de ces cônes : c'est l'*éventail de Bergman* du matroïde M (ARDILA & KLIVANS, 2006).

PROPOSITION 2.9. — *L'ensemble Σ_M est un éventail unimodulaire de $N_{\mathbf{R}}$, purement de dimension r.*

Que Σ_M soit un *éventail* signifie qu'il n'est pas vide, que toute face d'un cône de Σ_M appartient à Σ_M et que l'intersection de deux cônes de Σ_M, est une face commune de ces deux cônes ; qu'il soit *unimodulaire* signifie que les cônes de Σ_M sont engendrés par une partie d'une base de N ; qu'il soit *purement de dimension* r signifie que tout cône maximal de Σ_M est de dimension r.

À tout éventail Σ est classiquement associée une K-*variété torique* X_Σ, aussi notée $X(\Sigma)$, obtenue en recollant les variétés affines $X_\sigma = \operatorname{Spec}(K[N^\vee \cap \sigma^\circ])$, pour σ parcourant Σ, où σ° désigne l'ensemble des formes linéaires sur $N_{\mathbf{R}}$ qui sont positives en tout point de σ ; je renvoie par exemple à (FULTON, 1993) pour plus de détails sur cette théorie. Noter que si τ est une face de σ, X_τ est un ouvert de X_σ pour la topologie de Zariski.

Soit σ un cône de Σ. Si σ est engendré par une partie d'une base de N, la variété X_σ est un ouvert de $\mathbf{A}^E$, isomorphe à $\mathbf{A}^{\dim(\sigma)} \times \mathbf{G}_m^{n-\dim(\sigma)}$. Si l'éventail Σ est unimodulaire, cette hypothèse est donc vérifiée pour tout cône, de sorte que la variété torique X_Σ est lisse.

Nous noterons X_M la variété torique lisse associée à l'éventail Σ_M.

Remarque 2.10. — Soit K un corps. Supposons que le matroïde M soit associé à l'arrangement d'hyperplans d'un sous-espace projectif V de $\mathbf{P}_n$ de dimension r découpé par les hyperplans de coordonnées de $\mathbf{P}_n$ (sur le corps K). Le support $|\Sigma_M|$ de l'éventail Σ_M, réunion des cônes de Σ_M, s'interprète alors comme la *tropicalisation* de $V \cap \mathbf{G}_m^n$.

Il y a plusieurs façons de définir cette tropicalisation.

Munissons le corps K de la valeur absolue triviale et considérons le tore K-analytique $(\mathbf{G}_m^n)^{an}$, au sens de BERKOVICH (1990), c'est-à-dire l'espace des semi-normes multiplicatives sur la K-algèbre $K[T_1^{\pm 1}, \dots, T_n^{\pm 1}]$ qui sont triviales sur K. Il est muni d'une application continue et propre de tropicalisation, $\tau \colon (\mathbf{G}_m^n)^{an} \to \mathbf{R}^n$ qui applique une semi-norme $|\cdot|$ sur $(\log(|T_1|), \dots, \log(|T_n|))$. L'espace de Berkovich $(V \cap \mathbf{G}_m^n)^{an}$ de $V \cap \mathbf{G}_m^n$ est un sous-espace de $(\mathbf{G}_m^n)^{an}$ et son image par τ est égale à $|\Sigma_M|$.

Peut-être plus élémentairement (EINSIEDLER *et al.*, 2006), considérons une extension algébriquement close L de K munie d'une valeur absolue non archimédienne non triviale, mais triviale sur K, par exemple une clôture algébrique du corps $K(\!(z)\!)$ des séries de Laurent. Alors, $|\Sigma_M|$ est l'*adhérence* de l'image de $V(L) \cap (L^\times)^n$ par l'application $(a_1, \dots, a_n) \mapsto (\log(|a_1|), \dots, \log(|a_n|)$ de $(L^\times)^n$ dans $\mathbf{R}^n$.

On peut enfin prendre $K = \mathbf{C}$ et considérer, pour tout nombre réel $\varepsilon > 1$, l'application $\lambda_\varepsilon \colon (\mathbf{C}^\times)^n \to \mathbf{R}^n$ donnée par $\lambda_\varepsilon(z_1, \dots, z_n) = (\log_\varepsilon(|z_1|), \dots, \log_\varepsilon(|z_n|))$ (logarithme en base ε). Lorsque ε tend vers $+\infty$, $\lambda_\varepsilon(V \cap (\mathbf{C}^\times)^n)$ converge vers $|\Sigma_M|$.

2.11. — Soit N un **Z**-module libre de rang fini, n, et soit Σ un éventail unimodulaire de N ; notons r la borne supérieure (dans **N**) des dimensions des cônes de Σ. Soit K un corps ; considérons la K-variété torique X_Σ associée à l'éventail Σ, et notons $A(X_\Sigma)$ son anneau de Chow.

On note V_Σ l'ensemble des *rayons* de Σ, c'est-à-dire des générateurs primitifs des cônes de dimension 1 de Σ. À tout $v \in V_\sigma$ correspond un diviseur de Cartier irréductible D_v de X_Σ.

Soit $S_\Sigma = \mathbf{Z}[(T_v)_{v\in V_\sigma}]$ l'anneau gradué des polynômes à coefficients entiers et à indéterminées dans V_σ. Pour tout entier k, on note S_Σ^k sa composante homogène de degré k.

Pour tout cône σ de Σ, on pose $T_\sigma = \prod_{v\in\sigma\cap V_\Sigma} T_e$; c'est un monôme de degré $\dim(\sigma)$. Pour tout entier k, on définit un sous-module

$$Z^k(\Sigma) = \bigoplus_{\substack{\sigma\in\Sigma \\ \dim(\sigma)=k}} \mathbf{Z}T_\sigma \ ;$$

c'est un sous-module de S_Σ^k, nul pour $k > r$. On pose aussi $Z(\Sigma) = \bigoplus_{k\in\mathbf{N}} Z^k(\Sigma)$.

Soit I_Σ l'idéal homogène de S_Σ engendré par les monômes qui n'appartiennent pas à $Z(\Sigma)$ et J_Σ l'idéal de S_Σ engendré par les polynômes linéaires $\sum_{v\in V_\sigma} \varphi(v)T_v$, pour $\varphi \in N^\vee$.

Proposition 2.12. — *L'unique homomorphisme d'anneaux de* S_Σ *dans* $A(X_\Sigma)$ *qui applique tout* $v \in V_\sigma$ *sur la classe de* D_v *dans* $A^1(X_\Sigma)$ *est surjectif. Son noyau est l'idéal* $I_\Sigma + J_\Sigma$.

L'anneau gradué quotient $A(\Sigma) = S_\Sigma/(I_\Sigma + J_\Sigma)$ sera ainsi appelé l'*anneau de Chow* de l'éventail Σ. Pour tout entier k, on note $A^k(\Sigma)$ sa composante homogène de degré k ; elle est engendrée par $Z^k(\Sigma)$.

Pour $k > \dim(\Sigma)$, on a $A^k(\Sigma) = 0$.

Remarque 2.13. — On note $PL(\Sigma)$ (resp. $PP(\Sigma)$) l'espace vectoriel (resp. la **R**-algèbre) des fonctions de $|\Sigma|$ dans **R** dont la restriction à tout cône de Σ est linéaire (resp. polynomiale) ; une telle fonction est continue. On dit, par abus, que ce sont les fonctions linéaires (resp. polynomiales) par morceaux sur $|\Sigma|$.

Pour $v \in V_\Sigma$, il existe une unique fonction $\varphi_v \in PL(\Sigma)$ telle que pour tout $w \in V_\Sigma$, on a $\varphi_v(w) = 1$ si $w = v$, et $\varphi_v(w) = 0$ sinon. Ces fonctions φ_v, parfois appelées *fonctions de Courant*, forment une base de $PL(\Sigma)$.

D'après (Billera, 1989), l'unique homomorphisme de $\mathbf{R} \otimes S_\Sigma$ dans $PP(\Sigma)$ qui applique T_v sur φ_v, pour tout $v \in V_\Sigma$, est surjectif ; son noyau est engendré par les monômes $T_{v_1} \cdots T_{v_d}$, tels que $v_1, \dots, v_d$ n'engendrent pas un cône de Σ. Par suite, $A(\Sigma)_\mathbf{R}$ est le quotient de $PP(\Sigma)$ par l'idéal engendré par les restrictions à $|\Sigma|$ des formes linéaires sur $N_\mathbf{R}$.

Lemme 2.14. — *L'application de* $\mathrm{PL}(\Sigma)$ *dans* $A^1(X_\Sigma)_{\mathbf{R}}$ *qui, pour tout* $v \in V_\Sigma$*, applique* φ_v *sur la classe de* D_v*, est surjective. Son noyau est le sous-espace de* $\mathrm{PL}(\Sigma)$ *engendré par les restrictions à* $|\Sigma|$ *des formes linéaires sur* $N_{\mathbf{R}}$*.*

À une fonction linéaire par morceaux $\varphi \in \mathrm{PL}(\Sigma)$, on associe le **R**-diviseur (invariant par l'action du tore) $\mathrm{div}(\varphi) = \sum_{v \in V_\Sigma} \varphi(v) D_v$. Ce diviseur est effectif si φ est positive sur $|\Sigma|$.

Plus généralement, soit σ un cône de Σ et soit $V_\sigma \subset X_\sigma$ l'adhérence de l'orbite du tore qui lui correspond (on a $\dim(V_\sigma) = \mathrm{codim}(\sigma)$). On dit que φ est *convexe* en σ si la classe du diviseur $\mathrm{div}(\varphi)|_{V_\sigma}$ sur V_σ est effective. Cela revient à dire qu'il existe une forme linéaire m sur $N_{\mathbf{R}}$ telle que $\varphi = m$ sur σ, et telle que $\varphi \geqslant m$ sur l'*étoile* de σ, c'est-à-dire sur le sous-éventail $\mathrm{star}_\Sigma(\sigma)$ de Σ formé des cônes de Σ contenant une face de σ. On dit que φ est strictement convexe en σ s'il existe une forme linéaire m sur $N_{\mathbf{R}}$ telle que $\varphi = m$ sur σ et telle que $\varphi(v) > m(v)$ pour tout rayon v de l'étoile de σ qui n'appartient pas à σ.

L'ensemble des fonctions $\varphi \in \mathrm{PL}(\Sigma)$ qui sont convexes (resp. strictement convexes) en tout cône $\sigma \in \Sigma$ est un cône (resp. un cône ouvert) de $\mathrm{PL}(\Sigma)$; on l'appelle le cône *nef* (resp. le cône *ample*) de $\mathrm{PL}(\Sigma)$ et on le note $\mathscr{N}_\Sigma$ (resp. $\mathscr{K}_\Sigma$). Ces cônes contiennent l'image du dual de $N_{\mathbf{R}}$, on désigne des mêmes lettres leurs images dans $A^1(X_\Sigma)_{\mathbf{R}}$.

Si $\mathscr{K}_\Sigma$ n'est pas vide, c'est l'intérieur de $\mathscr{N}_\Sigma$, lequel est son adhérence. Cela se produit en particulier lorsque Σ est l'éventail associé à un matroïde ; en effet, Σ est alors un sous-éventail de l'éventail normal d'un polytope.

2.15. — Supposons que Σ soit l'éventail Σ_M associé au matroïde M. On notera alors $A(M)$, S_M, etc. les objets $A(\Sigma_M)$, S_{Σ_M}, etc.

Dans ce cas, les rayons de Σ_M sont les vecteurs e_P, où P parcourt l'ensemble $\mathscr{P}^*_M$ des plats de M tels que $P \neq \varnothing$ et $P \neq |M|$. On a donc $S_M = \mathbf{Z}[(T_P)_{P \in \mathscr{P}^*_M}]$. L'idéal I_M est engendré par les monômes quadratiques $T_P T_Q$, où (P, Q) parcourt l'ensemble des couples d'éléments incomparables de $\mathscr{P}^*_M$, tandis que l'idéal J_M est engendré par les polynômes linéaires

$$\sum_{P \ni i} T_P - \sum_{P \ni j} T_P,$$

où (i, j) parcourt l'ensemble des couples d'éléments de $|M|$.

On a $A^k(M) = 0$ pour $k > r$.

On définit deux éléments α_M et β_M de $A^1(M)$ par

$$\alpha_M = \sum_{P \ni i} T_P, \qquad \beta_M = \sum_{P \not\ni i} T_P,$$

où i est un élément arbitraire de $|M|$ (ils n'en dépendent pas). Si $\mathscr{D}$ est un drapeau de plats donné, on voit, en choisissant i hors de $\sup(\mathscr{D})$, resp. dans $\inf(\mathscr{D})$, que leurs images dans $A^1(M)_{\mathbf{R}}$ appartiennent au cône nef $\mathscr{N}_M$.

Proposition 2.16. — a) *Il existe un unique homomorphisme d'anneaux*

$$\deg\colon \mathrm{A}^r(\mathrm{M}) \to \mathbf{Z}$$

tel que $\deg(\mathrm{T}_{\mathrm{P}_1}\cdots\mathrm{T}_{\mathrm{P}_r}) = 1$ *pour toute suite* $(\mathrm{P}_1,\ldots,\mathrm{P}_r)$ *de plats de* M *vérifiant* $\varnothing \subsetneq \mathrm{P}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{P}_r \subsetneq |\mathrm{M}|$. *C'est un isomorphisme. De plus,* $\deg(\alpha_{\mathrm{M}}^r) = 1$.

b) *Pour tout entier k tel que* $0 \leqslant k \leqslant r$*, on a*

$$\mu^k(\mathrm{M}) = \deg(\alpha_{\mathrm{M}}^{r-k}\beta_{\mathrm{M}}^k).$$

La deuxième partie de la proposition est la généralisation, dans le contexte combinatoire, du théorème 1.15.

2.17. — Soit A une $\mathbf{Z}$-algèbre commutative unifère, graduée, artinienne, et soit r un entier ; on suppose que $\mathrm{A}^k = 0$ pour $k < 0$ ou $k > r$ et on se donne un homomorphisme $\deg\colon \mathrm{A}^r \to \mathbf{Z}$.

On dit que $(\mathrm{A}, \deg)$ vérifie la *dualité de Poincaré* si pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant r$, l'application $a \mapsto (b \mapsto \deg(ab))$ est un isomorphisme de A^k sur $(\mathrm{A}^{r-k})^\vee$.

Soit ℓ un élément de $\mathrm{A}^1_{\mathbf{R}}$ et soit k un entier tel que $k \leqslant r/2$. L'application de Lefschetz associée à ℓ est l'application linéaire $\lambda^k\colon a \mapsto \ell^{r-2k}a$ de $\mathrm{A}^k_{\mathbf{R}}$ dans $\mathrm{A}^{r-k}_{\mathbf{R}}$. On définit aussi une forme bilinéaire symétrique Q^k_ℓ sur $\mathrm{A}^k_{\mathbf{R}}$ par

$$\mathrm{Q}^k_\ell(a,b) = (-1)^k \deg(a\,\ell^{r-2k}b).$$

On note P^k_ℓ le sous-espace de $\mathrm{A}^k_{\mathbf{R}}$ formé des $a \in \mathrm{A}^k_{\mathbf{R}}$ tels que $\ell^{r+1-2k}a = 0$. Si $k > r/2$, on pose $\mathrm{P}^k_\ell = 0$.

On dit que $(\mathrm{A}_{\mathbf{R}}, \ell)$ vérifie le théorème de Lefschetz difficile si λ^k est un isomorphisme pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant r/2$. Alors, pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant r/2$, l'espace $\mathrm{A}^k_{\mathbf{R}}$ admet la *décomposition de Lefschetz* :

$$\mathrm{A}^k_{\mathbf{R}} = \mathrm{P}^k_\ell \oplus \ell\mathrm{P}^{k-1}_\ell \oplus \cdots \oplus \ell^k\mathrm{P}^0_\ell\ ;$$

c'est une décomposition orthogonale pour la forme Q^k_ℓ. Pour tout entier k tel que $r/2 < k \leqslant r$, on obtient une décomposition similaire en écrivant $\mathrm{A}^k_{\mathbf{R}} = \ell^{2k-r}\mathrm{A}^{r-k}_{\mathbf{R}}$:

$$\mathrm{A}^k_{\mathbf{R}} = \ell^{2k-r}\mathrm{P}^{r-k}_\ell \oplus \ell^{2k-r-1}\mathrm{P}^{r-k-1}_\ell \oplus \cdots \oplus \ell^k\mathrm{P}^0_\ell.$$

On dit que $(\mathrm{A}_{\mathbf{R}}, \ell)$ vérifie les *relations de Hodge–Riemann* si la restriction à P^k_ℓ de la forme quadratique associée à Q^k_ℓ est définie positive pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant r/2$.

Exemple 2.18. — La terminologie provient bien sûr des propriétés de l'algèbre de cohomologie d'une variété complexe compacte (connexe) kählérienne. Soit en effet V une telle variété, soit n sa dimension et soit H(V) l'algèbre réelle graduée, gr-commutative, de cohomologie de De Rham. On a $\mathrm{H}^k(\mathrm{V}) = 0$ si $k > 2n$. La décomposition de Hodge munit $\mathrm{H}(\mathrm{V})_{\mathbf{C}}$ d'une bigraduation canonique $\mathrm{H}^k(\mathrm{V})_{\mathbf{C}} = \bigoplus_{p+q=k} \mathrm{H}^{p,q}(\mathrm{V})$; on a $\mathrm{H}^{p,q}(\mathrm{V}) = 0$ si p ou q n'appartient pas à l'intervalle $[0,n]$.

On dispose d'un isomorphisme canonique $\int \colon \mathrm{H}^{2n}(\mathrm{V}) \to \mathbf{R}$. Pour tout entier k, l'homomorphisme $a \mapsto (b \mapsto \int a \wedge b)$ induit un isomorphisme de $\mathrm{H}^k(\mathrm{V})$ sur $\mathrm{H}^{2n-k}(\mathrm{V})^\vee$ (dualité de Poincaré) et de $\mathrm{H}^{p,q}(\mathrm{V})$ sur $\mathrm{H}^{n-p,n-q}(\mathrm{V})^\vee$.

Soit ℓ la classe dans $\mathrm{H}^2(\mathrm{V})$ d'une forme de Kähler sur V ; elle appartient à $\mathrm{H}^{1,1}(\mathrm{V})$. Alors, pour tout entier k tel que $k \leqslant n$, l'application $a \mapsto \ell^k \wedge a$ de $\mathrm{H}^k(\mathrm{V})$ dans $\mathrm{H}^{k+2}(\mathrm{V})$ est injective (théorème de Lefschetz difficile). On note alors $\mathrm{P}^k(\mathrm{V})$ le sous-espace primitif de $\mathrm{H}^k(\mathrm{V})$, noyau de $a \mapsto \ell^{k+1} \wedge a$.

La forme bilinéaire Q^k sur $\mathrm{H}^k(\mathrm{V})$ définie par $\mathrm{Q}^k(a,b) = \int \ell^{n-k} \wedge a \wedge b$ est symétrique si k est pair, alternée si k est impair, de sorte que la forme bilinéaire R^k sur $\mathrm{H}^k(\mathrm{V})_{\mathbf{C}}$ définie par $\mathrm{R}^k(a,b) = i^k \mathrm{Q}^k(a, \bar{b})$ est hermitienne (forme de Riemann). Soit (p,q) un couple d'entiers tels que $p+q=k$. La restriction à $\mathrm{P}^k(\mathrm{V})_{\mathbf{C}} \cap \mathrm{H}^{p,q}(\mathrm{V})$ de cette forme hermitienne est définie, de signe $(-1)^{k(k-1)/2+q}$ (*relations bilinéaires de Hodge–Riemann*). Dans le cas particulier où $p=q$, l'entier $k=2p$ est pair, le coefficient i^k qui intervient dans la définition de R^k est égal à $(-1)^p$, et sur $\mathrm{P}^{2p}(\mathrm{V})_{\mathbf{C}} \cap \mathrm{H}^{p,p}(\mathrm{V})$, la forme de Riemann est définie positive.

Supposons de plus que V soit projective et notons C(V) l'anneau des classes de cycles pour l'équivalence homologique. L'homomorphisme de classe de cycles $\mathrm{C}(\mathrm{V}) \to \mathrm{H}(\mathrm{V})$ est alors injectif, de sorte que C(V) vérifie les conditions du paragraphe précédent. Noter que lorsque V est une variété torique projective lisse, l'équivalence homologique coïncide avec l'équivalence rationnelle et l'homomorphisme de classe de cycles est un isomorphisme.

THÉORÈME 2.19. — *Soit* M *une géométrie combinatoire de rang* > 0 *et soit* $r = \mathrm{rg}(\mathrm{M}) - 1$. *Soit* $\ell \in \mathscr{K}_{\mathrm{M}}$ *une classe ample de* PL(M).

1) *Le couple* $(\mathrm{A}(\mathrm{M}), \deg)$ *vérifie la dualité de Poincaré ;*
2) *Le couple* $(\mathrm{A}(\mathrm{M})_{\mathbf{R}}, \ell)$ *vérifie le théorème de Lefschetz difficile ;*
3) *Le couple* $(\mathrm{A}(\mathrm{M})_{\mathbf{R}}, \ell)$ *vérifie les relations de Hodge–Riemann.*

C'est en quelque sorte le théorème principal de l'article d'ADIPRASITO, HUH & KATZ (2018). Nous donnerons des indications de sa preuve dans la section suivante. Voyons tout de suite comment il entraîne le théorème 1.11.

On commence par en déduire le corollaire suivant, analogue aux inégalités de Khovanskii-Teissier.

COROLLAIRE 2.20. — *Soit* α *et* β *des classes de* $\mathrm{A}^1(\mathrm{M})_{\mathbf{R}}$. *Si* α *est nef, alors*

$$\deg(\alpha^{r-2}\beta^2)\deg(\alpha^r) \leqslant \deg(\alpha^{r-1}\beta)^2.$$

Démonstration. — Par passage à la limite, il suffit de traiter le cas où α est ample. La décomposition de Lefschetz $\mathrm{A}^1(\mathrm{M})_{\mathbf{R}} = \mathrm{P}^1_\alpha(\mathrm{M}) \oplus \langle \alpha \rangle$ est orthogonale pour la forme Q^1_α définie par $\mathrm{Q}^1_\alpha(x,y) = -\deg(x\alpha^{r-2}y)$, laquelle est définie positive sur $\mathrm{P}^1_\alpha(\mathrm{M})$ et définie négative sur $\langle \alpha \rangle$. L'inégalité à vérifier est évidente si β est proportionnelle à α. Sinon, le sous-espace $\langle \alpha, \beta \rangle$ est de dimension 2 et la restriction de la forme Q^1_α y est de signature $(1,1)$. Son discriminant est donc négatif, d'où le corollaire. $\square$

2.21. *Démonstration du théorème 1.11.* — On prouve d'abord que pour tout $k \in \{0, \dots, r\}$, l'entier $\mu^k(\mathrm{M})$ est strictement positif, par exemple en déduisant du théorème de Weisner qu'il est égal au nombre de « drapeaux initiaux descendants » de longueur k, c'est-à-dire de familles $(\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_k)$ de plats de M tels que $\mathrm{P}_1 \subset \dots \subset \mathrm{P}_k$, $\mathrm{rg}_\mathrm{M}(\mathrm{P}_j) = j$ pour tout j, et $\inf(\mathrm{P}_1) > \inf(\mathrm{P}_2) > \dots > \inf(\mathrm{P}_k) > 0$. (Noter que ces conditions imposent $\mathrm{P}_1 \neq \varnothing$ et $\mathrm{P}_k \neq |\mathrm{M}|$.)

D'après la proposition 2.16, on a $\mu^k(\mathrm{M}) = \deg(\alpha_\mathrm{M}^{r-k}\beta_\mathrm{M}^k)$. Ainsi, lorsque $k = r-1$, l'inégalité (ii) du théorème 1.11 n'est autre que celle du corollaire 2.20, appliquée à $\alpha = \alpha_\mathrm{M}$ et $\beta = \beta_\mathrm{M}$.

Sinon, on remplace M par la géométrie combinatoire associée au matroïde tronqué $\tau(\mathrm{M})$ dont le treillis des plats est l'ensemble des plats de M dont le rang n'appartient pas à $[k+1, r]$. Son rang est égal à $k+2$ et l'on a $\mu^j(\mathrm{M}) = \mu^j(\tau(\mathrm{M}))$ pour tout entier j tel que $j \leqslant k+1$. L'inégalité voulue se déduit donc du cas déjà traité.

3. FILTRES

3.1. — La démonstration du théorème 2.19 est combinatoire et les paragraphes qui suivent ne font guère plus qu'en décrire le cheminement ; je renvoie à (Adiprasito, Huh & Katz, 2018, §6–8) pour les détails.

Cette démonstration consiste à partir de l'éventail de l'espace projectif, pour lequel la conclusion du théorème est évidente, et à le modifier progressivement jusqu'à l'éventail Σ_M, de sorte qu'à chaque étape la conclusion du théorème reste vraie. Ces modifications exigent d'introduire des éventails un peu plus compliqués.

On dira ainsi qu'un éventail Σ vérifie la dualité de Poincaré en dimension r s'il existe un isomorphisme $\deg\colon \mathrm{A}^r(\Sigma) \to \mathbf{Z}$ tel que l'anneau de Chow $(\mathrm{A}(\Sigma), \deg)$ la vérifie. On dira alors que Σ vérifie le théorème de Lefschetz difficile, resp. les relations de Hodge–Riemann, si $(\mathrm{A}(\Sigma)_\mathbf{R}, \ell)$ les vérifie pour toute classe ample $\ell \in \mathscr{K}_\Sigma$.

3.2. — Soit M un matroïde sans boucle et soit $\mathscr{P}_\mathrm{M}$ le treillis de ses plats. On suppose que M est de rang > 0 et on pose $r = \mathrm{rg}(\mathrm{M}) - 1$.

On note $\inf(\mathscr{D})$ l'intersection, dans $|\mathrm{M}|$, des éléments d'un drapeau $\mathscr{D}$ de plats de M ; si $\mathscr{D} = \{\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_d\}$, où $\varnothing \subsetneq \mathrm{P}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathrm{P}_d \subsetneq |\mathrm{M}|$, on a donc $\inf(\mathscr{D}) = |\mathrm{M}|$ lorsque $d = 0$, et $\inf(\mathscr{D}) = \mathrm{P}_1$ sinon.

On dit que I et $\mathscr{D}$ sont compatibles, et on note $\mathrm{I} < \mathscr{D}$, si I est une partie stricte de $\inf(\mathscr{D})$. On dit qu'ils sont compatibles vis-à-vis de M, et on note $\mathrm{I} <_\mathrm{M} \mathscr{D}$, si $\mathrm{Card}(\mathrm{I}) < \mathrm{rg}_\mathrm{M}(\inf(\mathscr{D}))$; cela implique qu'ils sont compatibles, car le rang d'un plat est majoré par son cardinal.

Soit $\mathscr{D}$ un tel drapeau et soit I une partie de $\inf(\mathscr{D})$. On note $\sigma_{\mathrm{I},\mathscr{D}}$ le cône engendré par les vecteurs e_i, pour $i \in \mathrm{I}$, et les vecteurs e_P, pour $\mathrm{P} \in \mathscr{D}$. Si I et $\mathscr{D}$ sont compatibles, c'est un cône de dimension $\mathrm{Card}(\mathrm{I}) + \mathrm{Card}(\mathscr{D})$.

3.3. — On appelle *filtre*[2] de plats sur M une partie non vide $\mathscr{P}$ de $\mathscr{P}_{\mathrm{M}}$, ne contenant pas $\varnothing$, qui contient tout plat de $|\mathrm{M}|$ contenant un élément de $\mathscr{P}$.

Soit $\mathscr{P}$ un filtre de plats de M. L'*éventail de Bergman* associé à $(\mathrm{M}, \mathscr{P})$ est l'ensemble $\Sigma_{\mathrm{M},\mathscr{P}}$ des cônes $\sigma_{\mathrm{I},\mathscr{D}}$, où $\mathscr{D}$ parcourt l'ensemble des drapeaux de plats de M appartenant à $\mathscr{P}$ et I parcourt l'ensemble des parties de $|\mathrm{M}|$ compatibles avec $\mathscr{D}$ et telles que $\langle \mathrm{I}\rangle \notin \mathscr{P}$. L'*éventail de Bergman réduit* $\widetilde{\Sigma}_{\mathrm{M},\mathscr{P}}$ est l'ensemble de ces cônes, où l'on exige en outre que I et $\mathscr{D}$ soient compatibles vis-à-vis de M.

Si $(\mathrm{I}_1, \mathscr{D}_1)$ et $(\mathrm{I}_2, \mathscr{D}_2)$ sont des couples tels que $\mathrm{I}_1 < \mathscr{D}_1$ et $\mathrm{I}_2 < \mathscr{D}_2$, alors $\mathrm{I}_1 \cap \mathrm{I}_2 < \mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2$, et de même pour la relation $<_{\mathrm{M}}$. De plus, on a $\sigma_{\mathrm{I}_1,\mathscr{D}_1} \cap \sigma_{\mathrm{I}_2,\mathscr{D}_2} = \sigma_{\mathrm{I}_1\cap\mathrm{I}_2,\mathscr{D}_1\cap\mathscr{D}_2}$. Cela entraîne que $\Sigma_{\mathrm{M},\mathscr{P}}$ et $\widetilde{\Sigma}_{\mathrm{M},\mathscr{P}}$ sont effectivement des éventails de $\mathrm{N}_{\mathbf{R}}$.

Lorsque $\mathscr{P} = \mathscr{P}_{\mathrm{M}} - \{\varnothing\}$, la condition $\langle \mathrm{I}\rangle \notin \mathscr{P}$ équivaut à $\mathrm{I} = \varnothing$, et la condition $\mathrm{I} \subsetneq \inf(\mathscr{D})$ est vérifiée car $\inf(\mathscr{D})$ n'est pas vide. Dans ce cas, les deux éventails $\Sigma_{\mathrm{M},\mathscr{P}}$ et $\widetilde{\Sigma}_{\mathrm{M},\mathscr{P}}$ coïncident avec l'éventail Σ_{M}.

Lorsque M est le matroïde booléen sur $|\mathrm{M}|$ (c'est-à-dire dont toute partie est plate), l'éventail $\Sigma_{\mathrm{M},\mathscr{P}}$ est l'éventail d'un polytope qui est obtenu par subdivisions étoilées successives à partir d'un simplexe (Adiprasito, Huh & Katz, 2018, prop. 2.4).

Lemme 3.4. — 1) *L'éventail $\Sigma_{\mathrm{M},\mathscr{P}}$ est un sous-éventail de l'éventail normal d'un polytope ; en particulier, son cône ample n'est pas vide.*

2) *L'éventail $\widetilde{\Sigma}_{\mathrm{M},\mathscr{P}}$ est purement de dimension r.*

3.5. — L'éventail $\Sigma_{\mathrm{M},\mathscr{P}}$ a pour rayons, d'une part, les vecteurs e_i, pour $i \in |\mathrm{M}|$ tel que $\langle i\rangle \notin \mathscr{P}$, et, d'autre part, les vecteurs e_{P}, où $\mathrm{P} \in \mathscr{P} - \{|\mathrm{M}|\}$. Son anneau de Chow $\mathrm{A}(\Sigma_{\mathrm{M},\mathscr{P}})$, noté aussi $\mathrm{A}(\mathrm{M}, \mathscr{P})$, est ainsi le quotient de l'anneau de polynômes $\mathrm{S}_{\mathrm{M},\mathscr{P}}$ en des indéterminées T_i (pour $i \in |\mathrm{M}|$) et T_{P} (pour $\mathrm{P} \in \mathscr{P} - \{|\mathrm{M}|\}$) par l'idéal engendré par les éléments du type suivant :

(R_1) $\mathrm{T}_{\mathrm{P}_1}\mathrm{T}_{\mathrm{P}_2}$, où $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2 \in \mathscr{P}$ sont deux plats incomparables ;
(R_2) $\mathrm{T}_i\mathrm{T}_{\mathrm{P}}$, où $\mathrm{P} \in \mathscr{P}$ et $i \in |\mathrm{M}| - \mathrm{P}$;
(R_3) $\prod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{T}_i$, où I est une partie libre non vide de $|\mathrm{M}|$ telle que $\langle \mathrm{I}\rangle \in \mathscr{P}$;
(R_4) $(\mathrm{T}_i + \sum_{\mathrm{P}\ni i} \mathrm{T}_{\mathrm{P}}) - (\mathrm{T}_j + \sum_{\mathrm{P}\ni j} \mathrm{T}_{\mathrm{P}})$, où i, j sont des éléments de $|\mathrm{M}|$, distincts.

Pour $i \in |\mathrm{M}|$ et $\mathrm{P} \in \mathscr{P}$, on notera t_i, resp. t_{P}, la classe de T_i, resp. de T_{P}, dans l'anneau $\mathrm{A}(\Sigma_{\mathrm{M},\mathscr{P}})$.

L'éventail $\widetilde{\Sigma}_{\mathrm{M},\mathscr{P}}$ est un sous-éventail de $\Sigma_{\mathrm{M},\mathscr{P}}$. Son anneau de Chow $\mathrm{A}(\widetilde{\Sigma}_{\mathrm{M},\mathscr{P}})$ est donc un quotient de l'anneau $\mathrm{A}(\Sigma_{\mathrm{M},\mathscr{P}})$. En vérifiant que les relations supplémentaires découlent de celles imposées dans $\mathrm{A}(\Sigma_{\mathrm{M},\mathscr{P}})$, on démontre la proposition suivante.

Proposition 3.6. — *L'inclusion de $\mathrm{X}(\widetilde{\Sigma}_{\mathrm{M},\mathscr{P}})$ dans $\mathrm{X}(\Sigma_{\mathrm{M},\mathscr{P}})$ induit un isomorphisme de $\mathrm{A}(\Sigma_{\mathrm{M},\mathscr{P}})$ sur $\mathrm{A}(\widetilde{\Sigma}_{\mathrm{M},\mathscr{P}})$. En particulier, $\mathrm{A}^k(\Sigma_{\mathrm{M},\mathscr{P}}) = 0$ pour $k > r$.*

---

[2] La terminologie est un peu trompeuse car on n'impose pas l'hypothèse de stabilité par $\wedge$; dans le cas du treillis des parties d'un ensemble, une telle partie n'est pas nécessairement un filtre au sens usuel.

Exemple 3.7. — Supposons que $\mathscr{P} = \{|\mathrm{M}|\}$; pour simplifier les notations, posons $\Sigma = \Sigma_{\mathrm{M},\{\mathrm{M}\}}$ et $\widetilde{\Sigma} = \widetilde{\Sigma}_{\mathrm{M},\{\mathrm{M}\}}$.

Les rayons de l'éventail Σ sont les vecteurs e_i, pour $i \in |\mathrm{M}|$. Plus généralement, un cône σ_{I} appartient à Σ si et seulement si $\langle \mathrm{I} \rangle \neq |\mathrm{M}|$; il appartient à $\widetilde{\Sigma}$ si et seulement si $\mathrm{Card}(\mathrm{I}) \leqslant r$. En posant $n = \mathrm{Card}(|\mathrm{M}|) - 1$, on voit donc que le support de $\widetilde{\Sigma}$ est la réunion des cônes de dimension $\leqslant r$ de l'éventail de l'espace projectif $\mathbf{P}_n$.

L'anneau de Chow $\mathrm{A}(\mathrm{M}, \{\mathrm{M}\})$ n'a donc aucun générateur de la forme T_{P} ; les relations des types (R_1) et (R_2) sont alors triviales. Les relations du type (R_4) entraînent que les T_i, pour tout $i \in |\mathrm{M}|$, ont même image dans $\mathrm{A}(\mathrm{M}, \{|\mathrm{M}|\})$; notons t cette image. Les relations du type (R_3) s'écrivent alors $t^{r+1} = 0$. Autrement dit,

$$\mathrm{A}(\mathrm{M}, \{|\mathrm{M}|\}) = \mathbf{Z}[t]/(t^{r+1});$$

c'est donc l'anneau de Chow de l'espace projectif $\mathbf{P}_r$, et il vérifie de façon évidente la conclusion du théorème 2.19.

3.8. — Ces notations introduites, la démonstration du théorème 2.19 procède par récurrence et consiste à examiner le comportement de l'anneau $\mathrm{A}(\mathrm{M}, \mathscr{P})$ lorsqu'on adjoint au filtre $\mathscr{P}$ un plat P qui est maximal dans $\mathscr{P}_{\mathrm{M}} - \mathscr{P}$. Dans l'article (Adiprasito *et al.*, 2018), la modification d'éventails qui en résulte est appelée *flip matroïdal* de centre P. Cela revient à enlever à $\Sigma_{\mathrm{M},\mathscr{P}}$ les cônes $\sigma_{\mathrm{I},\mathscr{D}}$ tels que $\mathrm{I} < \mathscr{D}$, $\langle \mathrm{I} \rangle = \mathrm{P}$ et $\inf(\mathscr{D}) \neq \mathrm{P}$, et à lui ajouter les cônes $\sigma_{\mathrm{I},\mathscr{D}}$ où $\mathrm{I} < \mathscr{D}$, $\langle \mathrm{I} \rangle \neq \mathrm{P}$ et $\inf(\mathscr{D}) = \mathrm{P}$. Posons $\mathscr{P}' = \mathscr{P} \cup \{\mathrm{P}\}$. Le plat P est minimal dans $\mathscr{P}'$.

Rappelons aussi que l'on note M/P (resp. $\mathrm{M}\,|\,\mathrm{P}$) le matroïde dont les plats sont ceux de M contenant P (resp. contenus dans P).

On raisonne par récurrence, en supposant la conclusion du théorème 2.19 satisfaite par tout anneau de la forme $\mathrm{A}(\mathrm{M}_1, \mathscr{P}_1)$ tel que soit $\mathrm{rg}(\mathrm{M}_1) < \mathrm{rg}(\mathrm{M})$, soit $\mathrm{rg}(\mathrm{M}_1) = \mathrm{rg}(\mathrm{M})$ et $\mathrm{Card}(\mathscr{P}_1) < \mathrm{Card}(\mathscr{P})$.

Proposition 3.9. — *Il existe un unique homomorphisme d'anneaux*

$$\Phi_{\mathrm{P}} \colon \mathrm{A}(\mathrm{M}, \mathscr{P}) \to \mathrm{A}(\mathrm{M}, \mathscr{P}')$$

tel que $\Phi_{\mathrm{P}}(t_{\mathrm{Q}}) = t_{\mathrm{Q}}$ *pour tout* $\mathrm{Q} \in \mathscr{P} - \{|\mathrm{M}|\}$ *et tel que* $\Phi_{\mathrm{P}}(t_i) = t_i + t_{\mathrm{P}}$ *si* $i \in \mathrm{P}$, *et* $\Phi_{\mathrm{P}}(t_i) = t_i$ *sinon. Si* $\mathrm{rg}_{\mathrm{M}}(\mathrm{P}) = 1$, *c'est un isomorphisme.*

Proposition 3.10. — *Soit p un entier $\geqslant 1$.*

1) *Il existe un unique homomorphisme de groupes* $\Psi^p_{\mathrm{P}} \colon \mathrm{A}(\mathrm{M}/\mathrm{P}) \to \mathrm{A}(\mathrm{M}, \mathscr{P}')$ *tel que* $\Psi^p_{\mathrm{P}}(t_{\mathscr{D}}) = t^p_{\mathrm{P}} t_{\mathscr{D}}$ *pour tout drapeau* $\mathscr{D}$ *de plats de* M_{P} *; il est homogène de degré p.*
2) *Il existe un unique homomorphisme de groupes* $\Gamma^p_{\mathrm{P}} \colon \mathrm{A}(\mathrm{M}\,|\,\mathrm{P}) \to \mathrm{A}(\mathrm{M})$ *tel que* $\Gamma^p_{\mathrm{P}}(t_{\mathscr{D}}) = t^p_{\mathrm{P}} t_{\mathscr{D}}$ *pour tout drapeau* $\mathscr{D}$ *de plats de* M^{P} *; il est homogène de degré p.*

Théorème 3.11. — *L'homomorphisme*

$$\Phi_{\mathrm{P}} + \sum_{p=1}^{\mathrm{rg}_{\mathrm{M}}(\mathrm{P})-1} \Psi^p_{\mathrm{P}} \colon \mathrm{A}(\mathrm{M}, \mathscr{P}) \oplus \mathrm{A}(\mathrm{M}/\mathrm{P})[-p] \to \mathrm{A}(\mathrm{M}, \mathscr{P}')$$

est un isomorphisme d'anneaux gradués, où le symbole $[-p]$ signifie que la graduation est décalée de $-p$.

Corollaire 3.12. — *L'homomorphisme Φ_{P} induit un isomorphisme*

$$\mathrm{A}^r(\mathrm{M}, \mathscr{P}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{A}^r(\mathrm{M}, \mathscr{P}')$$

et l'algèbre $\mathrm{A}(\mathrm{M}, \mathscr{P}')_{\mathbf{R}}$ muni de l'isomorphisme $\deg \circ \Phi_{\mathrm{P}} \colon \mathrm{A}^r(\mathrm{M}, \mathscr{P}') \to \mathbf{Z}$, vérifie la dualité de Poincaré.

3.13. — La démonstration du théorème 3.11 commence par établir la surjectivité de l'homomorphisme indiqué. On en déduit ensuite que l'homomorphisme $\Psi_{\mathrm{P}}^{\mathrm{rg}_{\mathrm{M}}(\mathrm{P})}$ induit un isomorphisme de $\mathrm{A}^{r-\mathrm{rg}_{\mathrm{M}}(\mathrm{P})}(\mathrm{M}/\mathrm{P})$ sur $\mathrm{A}^r(\mathrm{M}, \mathscr{P})$. Sous l'hypothèse que la dualité de Poincaré vaut pour $\mathrm{A}(\mathrm{M}, \mathscr{P})$ et $\mathrm{A}(\mathrm{M}/\mathrm{P})$, une dernière étape prouve l'injectivité de l'homomorphisme. Compte tenu du corollaire, l'algèbre $\mathrm{A}(\mathrm{M}, \mathscr{P}')$ vérifie alors la dualité de Poincaré.

Par récurrence, cela prouve ainsi que pour tout matroïde M de rang $r+1$ et tout filtre de plats $\mathscr{P}$ sur M, l'anneau $\mathrm{A}(\mathrm{M}, \mathscr{P})$ vérifie la dualité de Poincaré en dimension r. En particulier, pour $\mathscr{P} = \mathscr{P}_{\mathrm{M}}$, l'anneau $\mathrm{A}(\mathrm{M})$ vérifie la dualité de Poincaré.

3.14. — La dualité de Poincaré acquise, la démonstration du théorème de Lefschetz difficile et celle des inégalités de Hodge–Riemann sont menées de front : le théorème de Lefschetz difficile affirme que la forme bilinéaire de Hodge–Riemann est non dégénérée, et les inégalités de Hodge–Riemann en précisent la signature.

Grâce à la remarque que la signature est une fonction localement constante sur l'espace des formes quadratiques non dégénérées, un argument élémentaire de déformation prouve que si le théorème de Lefschetz difficile est vérifié pour toute classe ample, alors les inégalités de Hodge–Riemann valent pour toute classe ample si et seulement si elle valent pour *une* classe ample.

Soit Σ un éventail unimodulaire vérifiant la dualité de Poincaré en dimension r. Pour tout rayon $v \in \mathrm{V}_\Sigma$, l'algèbre quotient $\mathrm{A}(\Sigma)_{\mathbf{R}}/\operatorname{ann}(t_v)$, associée à l'étoile $\operatorname{star}_\Sigma(\sigma)$, satisfait la dualité de Poincaré en dimension $r-1$, et Adiprasito, Huh & Katz (2018) introduisent la variante « locale » des inégalités de Hodge–Riemann qui postule que cette algèbre vérifie ces inégalités pour (l'image de) toute classe ample dans $\mathscr{K}_\Sigma$.

Proposition 3.15. — *Les inégalités de Hodge–Riemann locales impliquent le théorème de Lefschetz difficile.*

3.16. — On démontre la validité des inégalités de Hodge–Riemann pour l'algèbre $\mathrm{A}(\mathrm{M}, \mathscr{P})_{\mathbf{R}}$ en raisonnant par récurrence d'abord sur le rang de M puis sur le cardinal de $\mathscr{P}$. Lorsque $\mathscr{P} = \varnothing$, on a déjà mentionné que l'algèbre $\mathrm{A}(\mathrm{M}, \mathscr{P})_{\mathbf{R}}$, isomorphe à l'algèbre $\mathbf{R}[t]/(t^{r+1})$ associée à $\mathbf{P}_r$, vérifie le résultat voulu. Une première réduction permet de supposer que M est une géométrie combinatoire.

Revenons alors au contexte d'un flip matroïdal (§3.8) : $\mathscr{P}$ est un filtre de plats sur M, P est un plat maximal dans $\mathscr{P}_{\mathrm{M}} - \mathscr{P}$ et $\mathscr{P}' = \mathscr{P} \cup \{\mathrm{P}\}$.

Tout d'abord, Adiprasito, Huh & Katz (2018, prop. 3.5) observent que l'étoile $\mathrm{star}_{\Sigma_{\mathrm{M},\mathscr{P}'}}$ de tout rayon v est le produit des éventails $\Sigma_{\mathrm{M}\,|\,\mathrm{P},\mathscr{P}\,|\,\mathrm{P}}$ et $\Sigma_{\mathrm{M}/\mathrm{P}}$ si le rayon v est associé à un plat P, et l'éventail $\Sigma_{\mathrm{M}_i,\mathscr{P}_i}$ si le rayon v est associé à un élément i de $|\mathrm{M}|$. (On a noté $\mathscr{P}\,|\,\mathrm{P}$ l'ensemble des plats de $\mathscr{P}$ qui sont contenus dans P ; c'est un filtre de plats sur $\mathrm{M}\,|\,\mathrm{P}$.) Dans ce dernier cas, l'éventail vérifie les inégalités de Hodge–Riemann, par l'hypothèse de récurrence. Dans le premier cas, les deux éventails qui interviennent les vérifient également, donc leur produit aussi : cela revient à prouver que l'algèbre $\mathrm{A}(\mathrm{M}\,|\,\mathrm{P}, \mathscr{P}\,|\,\mathrm{P}) \otimes \mathrm{A}(\mathrm{M}/\mathrm{P})$ vérifie ces inégalités, ce que l'on démontre en se ramenant au cas du produit tensoriel $\mathbf{R}[t]/(t^{a+1}) \otimes \mathbf{R}[t]/(t^{b+1})$ associé à $\mathbf{P}_a \times \mathbf{P}_b$.

Ainsi, l'éventail $\Sigma_{\mathrm{M},\mathscr{P}'}$ vérifie les inégalités locales de Hodge–Riemann. Il vérifie donc le théorème de Lefschetz difficile.

Il reste à démontrer les inégalités de Hodge–Riemann, mais il suffit maintenant de les vérifier pour *une* classe. La conclusion du théorème 3.11 fournit un isomorphisme de $\mathbf{R}$-espaces vectoriels gradués

$$\mathrm{A}(\mathrm{M}, \mathscr{P}')_{\mathbf{R}} \simeq \mathrm{A}(\mathrm{M}, \mathscr{P})_{\mathbf{R}} \oplus \Big(\mathbf{R}[t]/(t^{\mathrm{rg}_{\mathrm{M}}(\mathrm{P})-1}) \otimes_{\mathbf{R}} \mathrm{A}(\mathrm{M}/\mathrm{P})\Big)[-1]$$

qu'Adiprasito, Huh & Katz (2018) utilisent pour construire des classes amples qui vérifient les inégalités de Hodge–Riemann.

4. PLATS

4.1. — Concluons ce rapport en évoquant une autre conjecture, encore ouverte, en combinatoire énumérative des matroïdes, mais à laquelle l'article de Huh & Wang (2017) apporte une réponse positive dans le cas représentable.

Soit M un matroïde. Pour tout entier k, on note $\mathrm{M}^{(k)}$ l'ensemble des plats de rang k de M et on pose $\mathrm{W}_k(\mathrm{M}) = \mathrm{Card}(\mathrm{M}^{(k)})$; ce sont les *nombres de Whitney de seconde espèce* de M. Ils sont nuls pour $k < 0$ ou $k > \mathrm{rg}(\mathrm{M})$.

Conjecture 4.2 (conjecture de Rota–Welsh). — *Soit* M *un matroïde et soit* $r = \mathrm{rg}(\mathrm{M})$.

(i) *La suite* $(\mathrm{W}_0(\mathrm{M}), \dots, \mathrm{W}_r)$ *est log-concave ; en particulier, elle est unimodale ;*
(ii) *Pour tout entier* k *tel que* $0 \leqslant k \leqslant r/2$, *on a* $\mathrm{W}_k(\mathrm{M}) \leqslant \mathrm{W}_{r-k}(\mathrm{M})$ *;*
(iii) *On a* $\mathrm{W}_0(\mathrm{M}) \leqslant \mathrm{W}_1(\mathrm{M}) \leqslant \cdots \leqslant \mathrm{W}_{\lfloor r/2\rfloor}(\mathrm{M})$.

L'unimodalité a été conjecturée par Rota (1971) et on doit à Welsh (1976) la suggestion que cette suite pourrait être log-concave. Mason (1972) conjecture même que le quotient $\mathrm{W}_k(\mathrm{M})^2/\mathrm{W}_{k-1}(\mathrm{M})\mathrm{W}_{k+1}(\mathrm{M})$ serait toujours supérieur ou égal à $(k+1)/k$, qui est la valeur prise par ce quotient pour la structure de matroïde sur $|\mathrm{M}|$ pour laquelle toute partie est libre (« matroïde libre »).

Théorème 4.3 (Huh & Wang, 2017). — *Soit* M *un matroïde* représentable *et soit* $r = \mathrm{rg}(\mathrm{M})$. *Soit* p, q *des entiers tels que* $0 \leqslant p \leqslant \inf(q, r-q)$. *Il existe une application injective* $\varphi\colon \mathrm{M}^{(p)} \to \mathrm{M}^{(q)}$ *telle que* $x \subset \varphi(x)$ *pour tout* $x \in \mathrm{M}^{(p)}$. *En particulier, on a* $\mathrm{W}_p(\mathrm{M}) \leqslant \mathrm{W}_q(\mathrm{M})$.

En prenant $p = k$ et $q = p + 1$ (resp. $q = r - k$), on en déduit en particulier que les assertions (ii) et (iii) de la conjecture 4.2 sont satisfaites pour un matroïde représentable.

Dans le cas d'un matroïde représentable de rang 3, on retrouve le théorème classique de de Bruijn & Erdős (1948) selon lequel n points non alignés d'un plan projectif déterminent au moins n droites.

4.4. — Soit M un matroïde, posons $n + 1 = \mathrm{Card}(|\mathrm{M}|)$ et $r = \mathrm{rg}(\mathrm{M})$; on suppose que $|\mathrm{M}| = \{0, \dots, n\}$. Supposons M représentable sur un corps K. Notons $[x_0 : \dots : x_n]$ les coordonnées homogènes de $\mathbf{P}_{n,\mathrm{K}}$ et identifions le complémentaire de l'hyperplan défini par $x_0 = 0$ à l'espace affine $\mathbf{A}^n_{\mathrm{K}}$. Considérons un sous-espace affine L de dimension r de K^n dont l'adhérence X dans $\mathbf{P}_{n,\mathrm{K}}$ représente M, au sens où les hyperplans de coordonnées de $\mathbf{P}_{n,\mathrm{K}}$ découpent sur X un arrangement d'hyperplans qui représente M. Pour tout circuit C de M, il existe une famille $(a_{\mathrm{C},i})_{i\in\mathrm{C}}$ d'éléments de K, non tous nuls, unique à multiplication près par un élément non nul de K, telle que $\sum_{i\in\mathrm{C}} a_{\mathrm{C},i} x_i = 0$ sur X.

Soit Y l'adhérence de L dans le produit des droites projectives $(\mathbf{P}_{1,\mathrm{K}})^n$. Notons $[z_1, w_1], \dots, [z_n, w_n]$ les coordonnées multi-homogènes de $\mathbf{P}^n_{1,\mathrm{K}}$. La démonstration du théorème 4.3 repose sur l'observation suivante, due à Ardila & Boocher (2016) qui décrivent l'idéal homogène de Y.

Proposition 4.5. — *La variété* Y *est définie dans* $(\mathbf{P}_{1,\mathrm{K}})^n$ *par la famille d'équations multi-homogènes*

$$\sum_{i\in\mathrm{C}} a_{\mathrm{C},i} z_i \prod_{j\in\mathrm{C}-\{i\}} w_j = 0,$$

où C *parcourt l'ensemble des circuits du matroïde* M.

Pour tout plat $\mathrm{P} \in \mathscr{P}_{\mathrm{M}}$, soit Y_{P} l'intersection de Y et du sous-espace localement fermé de $(\mathbf{P}_{1,\mathrm{K}})^n$ défini par $w_i = 0$ si et seulement si $i \notin \mathrm{P}$.

Corollaire 4.6. — *La famille* $(\mathrm{Y}_{\mathrm{P}})_{\mathrm{P}\in\mathscr{P}_{\mathrm{M}}}$ *est une partition de* Y *en parties localement fermées. De plus, pour tout plat* P *de* M, Y_{P} *est isomorphe à l'espace affine* $\mathbf{A}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{rg}_{\mathrm{M}}(\mathrm{P})}$.

4.7. — Bien que Y soit singulière en général, l'existence de la partition $(\mathrm{Y}_{\mathrm{P}})$ a des conséquences remarquables sur sa cohomologie.

Pour fixer les idées, choisissons un nombre premier ℓ distinct de la caractéristique de K et notons H(Y) la cohomologie étale de $\mathrm{Y}_{\overline{\mathrm{K}}}$ à coefficients dans $\mathbf{Q}_\ell$. Lorsque K est de caractéristique $p > 0$, on peut se ramener au cas où K est une clôture algébrique d'un corps fini. Lorsque K est de caractéristique zéro, on peut préférer se ramener au cas où $\mathrm{K} = \mathbf{C}$ et prendre pour H(Y) la cohomologie singulière de $\mathrm{Y}(\mathbf{C})$ munie de sa structure de Hodge mixte. Dans les deux cas, on dispose d'une filtration par le poids sur les espaces de cohomologie $\mathrm{H}^k(\mathrm{Y})$.

Notons aussi $\mathrm{IH}(\mathrm{Y})$ la *cohomologie d'intersection* de Y (Goresky & MacPherson, 1983; Beĭlinson, Bernstein, Deligne & Gabber, 2018) : disons juste que c'est la cohomologie d'un complexe borné à cohomologie constructible sur Y, le complexe d'intersection décalé $\mathrm{IC}_\mathrm{Y}[-r]$, caractérisé (dans une catégorie dérivée convenable) d'une part par la propriété qu'il prolonge le faisceau constant sur le lieu lisse de Y, et d'autre part par les « conditions de perversité » (décalées) sur la dimension du support de ses faisceaux de cohomologies et de ceux de son dual de Verdier.

Les espaces $\mathrm{H}^k(\mathrm{Y})$ et $\mathrm{IH}^k(\mathrm{Y})$ sont nuls si $k \notin [0, 2r]$. De plus, (Björner & Ekedahl, 2009, th. 3.1) déduisent du corollaire 4.6 que pour tout entier k,

1) Si k est impair, on a $\mathrm{H}^k(\mathrm{Y}) = 0$;
2) Si k est pair, l'espace $\mathrm{H}^k(\mathrm{Y})$ est pur de poids k et de dimension $\mathrm{W}_{k/2}(\mathrm{M})$, engendré par les classes de cycles $[\overline{\mathrm{Y}_\mathrm{P}}]$, pour $\mathrm{P} \in \mathrm{M}^{(k/2)}$;
3) L'homomorphisme canonique de $\mathrm{H}^k(\mathrm{Y})$ dans $\mathrm{IH}^k(\mathrm{Y})$ est injectif.

Par récurrence sur le cardinal de $\mathscr{P}_\mathrm{M}$, les deux premières assertions se déduisent de la cohomologie des espaces affines et de la suite exacte longue de cohomologie à support compact associée à une partition de Y en un ouvert et le fermé complémentaire. La troisième assertion est démontrée par Björner & Ekedahl (2009, th. 2.1) lorsque K est la clôture algébrique d'un corps fini, et par Weber (2004, th. 1.8) lorsque $\mathrm{K} = \mathbf{C}$: le noyau de l'homomorphisme canonique de $\mathrm{H}^k(\mathrm{Y})$ dans $\mathrm{IH}^k(\mathrm{Y})$ est la partie de poids $< k$ de $\mathrm{H}^k(\mathrm{Y})$. C'est une conséquence du comportement des poids par les six opérations cohomologiques usuelles (Deligne, 1974, 1980) et du fait que le prolongement intermédiaire d'un faisceau pervers pur est un faisceau pervers pur de même poids.

4.8. — La cohomologie d'intersection $\mathrm{IH}(\mathrm{Y})$ de Y est un module sur sa cohomologie usuelle $\mathrm{H}(\mathrm{Y})$. En particulier, pour tout fibré en droites ample $\mathscr{L}$ sur Y et tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant r/2$, on peut considérer l'homomorphisme de Lefschetz

$$c_1(\mathscr{L})^{r-2k}\cap\colon \mathrm{IH}^{2k}(\mathrm{Y}) \to \mathrm{IH}^{2r-2k}(\mathrm{Y}).$$

Cet homomorphisme est injectif : le théorème de Lefschetz difficile vaut pour la cohomologie d'intersection (Beĭlinson, Bernstein, Deligne & Gabber, 2018, 5.4.10, 6.2.10).

Puisque l'homomorphisme canonique de $\mathrm{H}^{2k}(\mathrm{Y})$ dans $\mathrm{IH}^{2k}(\mathrm{Y})$ est injectif, il en résulte que l'homomorphisme de Lefschetz

$$c_1(\mathscr{L})^{r-2k}\cap\colon \mathrm{H}^{2k}(\mathrm{Y}) \to \mathrm{H}^{2r-2k}(\mathrm{Y})$$

est encore injectif. Autrement dit : le théorème de Lefschetz difficile vaut pour la cohomologie usuelle de Y. Cela démontre déjà l'inégalité $\mathrm{W}_k(\mathrm{M}) \leqslant \mathrm{W}_{r-k}(\mathrm{M})$ pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant r/2$. Si p, q sont des entiers tels que $0 \leqslant p \leqslant \inf(q, r-q)$, l'homomorphisme $c_1(\mathscr{L})^{q-p}\cap\colon \mathrm{H}^{2p}(\mathrm{Y}) \to \mathrm{H}^{2q}(\mathrm{Y})$ est a fortiori injectif, ce qui entraîne l'inégalité $\mathrm{W}_p(\mathrm{M}) \leqslant \mathrm{W}_q(\mathrm{M})$ du théorème 4.3.

4.9. — Prenons pour fibré en droites $\mathscr{L}$ le produit tensoriel externe des fibrés $\mathscr{O}(1)$ sur les n facteurs de $(\mathbf{P}_{1,\mathrm{K}})^n$ et considérons la matrice $\Lambda = (\Lambda_{\mathrm{P,Q}})$ de l'application $c_1(\mathscr{L})^{q-p}\cap$ dans les bases $([\overline{\mathrm{Y}_\mathrm{P}}])_{\mathrm{P}\in\mathrm{M}^{(p)}}$ de $\mathrm{H}^{2p}(\mathrm{Y})$ et $([\overline{\mathrm{Y}_\mathrm{Q}}])_{\mathrm{Q}\in\mathrm{M}^{(q)}}$ de $\mathrm{H}^{2q}(\mathrm{Y})$.

L'intersection $c_1(\mathscr{L}) \cap [\overline{\mathrm{Y}_\mathrm{P}}]$ est somme des termes $[\overline{\mathrm{Y}_{\langle \mathrm{P},i\rangle}}]$ pour $i \in \{1,\dots,n\} - \mathrm{P}$. Par suite, on a $\Lambda_{\mathrm{P,Q}} = 0$ si $\mathrm{P} \not\subset \mathrm{Q}$. D'après ce qui précède, la matrice Λ est de rang maximal $\mathrm{W}_p(\mathrm{M})$, donc au moins un mineur de taille $\mathrm{W}_p(\mathrm{M})$ en est inversible. Ce mineur est de type $\mathrm{P} \times \mathrm{P}'$, où P' est une partie de Q de cardinal $\mathrm{W}_p(\mathrm{M})$; une fois choisi un ordre total sur P et P', ce mineur se développe comme une somme de termes de la forme

$$\pm \prod_{\mathrm{P}\in\mathrm{M}^{(p)}} \Lambda_{\mathrm{P},\iota(\mathrm{P})}$$

où ι parcourt l'ensemble des bijections de P sur P'. Au moins l'un de ces termes n'est pas nul : il correspond à une application injective $\iota\colon \mathrm{M}^{(p)} \to \mathrm{M}^{(q)}$ telle que $\mathrm{P} \subset \iota(\mathrm{P})$ pour tout $\mathrm{P} \in \mathrm{M}^{(p)}$. Cela conclut la preuve du théorème 4.3.

4.10. — Dans le but de généraliser ce théorème aux matroïdes non représentables, on peut observer que la cohomologie de Y possède un modèle combinatoire, décrit uniquement en termes du matroïde M.

Soit donc M un matroïde, non nécessairement représentable. Notons B(M) le groupe abélien libre sur l'ensemble des plats de M, et soit $(\delta_\mathrm{P})_{\mathrm{P}\in\mathscr{P}_\mathrm{M}}$ sa base canonique. On munit B(M) de la graduation pour laquelle, pour tout entier k, $\mathrm{B}^k(\mathrm{M})$ est le sous-groupe engendré par les fonctions δ_P, où P parcourt l'ensemble $\mathrm{M}^{(k)}$ des plats de rang k. On définit ensuite une multiplication dans B(M) par

$$\delta_\mathrm{P} \cdot \delta_\mathrm{Q} = \begin{cases} \delta_{\mathrm{P}\vee\mathrm{Q}} & \text{si } \mathrm{rg}_\mathrm{M}(\mathrm{P}) + \mathrm{rg}_\mathrm{M}(\mathrm{Q}) = \mathrm{rg}_\mathrm{M}(\mathrm{P}\vee\mathrm{Q})\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour ces structures, B(M) est une algèbre commutative graduée, que Huh & Wang (2017) appellent l'*algèbre de Möbius graduée* du matroïde M.

Posons aussi $\lambda = \sum_{i\in|\mathrm{M}|} \delta_i \in \mathrm{B}^1(\mathrm{M})$.

Lorsque M est représentable, l'unique homomorphisme d'espaces vectoriels gradués de $\mathrm{B}(\mathrm{M})_{\mathbf{Q}_\ell}$ dans H(Y) qui applique δ_P sur $[\overline{\mathrm{Y}_\mathrm{P}}]$ est un isomorphisme d'algèbres graduées, et l'application de Lefschetz $c_1(\mathscr{L})\cap$ correspond à la multiplication par λ. Huh & Wang (2017) conjecturent alors que pour tout matroïde M de rang r, non nécessairement représentable, l'application $\lambda^k\colon \mathrm{B}^k(\mathrm{M}) \to \mathrm{B}^{r-k}(\mathrm{M})$ est injective pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant r/2$. La conclusion du théorème 4.3 s'en déduirait alors comme ci-dessus.

BIBLIOGRAPHIE

K. Adiprasito, J. Huh & E. Katz (2017), « Hodge theory of matroids ». *Notices Amer. Math. Soc.*, **64** (1), p. 26–30.

K. Adiprasito, J. Huh & E. Katz (2018), « Hodge theory for combinatorial geometries ». *Ann. of Math.*, **188** (2), p. 381–452. *arXiv:1511.02888v1*.

F. Ardila & A. Boocher (2016), « The closure of a linear space in a product of lines ». *J. Algebraic Combin.*, **43** (1), p. 199–235.

F. Ardila & C. J. Klivans (2006), « The Bergman complex of a matroid and phylogenetic trees ». *J. Combin. Theory Ser. B*, **96** (1), p. 38–49.

F. Babaee & J. Huh (2017), « A tropical approach to a generalized Hodge conjecture for positive currents ». *Duke Math. J.*, **166** (14), p. 2749–2813.

M. Baker (2018), « Hodge theory in combinatorics ». *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **55** (1), p. 57–80. *arXiv:1705.07960*.

A. A. Beĭlinson, J. Bernstein, P. Deligne & O. Gabber (2018), « Faisceaux pervers ». *Analyse et topologie sur les espaces singuliers, I (Luminy, 1981)*, Astérisque **100**, p. 5–171, Soc. Math. France, Paris, 2e édition.

V. G. Berkovich (1990), *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs **33**, American Mathematical Society, Providence, RI.

L. J. Billera (1989), « The algebra of continuous piecewise polynomials ». *Adv. Math.*, **76** (2), p. 170–183.

L. J. Billera & C. W. Lee (1980), « Sufficiency of McMullen's conditions for f-vectors of simplicial polytopes ». *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **2** (1), p. 181–185.

A. Björner & T. Ekedahl (2009), « On the shape of Bruhat intervals ». *Ann. of Math. (2)*, **170** (2), p. 799–817.

F. Brenti (1994), « Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry : an update ». *Jerusalem combinatorics '93*, Contemp. Math. **178**, p. 71–89, Amer. Math. Soc., Providence, RI.

H. Bruhn, R. Diestel, M. Kriesell, R. Pendavingh & P. Wollan (2013), « Axioms for infinite matroids ». *Adv. Math.*, **239**, p. 18–46.

N. G. de Bruijn & P. Erdős (1948), « On a combinatorial problem ». *Indagationes Math.*, **10**, p. 421–423.

T. Brylawski (1982), « The Tutte polynomial. Part I : General theory ». *Matroid theory and its applications*, C.I.M.E. Summer Sch. **83**, p. 125–275, Springer, Heidelberg.

Y. D. Burago & V. A. Zalgaller (1988), *Geometric inequalities*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **285**, Springer-Verlag, Berlin. Translated from the Russian by A. B. Sosinskiĭ, Springer Series in Soviet Mathematics.

M. A. A. de Cataldo & L. Migliorini (2005), « The Hodge theory of algebraic maps ». *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **38** (5), p. 693–750.

C. De Concini & C. Procesi (1995), « Wonderful models of subspace arrangements ». *Selecta Math. (N.S.)*, **1** (3), p. 459–494.

P. Deligne (1974), « Théorie de Hodge. III ». *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, **44**, p. 5–77.

P. Deligne (1980), « La conjecture de Weil, II ». *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, **52**, p. 137–252.

M. Einsiedler, M. Kapranov & D. Lind (2006), « Non-Archimedean amoebas and tropical varieties ». *J. Reine Angew. Math.*, **601**, p. 139–157.

D. Eisenbud & H. I. Levine (1977), « An algebraic formula for the degree of a C^∞ map germ ». *Ann. of Math. (2)*, **106** (1), p. 19–44. With an appendix by Bernard Teissier, "Sur une inégalité à la Minkowski pour les multiplicités".

B. Elias & G. Williamson (2014), « The Hodge theory of Soergel bimodules ». *Ann. of Math. (2)*, **180** (3), p. 1089–1136.

E. M. Feichtner & S. Yuzvinsky (2004), « Chow rings of toric varieties defined by atomic lattices ». *Invent. Math.*, **155** (3), p. 515–536.

W. Fulton (1993), *Introduction to toric varieties*, Annals of Mathematics Studies **131**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ. The William H. Roever Lectures in Geometry.

M. Goresky & R. MacPherson (1983), « Intersection homology. II ». *Invent. Math.*, **72** (1), p. 77–129.

A. P. Heron (1972), « Matroid polynomials ». *Combinatorics (Proc. Conf. Combinatorial Math., Math. Inst., Oxford, 1972)*, p. 164–202, Inst. Math. Appl., Southend-on-Sea.

S. G. Hoggar (1974), « Chromatic polynomials and logarithmic concavity ». *J. Combinatorial Theory Ser. B*, **16**, p. 248–254.

J. Huh (2012), « Milnor numbers of projective hypersurfaces and the chromatic polynomial of graphs ». *J. Amer. Math. Soc.*, **25** (3), p. 907–927.

J. Huh & E. Katz (2012), « Log-concavity of characteristic polynomials and the Bergman fan of matroids ». *Math. Ann.*, **354** (3), p. 1103–1116.

J. Huh & B. Wang (2017), « Enumeration of points, lines, planes, etc ». *Acta Math.*, **218** (2), p. 297–317.

I. Itenberg, L. Katzarkov, G. Mikhalkin & I. Zharkov (2016), « Tropical homology ». *arXiv:1604.01838*.

K. Karu (2004), « Hard Lefschetz theorem for nonrational polytopes ». *Invent. Math.*, **157** (2), p. 419–447.

A. G. Khovanskii (1988), *Algebra and mixed volumes*, p. 182–207. In Burago & Zalgaller (1988).

M. Lenz (2013), « The f-vector of a representable-matroid complex is log-concave ». *Adv. in Appl. Math.*, **51** (5), p. 543–545. Version augmentée, *arXiv:1106.2944*.

J. H. Mason (1972), « Matroids : unimodal conjectures and Motzkin's theorem ». *Combinatorics (Proc. Conf. Combinatorial Math., Math. Inst., Oxford, 1972)*, p. 207–220, Inst. Math. Appl., Southend-on-Sea.

P. McMullen (1993), « On simple polytopes ». *Invent. Math.*, **113** (2), p. 419–444.

P. Nelson (2018), « Almost all matroids are nonrepresentable ». *Bull. London Math. Soc.*

J. G. Oxley (1992), *Matroid theory*, Oxford Science Publications, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York.

R. C. Read (1968), « An introduction to chromatic polynomials ». *J. Combinatorial Theory*, **4**, p. 52–71.

S. Riche (2018), « La théorie de Hodge des bimodules de Soergel (d'après Soergel et Elias–Williamson) ». Séminaire Bourbaki. Exposé n° 1139, *arXiv:1711.02464v1*.

G.-C. Rota (1971), « Combinatorial theory, old and new ». *Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 3*, p. 229–233, Gauthier-Villars, Paris.

R. P. Stanley (1980), « The number of faces of a simplicial convex polytope ». *Adv. in Math.*, **35** (3), p. 236–238.

R. P. Stanley (1987), « Generalized H-vectors, intersection cohomology of toric varieties, and related results ». *Commutative algebra and combinatorics (Kyoto, 1985)*, Adv. Stud. Pure Math. **11**, p. 187–213, North-Holland, Amsterdam.

R. P. Stanley (1989), « Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry ». *Graph theory and its applications : East and West (Jinan, 1986)*, Ann. New York Acad. Sci. **576**, p. 500–535, New York Acad. Sci., New York.

B. Teissier (1979), « Du théorème de l'index de Hodge aux inégalités isopérimétriques ». *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **288** (4), p. A287–A289.

A. Weber (2004), « Pure homology of algebraic varieties ». *Topology*, **43** (3), p. 635–644.

D. J. A. Welsh (1976), *Matroid theory*, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London-New York. L. M. S. Monographs, No. 8.

N. White (éditeur) (1986), *Theory of matroids*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **26**, Cambridge University Press, Cambridge.

N. White (éditeur) (1987), *Combinatorial geometries*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **29**, Cambridge University Press, Cambridge.

H. Whitney (1935), « On the abstract properties of linear dependence ». *Amer. J. Math.*, **57** (3), p. 509–533.

G. Williamson (2017), « The Hodge theory of the decomposition theorem ». *Astérisque*, **390**, p. 335–367. Séminaire Bourbaki. Vol. 2015/2016. Exposé n° 1115, *arXiv:1603.09235v1*.

Antoine CHAMBERT–LOIR

Université Paris Diderot, Sorbonne Université, CNRS,
Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche, IMJ-PRG,
F-75013, Paris, France.
E-mail : `antoine.chambert-loir@math.univ-paris-diderot.fr`