Séminaire BOURBAKI Octobre 2017
70ème année, 2017-2018, n$^{\text{o}}$ 1138

GROUPES CONVEXES-COCOMPACTS EN RANG SUPÉRIEUR [d'après Labourie, Kapovich, Leeb, Porti, ...]

par **Olivier GUICHARD**

INTRODUCTION

Les sous-groupes discrets des groupes de Lie, ou plutôt leurs actions sur les espaces symétriques et plus généralement même les actions sur les immeubles euclidiens, sont au cœur de cet exposé. Y seront présentés les sous-groupes convexes-cocompacts d'isométries de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$ et comment généraliser cette classe en rang supérieur. Spécifiquement, voici l'un des résultats qui sera souligné et mis en contexte.

Théorème 0.1 (Kapovich, Leeb et Porti [KLPb]). — *Soit $\Gamma = \langle S \rangle$ un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ engendré par un ensemble fini S. On suppose*

Régularité quasi-isométrique : *Il existe $c > 0$ et $C \geq 0$ tels que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\mu_1(\gamma) - \mu_2(\gamma) \geq c\,|\gamma|_S - C$.*

On a alors les conclusions suivantes

Hyperbolicité : *le groupe Γ est hyperbolique au sens de Gromov. Son bord de Gromov est noté $\partial_\infty\Gamma$.*

Applications au bord : *il existe des applications continues et Γ-équivariantes $\beta_1 \colon \partial_\infty\Gamma \to \mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{R})$ et $\beta_{n-1} \colon \partial_\infty\Gamma \to \mathbb{P}^{n-1*}(\mathbf{R}) = \mathrm{Gr}_{n-1}(\mathbf{R}^n)$ telles que*

$$\begin{array}{ll} \forall t \in \partial_\infty\Gamma, & \beta_1(t) \subset \beta_{n-1}(t) \\ \forall t \neq t' \in \partial_\infty\Gamma, & \beta_1(t) \cap \beta_{n-1}(t') = 0. \end{array}$$

Contraction exponentielle : *Il existe $k > 0$ et $K \geq 0$ tels que, pour tout rayon géodésique $(\gamma_p)_{p\in\mathbf{N}}$ dans le graphe de Cayley de Γ avec $\gamma_0 = e_\Gamma$ dont le point limite dans $\partial_\infty\Gamma$ est noté γ_∞, on a, pour tout $p \in \mathbf{N}$,*

$$\log\left\| \gamma_p^{-1}|_{T_{\beta_1(\gamma_\infty)}\mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{R})} \right\| \geq k\,p - K = k\,|\gamma_p|_S - K.$$

Réciproquement, un sous-groupe Γ vérifiant ces conclusions satisfait à l'hypothèse de régularité quasi-isométrique.

Précisons d'abord quelques notations utilisées dans cet énoncé.

Lorsqu'un groupe Γ a une partie génératrice S donnée, la *fonction longueur* associée est notée $|\cdot|_S \colon \Gamma \to \mathbf{N}$, explicitement, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $|\gamma|_S = \inf\{p \in \mathbf{N} \mid \exists \gamma_1, \ldots, \gamma_p \in S \cup S^{-1}, \gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_p\}$ (le produit vide étant égal à e_Γ). Une suite $(\gamma_p)_{p\in\mathbf{N}}$ de Γ est dès lors une géodésique dans le graphe de Cayley si, pour tout $p \in \mathbf{N}$, $\gamma_p^{-1}\gamma_{p+1} \in S \cup S^{-1}$ et $|\gamma_0^{-1}\gamma_p|_S = p$.

Le bord de Gromov de Γ est l'ensemble des classes d'équivalence de rayons géodésiques pour la relation « être à distance de Hausdorff bornée ».

Si S_1 est une seconde partie génératrice *finie* de Γ, il existe $c_1 > 0$ tel que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $|\gamma|_{S_1} \geq c_1 \, |\gamma|_S$. Ainsi, le choix de la partie génératrice finie S dans l'énoncé ci-dessus importe donc peu et la notation $|\cdot|_\Gamma$ sera dorénavant adoptée pour désigner l'une des fonctions longueurs associées à une partie génératrice finie.

Si g est un élément de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$, $\mu_1(g), \ldots, \mu_n(g)$ désignent les logarithmes des valeurs principales de g, c'est-à-dire $e^{2\mu_1(g)}, \ldots, e^{2\mu_n(g)}$ est la liste décroissante des valeurs propres de $g\,{}^t\!g$. Dans la conclusion de l'énoncé, $g|_{T_x\mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{R})}$ désigne l'application tangente au point x du difféomorphisme de $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{R})$ induit par l'élément g de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$, c'est une application linéaire de $T_x\mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{R})$ dans $T_{g\cdot x}\mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{R})$. Sa norme $\|g|_{T_x\mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{R})}\|$ est la norme d'opérateur calculée pour une métrique riemannienne sur $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{R})$. La compacité de $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{R})$ implique que le choix de cette structure riemannienne n'influe que sur les constantes k et K de la conclusion du théorème.

Le théorème énoncé ici est un *cas particulier* (emblématique, bien sûr) des résultats de Kapovich, Leeb et Porti. En effet ceux-ci autorisent :

— plus de généralités sur la *source*. Il n'est pas nécessaire de travailler avec un sous-groupe de type fini Γ mais une application $\varphi\colon Z \to \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ d'un espace métrique (Z, d_Z) géodésique localement compact dans $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$, l'hypothèse s'écrivant ici : $\forall z_1, z_2 \in Z$, $\mu_1\Big(\varphi(z_1)^{-1}\varphi(z_2)\Big) - \mu_2\Big(\varphi(z_1)^{-1}\varphi(z_2)\Big) \geq c\, d_Z(z_1, z_2) - C$. La conclusion affirme que Z est hyperbolique au sens de Gromov et qu'il existe des applications continues $\beta_1\colon \partial_\infty Z \to \mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{R})$, $\beta_{n-1}\colon \partial_\infty Z \to \mathbb{P}^{n-1*}(\mathbf{R})$ satisfaisant des propriétés de transversalité et de contraction similaires à celles énoncées plus haut.

— plus de généralités sur le *but*. Le même résultat est valable en remplaçant $\mathbf{R}$ par $\mathbf{C}$ ou par une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. En fait, on peut aussi considérer des sous-groupes discrets d'un groupe algébrique $\mathbf{G}$ semi-simple sur un corps topologique localement compact et même sur un corps non-archimédien à valuation non discrète. L'hypothèse est alors que les projections de Cartan (qui sont des éléments de la chambre de Weyl fermée) des éléments de Γ sont quantitativement « loin » d'une réunion de murs de la chambre de Weyl [(1)]. La conclusion est encore l'hyperbolicité au sens de Gromov de Γ et l'existence d'une application, du bord de Gromov $\partial_\infty\Gamma$ dans la variété drapeau associée à cette réunion finie de murs, satisfaisant ces propriétés de transversalité et de contraction.

  Pour le cas de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$, la chambre de Weyl fermée A^+ est l'ensemble des matrices diagonales à coefficients décroissants, la projection d'un élément g de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ est la matrice dont la diagonale est $(\mu_1(g), \mu_2(g), \ldots, \mu_n(g))$. Les murs

1. Les énoncés des articles de Kapovich, Leeb et Porti adoptent un point de vue « dual » en demandant que les projections de Cartan soient quantitativement « proches » de la face de la chambre de Weyl égale à l'intersection des murs restants.

correspondant à l'énoncé du théorème sont $\{(m_1, m_2, \ldots, m_n) \in A^+ \mid m_1 = m_2\}$ et $\{(m_1, \ldots, m_n) \in A^+ \mid m_{n-1} = m_n\}$, l'éloignement de ce second mur provient de l'hypothèse du théorème appliquée à γ^{-1}. La variété drapeau associée à ces deux murs est $\mathcal{F}_{1,n-1} = \{(\ell, h) \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{R}) \times \mathbb{P}^{n-1*}(\mathbf{R}) \mid \ell \subset h\}$, les applications β_1 et β_{n-1} se combinant en une application continue, équivariante et transverse $\beta \colon \partial_\infty\Gamma \to \mathcal{F}_{1,n-1}$. Notons que, même pour $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$, le théorème principal est aussi présenté dans une généralité restreinte puisque tous les autres choix de murs sont possibles conduisant à des applications au bord dans des variétés drapeaux différentes.

La condition sur les projections de Cartan peut également s'exprimer en termes de l'action sur l'espace symétrique, ou bien sur l'immeuble de Bruhat et Tits dans le cas où le groupe algébrique est défini sur un corps ultramétrique, associé à $\mathbf{G}$. La position relative de deux points x et y de cet espace symétrique ou immeuble euclidien est encore un élément de la chambre de Weyl du groupe $\mathbf{G}$ et la projection de Cartan d'un élément $g \in \mathbf{G}$ est égale à la position relative de x_0 et $g \cdot x_0$ (où x_0 est un point base de l'espace symétrique ou immeuble euclidien en question). Ce point de vue permet donc de traiter d'une même manière ces deux cas mais également d'inclure le cas de sous-groupes du groupe des isométries d'un immeuble euclidien non nécessairement localement compact. La démonstration du théorème fait apparaître ce type d'immeubles comme cônes asymptotiques et il est naturel de les inclure dans la discussion.

Pour limiter le nombre de notions à introduire, cet exposé n'adoptera que peu ou prou ce langage géométrique au prix de présenter des résultats peut-être partiels. Ce point de vue est largement développé dans les articles de Kapovich, Leeb et Porti [KLa, KLPa, KLPb, KLP18, KLPd] ainsi que dans les notes de cours et panorama qu'ils ont écrits [KLb, KLP16, KLPc]. Notons cependant que même pour $n = 3$ et pour $\Gamma \simeq \mathbb{F}_2$ le groupe libre à deux générateurs (auquel cas l'hyperbolicité de Γ n'est plus à établir) le résultat est nouveau.

Le but de ce texte est de donner des éléments de la démonstration du théorème 0.1, de donner plusieurs autres caractérisations de la classe des sous-groupes (nécessairement discrets) qui apparaissent ici, de faire le lien avec la classe des sous-groupes convexes-cocompacts, d'énumérer certaines propriétés géométriques et dynamiques remarquables de cette classe de sous-groupes.

Aussi bien les hypothèses que les conclusions de ce théorème impliquent uniquement la projection de Γ dans $\mathbf{PGL}_n(\mathbf{R})$. Comme il est parfois commode de se débarrasser du centre de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$, la suite de cet exposé privilégiera de temps en temps les sous-groupes de $\mathbf{PGL}_n(\mathbf{R})$, voire de $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$. Nous ne l'avons pas écrit mais l'action de Γ sur $\mathbb{P}^{n-1*}(\mathbf{R})$ vérifie des propriétés de contraction équivalentes.

Il peut être aussi utile d'observer que les propriétés énoncées dans ce théorème sont « stables par passage à un sous-groupe d'indice fini » ; précisément

— si l'hypothèse de régularité quasi-isométrique est satisfaite pour un sous-groupe d'indice fini de Γ, alors elle l'est pour Γ (quitte à changer les constantes c et C) ;
— de même, si les conclusions sont satisfaites pour un sous-groupe d'indice fini de Γ, alors elles le sont pour Γ (quitte à changer les constantes k et K).

1. GROUPES CONVEXES-COCOMPACTS D'ISOMÉTRIES DE L'ESPACE HYPERBOLIQUE

Toujours pour rester concret, la discussion suivante est restreinte aux sous-groupes d'isométries de l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n$, $n \geq 2$, mais son contexte naturel serait plutôt celui des groupes d'isométries de variétés de Cartan et Hadamard de courbure sectionnelle majorée par une constante strictement négative.

1.1. L'espace hyperbolique et ses convexes

Le sous-groupe des matrices orthogonales pour $Q_{n,1} = \left(\begin{smallmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ est noté $\mathbf{O}(n,1) = \{g \in \mathbf{GL}_{n+1}(\mathbf{R}) \mid {}^t g Q_{n,1} g = Q_{n,1}\}$. La forme quadratique associée à $Q_{n,1}$ est $q_{n,1} \colon \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R} / x \mapsto {}^t x Q_{n,1} x$. Le modèle projectif de l'espace hyperbolique est

$$\mathbb{H}^n = \{\ell \in \mathbb{P}^n(\mathbf{R}) \mid q_{n,1}|_{\ell - \{0\}} < 0\} \ ;$$

il s'identifie à l'hyperboloïde $\{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid q_{n,1}(x) = -1,\ x_{n+1} > 0\}$. Son adhérence dans $\mathbb{P}^n(\mathbf{R})$ est $\overline{\mathbb{H}}^n = \{\ell \in \mathbb{P}^n(\mathbf{R}) \mid q_{n,1}|_\ell \leq 0\}$ et est la réunion de $\mathbb{H}^n$ et de $\partial_\infty \mathbb{H}^n = \{\ell \in \mathbb{P}^n(\mathbf{R}) \mid q_{n,1}|_\ell = 0\}$. Aussi bien $\mathbb{H}^n$ que son adhérence sont contenus dans la carte affine $\mathbb{A}^n = \mathbb{P}^n(\mathbf{R}) - \mathbb{P}(\{x_{n+1} = 0\})$. Dans les coordonnées naturelles sur cette carte affine, $\mathbb{H}^n$ et $\overline{\mathbb{H}}^n$ sont respectivement la boule unité ouverte et la boule unité fermée.

L'action de $\mathbf{O}(n,1)$ sur $\mathbb{H}^n$ est transitive et le stabilisateur du point $\ell_0 = \mathbf{R} e_{n+1}$ ($(e_i)_{i=1,\dots,n+1}$ désigne la base canonique de $\mathbf{R}^{n+1}$) est $\mathbf{O}(n) \times \mathbf{O}(1)$. Puisque ce stabilisateur est compact, il existe une métrique riemannienne $\mathbf{O}(n,1)$-invariante sur $\mathbb{H}^n$. La distance associée $d_{\mathbb{H}^n}$ s'exprime aisément en termes de la géométrie projective : si ℓ et $\ell' \in \mathbb{H}^n$, alors $d_{\mathbb{H}^n}(\ell, \ell') = 1/2 \left|\log |[\ell, \ell'; b, b']|\right|$ où b, b' sont deux éléments distincts de $\partial_\infty \mathbb{H}^n$ tels que ℓ, ℓ', b, b' appartiennent à une même droite projective (si $\ell \neq \ell'$, alors $\{b, b'\}$ est l'intersection de $\partial_\infty \mathbb{H}^n$ et de la droite projective engendrée par ℓ et ℓ') et où $[\ell, \ell'; b, b'] = \frac{\ell - b}{\ell - b'} \frac{\ell' - b'}{\ell' - b}$ est le birapport des quatre points ℓ, ℓ', b, b' calculé dans une identification quelconque de la droite projective contenant ces points avec $\mathbb{P}^1(\mathbf{R})$.

Le groupe des isométries de $(\mathbb{H}^n, d_{\mathbb{H}^n})$ est alors $\mathbf{PO}(n,1) = \mathbf{O}(n,1)/\{\pm 1_{n+1}\}$.

Deux points de $\mathbb{H}^n$ sont reliés par un unique segment géodésique qui est égal au segment affine les reliant dans $\mathbb{A}^n$. Plus généralement, un point de $\mathbb{H}^n$ et un point de $\partial_\infty \mathbb{H}^n$ (respectivement deux points distincts de $\partial_\infty \mathbb{H}^n$) sont reliés par un unique rayon géodésique (respectivement une unique géodésique) égal à un segment affine semi-ouvert (respectivement égale à un segment affine ouvert).

Un sous-ensemble C de $\mathbb{H}^n$ ou de $\overline{\mathbb{H}}^n$ est dit *convexe* s'il est convexe au sens de la géométrie affine dans la carte affine $\mathbb{A}^n$. Une condition équivalente, si C est inclus dans $\mathbb{H}^n$, est de demander que C est géodésiquement convexe.

1.2. Groupes convexes-cocompacts, leurs ensembles limites

DÉFINITION 1.1. — *Un sous-groupe* Γ *de* $\mathbf{O}(n,1)$ *est dit* convexe-cocompact *s'il existe un sous-ensemble non vide* C *de* $\mathbb{H}^n$*, convexe,* Γ*-invariant et sur lequel l'action de* Γ *est propre et cocompacte.*

Le convexe C est alors nécessairement fermé et le sous-groupe Γ est nécessairement discret. En remplaçant éventuellement C par un voisinage métrique $N_\delta(C) = \{\ell \in \mathbb{H}^n \mid \mathrm{dist}_{\mathbb{H}^n}(\ell, C) \leq \delta\}$, le quotient $\Gamma\backslash C$ est une orbivariété à bord dont le groupe fondamental orbifold est égal à Γ. Le groupe Γ est donc de *type fini* et même de présentation finie. Les sous-groupes finis de $\mathbf{O}(n,1)$ sont toujours convexes-cocompacts ; il est alors sensé de n'étudier que des groupes infinis. Un sous-groupe cyclique infini $\langle\gamma\rangle$ de $\mathbf{O}(n,1)$ est convexe-cocompact si et seulement si l'élément γ est hyperbolique ; il a alors un unique axe de translation qui est une géodésique de $\mathbb{H}^n$, le convexe C peut être choisi égal à cet axe.

Si Γ est un sous-groupe de $\mathbf{O}(n,1)$, son *ensemble limite* $\Lambda_\Gamma \subset \partial_\infty\mathbb{H}^n$ est défini comme l'ensemble des points d'accumulation de l'orbite $\Gamma\cdot\ell_0 \subset \mathbb{H}^n$ ($\ell_0 = \mathbf{R}e_{n+1}$) dans le bord à l'infini $\partial_\infty\mathbb{H}^n$. C'est aussi l'ensemble de points d'accumulation de toute orbite de Γ dans $\mathbb{H}^n$. L'ensemble limite est vide si et seulement si le sous-groupe Γ est borné. L'ensemble limite est réduit à un seul élément $x \in \partial_\infty\mathbb{H}^n$ si et seulement si Γ est infini et est contenu dans le sous-groupe $\{g \in \mathbf{O}(n,1) \mid g|_x = \pm\mathrm{Id}|_x\} \subset \mathrm{Stab}_{\mathbf{O}(n,1)}(x)$. Lorsque Γ laisse invariant un sous-ensemble convexe C de $\mathbb{H}^n$, l'ensemble limite Λ_Γ est alors inclus dans le bord idéal $\partial_\infty C = \overline{C} \cap \partial_\infty\mathbb{H}^n$ ($\overline{C}$ est l'adhérence de C dans $\mathbb{P}^n(\mathbf{R})$). Si, de plus, Γ est convexe-cocompact, l'inclusion inverse est vérifiée et il y a l'égalité $\Lambda_\Gamma = \partial_\infty C$.

Ainsi, quand Γ est convexe-cocompact et infini, il est alors impossible d'avoir $\sharp\Lambda_\Gamma = 1$ (le feuilletage horocyclique centré en Λ_Γ serait Γ-invariant), de sorte que l'on peut toujours considérer l'enveloppe convexe $\mathrm{Conv}(\Lambda_\Gamma)$ de Λ_Γ dans $\mathbb{A}^n$ et que $\mathrm{Conv}_{\mathbb{H}^n}(\Lambda_\Gamma)$, son intersection avec $\mathbb{H}^n$, est non vide. Ce convexe $\mathrm{Conv}_{\mathbb{H}^n}(\Lambda_\Gamma)$ est alors fermé, Γ-invariant et inclus dans C ; de là l'action de Γ sur $\mathrm{Conv}_{\mathbb{H}^n}(\Lambda_\Gamma)$ est propre et cocompacte. Le cas où $\Lambda_\Gamma = \{x, x'\}$ ($x \neq x'$) est aussi particulier : dans ce cas, un sous-groupe d'indice fini de Γ est infini cyclique engendré par un élément hyperbolique. On appelle un groupe Γ *élémentaire* si $\sharp\Lambda_\Gamma = 0, 1$ ou 2 ; sinon Λ_Γ a la puissance du continu et peut être, par exemple, homéomorphe à l'ensemble de Cantor.

1.3. Caractérisation métrique

Les valeurs principales d'un élément g de $\mathbf{O}(n,1)$ sont $(\mu_1(g), \ldots, \mu_{n+1}(g)) = (\mu(g), 0, \ldots, 0, -\mu(g))$ où $\mu(g) \in \mathbf{R}_+$. La double classe $\big(\mathbf{O}(n) \times \mathbf{O}(1)\big) g \big(\mathbf{O}(n) \times \mathbf{O}(1)\big)$

contient un unique élément de la forme $\left\{\begin{pmatrix} 1_{n-1} & & \\ & \cosh t & \sinh t \\ & \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}_+\right\}$ pour $t = \mu(g)$. La distance $d_{\mathbb{H}^n}(\ell_0, g \cdot \ell_0)$, toujours avec $\ell_0 = \mathbf{R}e_{n+1}$, est égale à $\mu(g)$.

On a alors la caractérisation métrique suivante.

Proposition 1.2. — *Soit Γ un sous-groupe de $\mathbf{O}(n,1)$. Le groupe Γ est convexe-cocompact si et seulement si Γ est de type fini et il existe $c > 0$, $C \geq 0$ tels que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\mu(\gamma) \geq c\,|\gamma|_\Gamma - C$.*

On formule souvent cette conclusion en disant que le groupe Γ est *quasi-isométriquement plongé* dans $\mathbf{O}(n,1)$. Le sens direct de cette proposition suit de ce que l'on a dit plus haut et du lemme de Milnor et Švarc tandis que le sens réciproque utilise deux ingrédients : le fait que les quasi-géodésiques de $\mathbb{H}^n$ sont universellement proches de géodésiques (« lemme de Morse ») et le fait que les simplexes géodésiques sont universellement fins.

1.4. Caractérisation dynamique

Le flot géodésique $(\varphi_t)_{t\in\mathbf{R}}$ sur le fibré unitaire tangent $T^1\mathbb{H}^n$ commute avec l'action de $\mathbf{O}(n,1)$. Si Γ est un sous-groupe de $\mathbf{O}(n,1)$, on définit l'*ensemble récurrent* $\mathcal{E}_\Gamma \subset T^1\mathbb{H}^n$ de la manière suivante : un vecteur v de $T^1\mathbb{H}^n$ appartient à $\mathcal{E}_\Gamma$ si et seulement si, pour tout voisinage U de v dans $T^1\mathbb{H}^n$, il existe une suite $(\gamma_k, t_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ de $\Gamma \times \mathbf{R}$ avec la propriété que, pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $\gamma_k \cdot \varphi_{t_k}(v) = \varphi_{t_k}(\gamma_k \cdot v)$ appartient à U et $\lim_{k\to\pm\infty} t_k = \pm\infty$. L'ensemble récurrent $\mathcal{E}_\Gamma$ est fermé, Γ-invariant et φ_t-invariant. Si Γ est discret, le quotient $\Gamma\backslash\mathcal{E}_\Gamma$ est l'ensemble récurrent pour le flot géodésique sur le fibré unitaire tangent $\Gamma\backslash T^1\mathbb{H}^n$ de l'orbivariété riemannienne $\Gamma\backslash\mathbb{H}^n$.

Voici une caractérisation dynamique des sous-groupes convexes-cocompacts.

Proposition 1.3. — *Soit Γ un sous-groupe de $\mathbf{O}(n,1)$. Le groupe Γ est convexe-cocompact si et seulement si l'action de Γ sur $\mathcal{E}_\Gamma$ est propre et cocompacte.*

Lorsque Γ est convexe-cocompact, ou plus généralement s'il existe un convexe fermé $C \subset \mathbb{H}^n$ invariant par Γ, alors l'ensemble $\mathcal{E}_\Gamma$ est inclus dans l'ensemble des vecteurs $v \in T^1\mathbb{H}^n$ tels que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, le point base de $\varphi_t(v)$ appartient à C, i.e. $\mathcal{E}_\Gamma \subset T^1\mathbb{H}^n|_C$. Quand Γ est convexe-cocompact, $\Gamma\backslash T^1\mathbb{H}^n|_C$ est compact et $\Gamma\backslash\mathcal{E}_\Gamma$ aussi. Réciproquement, si $\Gamma\backslash\mathcal{E}_\Gamma$ est compact, le groupe Γ est alors de type fini et l'injection de Γ dans $\mathbf{O}(n,1)$ est un plongement quasi-isométrique. La proposition 1.2 s'applique.

1.5. Caractérisations par l'action à l'infini de l'espace hyperbolique

La convexe-cocompacité peut aussi être caractérisée par l'action de Γ sur $\overline{\mathbb{H}^n} = \mathbb{H}^n \cup \partial_\infty\mathbb{H}^n$.

Proposition 1.4. — *Soit Γ un sous-groupe de $\mathbf{O}(n,1)$. Le groupe Γ est convexe-cocompact si et seulement si l'action de Γ sur $\overline{\mathbb{H}^n} \smallsetminus \Lambda_\Gamma$ est propre et cocompacte.*

En effet si Γ est convexe-cocompact, la projection $\mathbb{H}^n \to C$ s'étend à $\overline{\mathbb{H}}^n - \partial_\infty C = \overline{\mathbb{H}}^n - \Lambda_\Gamma$ et cette extension est propre et Γ-équivariante ; de là suivent la propreté et la cocompacité de l'action de Γ sur $\overline{\mathbb{H}}^n - \Lambda_\Gamma$. Réciproquement supposons l'action de Γ sur $\overline{\mathbb{H}}^n - \Lambda_\Gamma$ propre et cocompacte. Si $\Lambda_\Gamma = \emptyset$, alors Γ est fini et le cas $\sharp\Lambda_\Gamma = 1$ est impossible (existence du feuilletage horocyclique). Dans les autres cas, le convexe $\mathrm{Conv}_{\mathbb{H}^n}(\Lambda_\Gamma)$ est inclus et fermé dans $\overline{\mathbb{H}}^n - \Lambda_\Gamma$, le groupe Γ agit donc proprement sur $\mathrm{Conv}_{\mathbb{H}^n}(\Lambda_\Gamma)$ et $\Gamma\backslash\mathrm{Conv}_{\mathbb{H}^n}(\Lambda_\Gamma)$ est fermé dans $\Gamma\backslash(\overline{\mathbb{H}}^n - \Lambda_\Gamma)$ donc est compact.

En particulier l'action de Γ sur $\partial_\infty\mathbb{H}^n - \Lambda_\Gamma$ est propre et cocompacte. Il faut se garder de croire que la réciproque est exacte, par exemple les travaux de Bers [Ber70] impliquent l'existence de sous-groupes Γ de $\mathbf{O}(3,1)$, isomorphes au groupe fondamental d'une surface compacte, pour lesquels $\Gamma\backslash(\partial_\infty\mathbb{H}^3 - \Lambda_\Gamma)$ est compact mais $\Gamma\backslash(\overline{\mathbb{H}}^3 - \Lambda_\Gamma)$ ne l'est pas. Néanmoins la caractérisation suivante n'implique que l'action de Γ sur $\partial_\infty\mathbb{H}^n$.

Soit $d_{\partial_\infty\mathbb{H}^n}$ une distance sur $\partial_\infty\mathbb{H}^n$ provenant d'une métrique riemannienne ($\partial_\infty\mathbb{H}^n$ étant une variété compacte, le choix particulier de la métrique riemannienne n'influe que sur certaines constantes dans la suite). L'action de Γ est dite *dilatante* au point $z \in \partial_\infty\mathbb{H}^n$ s'il existe $\gamma \in \Gamma$, $c > 1$ et $U \subset \partial_\infty\mathbb{H}^n$ un voisinage de z tels que, pour tous z_1, z_2 dans U, $d_{\partial_\infty\mathbb{H}^n}(\gamma\cdot z_1, \gamma\cdot z_2) \geq c\, d_{\partial_\infty\mathbb{H}^n}(z_1, z_2)$.

Théorème 1.5. — *Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathbf{O}(n,1)$. Le groupe Γ est convexe-cocompact si et seulement si, pour tout $z \in \Lambda_\Gamma$, l'action de Γ est dilatante (dans $\partial_\infty\mathbb{H}^n$) au point z.*

La démonstration de ce résultat est un peu plus délicate que les caractérisations précédentes ; c'est pourquoi il se trouve ici sous l'intitulé de théorème. Il faut en fait faire le lien entre l'action au bord et l'action sur $\mathbb{H}^n$. Il est également possible de détecter, pour un sous-groupe Γ donné, si un point z de Λ_Γ est dilatant selon la façon dont l'orbite $\Gamma\cdot\ell_0$ s'accumule sur z (de manière « transverse »/« conique » ou non par rapport au bord $\partial_\infty\mathbb{H}^n$, cf. la définition 5.2 plus bas).

De la même manière :

Proposition 1.6. — *Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathbf{O}(n,1)$. Le groupe Γ est convexe-cocompact si et seulement si, pour tout $z \in \Lambda_\Gamma$, l'action de Γ est dilatante (dans la variété à bord $\overline{\mathbb{H}}^n$ munie d'une quelconque distance riemannienne) au point z.*

À nouveau, le sens direct nécessite le lien entre dilatation au point z et convergence « transverse »/« conique » vers z. Pour la réciproque, l'action de Γ sur $\overline{\mathbb{H}}^n - \Lambda_\Gamma$ est propre (c'est toujours le cas pour un groupe discret) et la dilatation en Λ_Γ permet de montrer que cette action est cocompacte.

1.6. Deux propriétés

Pour finir cette partie, énonçons deux propriétés importantes des groupes convexes-cocompacts.

Tout d'abord, le groupe Γ est quasi-isométrique au convexe $C \subset \mathbb{H}^n$ et est donc hyperbolique au sens de Gromov. Il est possible de réexprimer certains résultats de cette section, en y ajoutant une version quantitative de la dilatation évoquée plus haut, sous une forme similaire au théorème 0.1.

Corollaire 1.7. — *Soit Γ un sous-groupe de $\mathbf{O}(n,1)$. Le groupe Γ est convexe-cocompact si et seulement si Γ est hyperbolique au sens de Gromov et qu'il existe $\beta\colon \partial_\infty\Gamma \to \Lambda_\Gamma$ un homéomorphisme équivariant et $k > 0$, $K \geq 0$ tels que, pour tout rayon géodésique $(\gamma_p)_{p\in\mathbf{N}}$ dans Γ avec $\gamma_0 = e_\Gamma$, on ait $\log\left\| \gamma_p^{-1}|_{T_{\beta(\gamma_\infty)}\partial_\infty\mathbb{H}^n} \right\| \geq k\,p - K$ où $\gamma_\infty \in \partial_\infty\Gamma$ est l'extrémité de la géodésique $(\gamma_p)_{p\in\mathbf{N}}$.*

Enfin les groupes convexes-cocompacts sont stables par petite déformation.

Théorème 1.8. — *Soit Γ un sous-groupe convexe-cocompact de $\mathbf{O}(n,1)$ et notons $\iota\colon \Gamma \to \mathbf{O}(n,1)$ l'injection de Γ dans $\mathbf{O}(n,1)$.*

Il existe alors un voisinage U de ι dans l'ensemble $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbf{O}(n,1))$ des homomorphismes de Γ dans $\mathbf{O}(n,1)$ tel que, pour tout ρ dans U, ρ est injectif et son image $\rho(\Gamma)$ est convexe-cocompacte.

La topologie sous-entendue sur $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbf{O}(n,1))$ est celle de la convergence simple. On peut en fait préciser les conclusions du théorème : les actions de $\rho(\Gamma)$ et de $\Gamma = \iota(\Gamma)$ sur $\overline{\mathbb{H}}^n$ sont topologiquement conjuguées, l'ensemble limite $\Lambda_{\rho(\Gamma)}$ varie continûment avec ρ, etc.

2. LA PRÉHISTOIRE : ABSENCE DE SOUS-GROUPES CONVEXES-COCOMPACTS EN RANG SUPÉRIEUR

Les premiers résultats concernant les généralisations des groupes convexes-cocompacts en rang supérieur sont en fait négatifs : si l'on généralise hâtivement la définition, aucun exemple intéressant et nouveau n'est produit. Donnons ces résultats de rigidité pour les sous-groupes de $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$, $n \geq 3$.

Soit $X_n \subset \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques, positives et de déterminant 1. C'est un espace homogène pour l'action de $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$ par transconjugaison : $(g,x) \mapsto g\cdot x = g\,x\,{}^t g$ et les stabilisateurs sont compacts (celui de la matrice identité $1_n \in X_n$ est le sous-groupe $\mathbf{SO}(n)$). Ainsi X_n admet une métrique riemannienne $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$-invariante. La courbure sectionnelle de cette métrique (convenablement normalisée) varie entre -1 et 0. Il y a donc dans X_n des directions « hyperboliques » où la géométrie est semblable à celle de l'espace hyperbolique mais aussi des directions « plates » où la géométrie est celle de l'espace euclidien. En particulier, il n'est pas difficile de construire des quasi-géodésiques qui ne sont contenues dans le voisinage métrique d'aucune géodésique (absence de lemme de Morse en rang supérieur, voir cependant la partie 6). Le fait que X_n soit de courbure négative implique qu'il est uniquement géodésique : toute paire de points est les extrémités d'un unique segment géodésique. Une notion de convexité s'en déduit aisément.

THÉORÈME 2.1 (Kleiner et Leeb [KL06]). — *Soit* Γ *un sous-groupe Zariski dense de* $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$*,* $n \geq 3$*. Supposons qu'il existe un convexe* $C \subset X_n$ *non vide,* Γ*-invariant et sur lequel l'action de* Γ *est propre et cocompacte.*

Alors Γ *est un réseau cocompact de* $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$*.*

L'hypothèse de Zariski densité a été ajoutée ici pour simplifier la conclusion mais il y a un résultat de structure sans cette hypothèse. Ce théorème vaut, bien sûr, pour tout groupe de Lie semi-simple.

Pour énoncer le second résultat de rigidité, introduisons D le sous-groupe de $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$ des matrices diagonales. Pour Γ un sous-groupe discret de $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$, notons $E_\Gamma \subset \Gamma\backslash\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$ l'adhérence des points fixes des éléments réguliers (i.e. à valeurs propres deux à deux distinctes) de D pour l'action à droite. C'est un ensemble D-invariant. Lorsque $n = 2$, $\Gamma\backslash\mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$ s'identifie au (à un revêtement double du) fibré unitaire tangent de $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ et l'action à droite de D est le flot géodésique ; dans ce cas E_Γ est l'adhérence de la réunion des géodésiques fermées.

THÉORÈME 2.2 (Quint [Qui05]). — *Soit* Γ *un sous-groupe discret et Zariski dense de* $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$*,* $n \geq 3$*. Supposons* E_Γ *compact. Le groupe* Γ *est alors un réseau cocompact de* $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$*.*

Bien sûr, il y a, comme plus haut, la conclusion de structure sans l'hypothèse de Zariski densité. Aussi le cas de sous-groupes discrets de groupes algébriques sur les corps ultramétriques est traité. Quint [Qui05, §5] déduit le théorème 2.1 à partir de son résultat.

À l'opposé, si l'on impose seulement au sous-groupe d'être de type fini et quasi-isométriquement plongé, la classe des sous-groupes obtenus a de « mauvaises » propriétés :

— il existe un sous-groupe Γ de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{R}) \times \mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$, isomorphe au groupe libre à deux générateurs, quasi-isométriquement plongé et vérifiant la propriété suivante : dans tout voisinage $U \subset \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbf{SL}_2(\mathbf{R}) \times \mathbf{SL}_2(\mathbf{R}))$ de l'injection de Γ dans $\mathbf{SL}_2(\mathbf{R}) \times \mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$, il existe une représentation d'image dense, voir [GGKW17a, Prop. A.1].

— il existe un sous-groupe de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{R}) \times \mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$, de type fini, quasi-isométriquement plongé mais qui n'est pas de présentation finie, voir [KLPa, Ex. 6.34].

3. LES REPRÉSENTATIONS ANOSOV

Cette partie introduit la notion, due à Labourie [Lab06], de représentation Anosov. La définition ci-dessous est un peu éloignée de celle donnée initialement par Labourie, elle correspond à la notion de sous-groupe « asymptotiquement plongé » de [KLPa]. En particulier, l'absence de flot et de décomposition hyperbolique pour ce flot dans les lignes à venir ne permet pas d'apprécier le choix de la terminologie.

Fixons ici Γ un groupe hyperbolique au sens de Gromov, son bord de Gromov est toujours noté $\partial_\infty\Gamma$.

Définition 3.1. — *Une représentation $\rho\colon \Gamma \to \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ est dite* Anosov *s'il existe des applications continues et ρ-équivariante $\beta_1\colon \partial_\infty\Gamma \to \mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{R})$ et $\beta_{n-1}\colon \partial_\infty\Gamma \to \mathbb{P}^{n-1*}(\mathbf{R})$ avec, pour tout $t \in \partial_\infty\Gamma$, $\beta_1(t) \subset \beta_{n-1}(t)$ et, pour tous $t \neq t' \in \partial_\infty\Gamma$, $\beta_1(t) \oplus \beta_{n-1}(t') = \mathbf{R}^n$ et vérifiant*

Contraction : *pour tous t_1 et t_2 dans $\partial_\infty\Gamma$, toute suite $(\gamma_p)_{p\in\mathbf{N}}$ de Γ et tout $\ell \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{R})$, si $\lim \gamma_p = t_1$, $\lim \gamma_p^{-1} = t_2$ (limites dans $\Gamma \cup \partial_\infty\Gamma$) et si ℓ est transverse à $\beta_{n-1}(t_2)$, alors $\lim \rho(\gamma_p) \cdot \ell = \beta_1(t_1)$.*

On dit qu'un sous-groupe Γ de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ est Anosov *si l'injection de Γ dans $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ est Anosov.*

Comme pour l'énoncé du théorème 0.1, seule l'image de Γ dans $\mathbf{PGL}_n(\mathbf{R})$ importe et l'on préfère considérer des sous-groupes de $\mathbf{PGL}_n(\mathbf{R})$ ou de $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$.

La deuxième conclusion du théorème 0.1 pourrait se réécrire « l'injection de Γ dans $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ est Anosov ». La propriété dynamique des suites divergentes donnée dans la définition est une propriété de contraction faible. Celle donnée dans le théorème 0.1 est une propriété de contraction exponentielle. Dans la partie 5 seront données plusieurs caractérisations des représentations Anosov, certaines ne faisant pas a priori l'hypothèse d'hyperbolicité du groupe Γ. L'image finale sera celle d'une classe de sous-groupes discrets généralisant la classe des sous-groupes convexes-cocompacts.

Citons tout de suite trois propriétés des représentations Anosov qui établissent déjà l'analogie avec les sous-groupes convexes-cocompacts :

— un sous-groupe Anosov est quasi-isométriquement plongé ;

— l'action d'un sous-groupe Anosov $\rho(\Gamma)$ est dilatante sur $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{R})$ en tout point de $\beta_1(\partial_\infty\Gamma)$;

— le sous-ensemble de $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbf{GL}_n(\mathbf{R}))$ constitué des représentations Anosov est ouvert.

La définition ci-dessus est un cas restreint de la notion. Il est possible de faire la « même » définition pour des représentations de Γ dans G un groupe de Lie réductif ; la paire $(\mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{R}), \mathbb{P}^{n-1*}(\mathbf{R}))$ devant être remplacée par $(G/P, G/P^{\mathrm{opp}})$ où P est un sous-groupe parabolique de G et P^{opp} est un sous-groupe parabolique de G opposé à P. On utilisera parfois cette notion plus générale dans la suite et on appellera les représentations la vérifiant P-Anosov ou $\mathcal{F}$-Anosov avec $\mathcal{F} = G/P$. Plus encore, les caractérisations données plus bas permettent d'englober les groupes d'isométries d'immeubles euclidiens.

Labourie [Lab06] appelle plutôt ces représentations G/L-Anosov, où $L = P \cap P^{\mathrm{opp}}$ est le facteur de Levi, et les a introduites pour les représentations des groupes de revêtements galoisiens de variétés compactes munies d'un flot d'Anosov. L'idée de remplacer ces variétés par le flot géodésique d'un groupe hyperbolique, et donc d'inclure tous les groupes hyperboliques dans la définition, remonte à [GW12].

4. EXEMPLES

L'un des intérêts de la notion de représentation Anosov est l'abondance d'exemples.

4.1. Les espaces de Teichmüller généralisés

Il est aujourd'hui habituel d'appeler ainsi certaines composantes connexes de la variété des représentations $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, G)$ du groupe fondamental $\Gamma_g \simeq \langle a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] \rangle$ d'une surface orientée, connexe, compacte, sans bord et de genre $g \geq 2$, qui généralisent la composante de Teichmüller qui est la composante connexe de $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathbf{SO}(2,1))$ constituée des représentations $\rho\colon \Gamma_g \to \mathbf{SO}(2,1)$ injectives, préservant l'orientation, et dont l'image $\rho(\Gamma_g)$ agit proprement sur $\mathbb{H}^2$ (on dira que ρ est une représentation fuchsienne) (une telle action est automatiquement cocompacte : la surface quotient $\rho(\Gamma_g)\backslash\mathbb{H}^2$ a son premier groupe d'homotopie isomorphe à Γ_g et doit donc être compacte). Il existe des versions des résultats ci-dessous pour des surfaces ouvertes et leurs groupes fondamentaux (qui sont alors des groupes libres de type fini) ; la discussion suivante se restreint, pour des raisons de simplicité, aux surfaces fermées.

4.1.1. *Composante de Hitchin.* — Soit $\tau_n\colon \mathbf{PGL}_2(\mathbf{R}) \simeq \mathbf{O}(2,1) \to \mathbf{PGL}_n(\mathbf{R})$ le morphisme induit par l'action de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{R})$ sur la puissance symétrique n-ième $S^{n-1}\mathbf{R}^2 \simeq \mathbf{R}^n$ (explicitement $S^{n-1}\mathbf{R}^2$ est l'espace des polynômes homogènes de degré $n-1$ en deux variables). La composante de Hitchin est définie comme la composante connexe de $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathbf{PGL}_n(\mathbf{R}))$ contenant les compositions $\tau_n \circ \rho$ où $\rho\colon \Gamma_g \to \mathbf{PGL}_2(\mathbf{R})$ est fuchsienne.

Théorème 4.1 (Hitchin [Hit92]). — *Pour l'action de $\mathbf{PGL}_n(\mathbf{R})$ par conjugaison sur les représentations, la composante de Hitchin est $\mathbf{PGL}_n(\mathbf{R})$-difféomorphe à $\mathbf{R}^{(2g-2)\times(n^2-1)} \times \mathbf{PGL}_n(\mathbf{R})$.*

Théorème 4.2 (Labourie [Lab06]). — *Soit B le sous-groupe de $\mathbf{PGL}_n(\mathbf{R})$ des matrices triangulaires supérieures. Toute représentation dans la composante de Hitchin est B-Anosov.*

Les travaux de Labourie apportent des informations plus précises sur l'application au bord $\beta\colon \partial_\infty\Gamma_g \to \mathbf{PGL}_n(\mathbf{R})/B \simeq \mathcal{F}lag(\mathbf{R}^n) = \{(E_1, \ldots, E_{n-1}) \in \prod_{i=1}^n \mathrm{Gr}_i(\mathbf{R}^n) \mid \forall i = 1, \ldots, n-2,\ E_i \subset E_{i+1}\}$ et permettent de donner une *caractérisation* des représentations qui appartiennent à la composante de Hitchin. Les travaux de Fock et Goncharov [FG06] donnent également une caractérisation de ces représentations basée sur la notion de positivité « totale » des matrices (voir Lusztig [Lus94]).

Pour un groupe de Lie G simple, adjoint et déployé sur $\mathbf{R}$, i.e. G est égal à $\mathbf{PSL}_n(\mathbf{R})$, $\mathbf{PSp}_{2m}(\mathbf{R})$, $\mathbf{PSO}(p,p+1)$ ou l'un des 5 groupes exceptionnels, le $\mathbf{PSL}_2(\mathbf{R})$ principal de G permet de définir la composante de $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, G)$ contenant les représentations fuchsiennes et Hitchin a démontré que cette composante est G-difféomorphe à $\mathbf{R}^{(2g-2)\times \dim G} \times G$. En s'appuyant sur la notion de positivité des représentations de Γ_g dans G développée par Fock et Goncharov, il vient que toute représentation $\Gamma_g \to G$ dans la composante de Hitchin est B-Anosov où B est le sous-groupe de Borel de G.

4.1.2. *Représentations maximales.* — Le groupe fondamental de $\mathbf{Sp}_{2m}(\mathbf{R}) = \{g \in \mathbf{GL}_{2m}(\mathbf{R}) \mid {}^t g J_m g = J_m\}$, où $J_m = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1_m \\ 1_m & 0 \end{smallmatrix}\right)$, est isomorphe à $\mathbf{Z}$. Le revêtement universel $\widetilde{\mathbf{Sp}}_{2m}(\mathbf{R})$ de $\mathbf{Sp}_{2m}(\mathbf{R})$ est un groupe de Lie et le noyau de la projection naturelle $\widetilde{\mathbf{Sp}}_{2m}(\mathbf{R}) \to \mathbf{Sp}_{2m}(\mathbf{R})$ est contenu dans le centre de $\widetilde{\mathbf{Sp}}_{2m}(\mathbf{R})$ et s'identifie à $\pi_1(\mathbf{Sp}_{2m}(\mathbf{R})) \simeq \mathbf{Z}$. Pour g et h dans $\mathbf{Sp}_{2m}(\mathbf{R})$, le commutateur $\widetilde{[g,h]} = \tilde{g}\tilde{h}\tilde{g}^{-1}\tilde{h}^{-1}$ de relevés $\tilde{g}$ et $\tilde{h} \in \widetilde{\mathbf{Sp}}_{2m}(\mathbf{R})$ de g et h ne dépend pas de ces relevés et sa projection dans $\mathbf{Sp}_{2m}(\mathbf{R})$ est égale à $[g,h]$.

Soit maintenant $\rho\colon \Gamma_g \to \mathbf{Sp}_{2m}(\mathbf{R})$ un morphisme, la projection de $\prod_{i=1}^{g} \widetilde{[\rho(a_i), \rho(b_i)]}$ dans $\mathbf{Sp}_{2m}(\mathbf{R})$ est égale à $\prod_{i=1}^{g}[\rho(a_i), \rho(b_i)] = \rho\Big(\prod_{i=1}^{g}[a_i, b_i]\Big) = \rho(e_\Gamma) = e_{\mathbf{Sp}_{2m}(\mathbf{R})}$ et cet élément appartient donc au noyau de $\widetilde{\mathbf{Sp}}_{2m}(\mathbf{R}) \to \mathbf{Sp}_{2m}(\mathbf{R})$, c'est-à-dire à $\pi_1(\mathbf{Sp}_{2m}(\mathbf{R})) \simeq \mathbf{Z}$.

Définition 4.3. — *On appelle* nombre d'Euler *ou* nombre de Toledo *et on note* $\mathbf{e}(\rho)$ *le nombre entier* $\prod_{i=1}^{g} \widetilde{[\rho(a_i), \rho(b_i)]}$.

Théorème 4.4 (Inégalité de Milnor et Wood). — *Pour toute représentation* $\rho\colon \Gamma_g \to \mathbf{Sp}_{2m}(\mathbf{R})$, *on a* $|\mathbf{e}(\rho)| \le m(g-1)$.

Définition 4.5. — *Une représentation* $\rho\colon \Gamma_g \to \mathbf{Sp}_{2m}(\mathbf{R})$ *est dite* maximale *si* $|\mathbf{e}(\rho)| = m(g-1)$.

Soit Q le stabilisateur dans $\mathbf{Sp}_{2m}(\mathbf{R})$ de l'espace engendré par $e_1, \dots, e_m$ (toujours avec $(e_i)_{i=1,\dots,2m}$ la base canonique de $\mathbf{R}^{2m}$), c'est un sous-groupe parabolique maximal de $\mathbf{Sp}_{2m}(\mathbf{R})$.

Théorème 4.6 (Burger, Labourie, Iozzi et Wienhard [BILW05])
Toute représentation maximale est Q-Anosov.

Ce résultat est basé sur les travaux de Burger, Iozzi et Wienhard [BIW10] établissant l'existence d'une application équivariante, continue à droite $\partial_\infty \Gamma_g \to \mathbf{Sp}_{2m}(\mathbf{R})/Q \simeq \mathcal{L}ag(\mathbf{R}^{2m}) = \{h \in \mathrm{Gr}_m(\mathbf{R}^{2m}) \mid \forall x, y \in h,\ {}^t x J_m y = 0\}$ qui satisfait de surcroît une propriété de « maximalité ».

Lorsque G est un groupe de Lie simple et de type hermitien, le groupe fondamental de G a toujours un facteur cyclique infini ce qui permet de définir un nombre d'Euler/Toledo pour les représentations $\Gamma_g \to G$. Il y a encore une majoration de cet entier et donc une notion de représentations maximales. Les travaux de Burger, Iozzi et Wienhard montrent que ces représentations sont Anosov par rapport à un sous-groupe parabolique bien déterminé.

4.2. Autres exemples

4.2.1. *Les sous-groupes convexes-cocompacts.* — Ces sous-groupes sont Anosov ! Plus généralement si Γ est un sous-groupe convexe-cocompact de $\mathbf{O}(n,1)$ et si $\tau\colon \mathbf{O}(n,1) \to G$ est un plongement, alors $\tau(\Gamma)$ est Anosov relativement à un sous-groupe parabolique de G déterminé par le morphisme τ.

4.2.2. *Groupes de Schottky.* — Les groupes de Schottky, c'est à dire les sous-groupes engendrés par une paire (de puissances) d'éléments réguliers et suffisamment transverses, sont Anosov. Une démonstration géométrique, i.e. à partir de l'action sur l'espace symétrique et n'utilisant pas de versions du lemme du ping-pong, se trouve dans [KLPa] et est basée sur le théorème 5.9.

4.2.3. *Groupes de surfaces dans* $\mathbf{PGL}_3(\mathbf{R})$. — Dans [Bar10], Barbot étudie les représentations Anosov ρ de groupes de surface Γ_g dans $\mathbf{PGL}_3(\mathbf{R})$. Il montre en particulier qu'il y a toujours un ouvert $\Omega \subset \mathcal{F}lag(\mathbf{R}^3)$ de la variété drapeau sur lequel $\rho(\Gamma_g)$ agit proprement et avec quotient compact. Il caractérise aussi les représentations de la composante de Hitchin avec Ω : ρ appartient à la composante de Hitchin si et seulement si Ω n'est pas connexe.

4.2.4. *Convexes divisibles.* — On appelle ainsi les ouverts proprement convexes Ω de l'espace projectif $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{R})$ pour lesquels il existe un sous-groupe Γ de $\mathrm{Aut}(\Omega) = \{g \in \mathbf{PGL}_n(\mathbf{R}) \mid g \cdot \Omega = \Omega\}$ agissant proprement sur Ω avec quotient compact. Les réseaux de $\mathbf{O}(n-1,1)$ sont de tels exemples avec $\Omega = \mathbb{H}^{n-1}$. Benoist [Ben04] démontre que le groupe Γ est hyperbolique au sens de Gromov si et seulement si Ω est strictement convexe, auquel cas le bord de Gromov $\partial_\infty\Gamma$ s'identifie de manière Γ-équivariante à $\partial\Omega$. En utilisant l'action sur le convexe polaire $\Omega^0 \subset \mathbb{P}^{n-1*}(\mathbf{R})$ on obtient une seconde application $\partial_\infty\Gamma \to \mathbb{P}^{n-1*}(\mathbf{R})$. À partir de là, il est aisé de démontrer que $\Gamma \to \mathbf{PGL}_n(\mathbf{R})$ est Anosov.

Le théorème de stabilité des représentations Anosov peut être utilisé dans ce cas pour retrouver un résultat de Koszul [Kos68] de stabilité des structures projectives convexes sur une variété compacte.

Dans [Kap07] Kapovich construit des ouverts convexes divisibles (Ω, Γ) pour lesquels le quotient $\Gamma\backslash\Omega$ est une variété de Gromov et Thurston ; ceci donne les premiers exemples de sous-groupes Anosov qui ne sont pas isomorphes à un réseau d'un groupe de Lie.

4.2.5. *Sous-groupes quasi-fuchsiens dans* $\mathbf{SO}(2,n)$. — Barbot et Mérigot ont défini une notion de sous-groupe Γ quasi-fuchsien dans $\mathbf{SO}(2,n)$: l'ensemble limite Λ_Γ, dans le projectivisé du cône isotrope pour la forme quadratique $q_{2,n}$, est homéomorphe à la sphère de dimension $n-1$ et vérifie une propriété d'« acausalité ». Ils démontrent dans [BM12] qu'alors Γ est Anosov et que, réciproquement, un sous-groupe Anosov dont le bord de Gromov $\partial_\infty\Gamma$ est homéomorphe à une sphère de dimension $n-1$ est quasi-fuchsien. Barbot [Bar15] démontre ensuite que le sous-ensemble des représentations quasi-fuchsiennes dans $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbf{SO}(2,n))$ est fermé ; comme cet ensemble est également ouvert, il est réunion de composantes connexes.

4.2.6. *Groupes de Coxeter.* — En se basant sur leurs travaux qui développent la notion de sous-groupes convexes-cocompacts en géométrie projective (voir le paragraphe 7.4 plus bas), Danciger, Guéritaud et Kassel [DGKa, DGKb] montrent que tous les groupes de Coxeter à angles droits et hyperboliques admettent des représentations Anosov ; les images de ces représentations sont des groupes de réflexions hyperplanes. Ceci permet d'avoir de nouveaux exemples de représentations Anosov pour des groupes discrets qui ne sont pas des réseaux d'un groupe de Lie.

En utilisant ces travaux, Lee et Marquis [LM] ont donné les premiers exemples de sous-groupes quasi-fuchsiens (au sens de Barbot et Mérigot, voir § 4.2.5) qui ne sont pas isomorphes à des réseaux de $\mathbf{O}(1,n)$.

5. DIFFÉRENTES CARACTÉRISATIONS DES SOUS-GROUPES ANOSOV

Cette partie passe en revue quelques caractérisations des représentations Anosov (ici des représentations P_1-Anosov dans $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$), il y en a bien d'autres et le lecteur pourra consulter [KLa, KLb, KLPa, KLPb, KLP16, KLP18, KLPc, KLPd, GGKW17a, GW12, Lab06] pour un tableau plus complet.

5.1. Un peu de géométrie de l'espace symétrique

Ce paragraphe aborde de manière succincte, pour le groupe $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$, la géométrie de l'espace symétrique et les variétés drapeaux comme « bord à l'infini » de l'espace symétrique ; ceci est traité de manière plus systématique dans les articles de Kapovich, Leeb et Porti.

Nous travaillerons dans cette partie plutôt avec le groupe $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$ que $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$; il est commode et naturel de se « débarrasser » du facteur central de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ et de travailler avec un groupe de Lie connexe. L'espace symétrique $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})/\mathbf{SO}(n)$ s'identifie à $X_n = \{s \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R}) \mid {}^t\!s = s,\ \det s = 1,\ \text{ et } \forall x \in \mathbf{R}^n \smallsetminus \{0\},\ {}^t\!xsx > 0\}$. Soit $s_0 = 1_n$ le point de X_n dont le stabilisateur est $\mathbf{SO}(n)$.

La décomposition de Cartan dans $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$ (qui est reliée aux valeurs principales déjà mentionnées) implique le (et est même équivalente au) fait que pour tout s dans X_n, il existe un élément k de $\mathbf{SO}(n)$ et une matrice diagonale $\boldsymbol{\mu} = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ avec $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n$ et $\sum_{i=1}^n \mu_i = 0$ tels que $s = ke^{\boldsymbol{\mu}} \cdot s_0$. Le n-uplet $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ est alors uniquement déterminé. On dira que le segment s_0s est *régulier* si à la fois $\mu_1 > \mu_2$

et $\mu_{n-1} > \mu_n$. Plus généralement, si s et s' sont deux points de X_n, il existe un élément g de $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$ et une matrice diagonale $\boldsymbol{\mu} = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ avec $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n$ tels que $s = g \cdot s_0$ et $s' = ge^{\boldsymbol{\mu}} \cdot s_0$. La matrice $\boldsymbol{\mu}$ est uniquement déterminée par (s, s'). Le segment ss' est dit *régulier* si $\mu_1 > \mu_2$ et $\mu_{n-1} > \mu_n$. La matrice associée à (s', s) est la matrice diagonale $\operatorname{diag}(-\mu_n, -\mu_{n-1}, \dots, -\mu_1)$. Ainsi le segment $s's$ est régulier si et seulement si ss' l'est.

La variété des drapeaux constitués d'une droite et d'un hyperplan est notée $\mathcal{F}_{1,n-1} = \{(\ell, h) \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{R}) \times \mathbb{P}^{n-1*}(\mathbf{R}) \mid \ell \subset h\}$. C'est un espace homogène sous l'action de $\mathbf{SO}(n)$ et le stabilisateur dans $\mathbf{SO}(n)$ de $f_0 = (\ell_0, h_0)$ où $\ell_0 = \mathbf{R}e_1$ et $h_0 = \mathbf{R}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{R}e_{n-1}$ est le sous-groupe M de $\mathbf{SO}(n)$ constitué des matrices diagonales par blocs, $M = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & & \\ & a & \\ & & \delta \end{pmatrix} \,\middle|\, \varepsilon, \delta \in \{\pm 1\},\ a \in \mathbf{O}(n-2),\ \varepsilon\delta \det a = 1 \right\}$.

On appellera *cône de Weyl* (centré en s_0 et de direction f_0) et on notera $V(s_0, f_0)$ le sous-ensemble de X_n formé des $me^{\boldsymbol{\mu}} \cdot s_0$ avec $\boldsymbol{\mu} = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n$ et $m \in M$. Si $f = (\ell, h)$ appartient à $\mathcal{F}_{1,n-1}$, soit $k \in \mathbf{SO}(n)$ tel que $f = k \cdot f_0$, le *cône de Weyl* $V(s_0, f)$ est l'image de $V(s_0, f_0)$ par k : $V(s_0, f) = k \cdot V(s_0, f_0) = \{k_1 e^{\boldsymbol{\mu}} \cdot s_0 \mid \boldsymbol{\mu} = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n),\ \mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n,\ k_1 \in \mathbf{SO}(n),\ k_1 \cdot f_0 = f\}$. Un point $s = g \cdot s_0$ appartient à $V(s_0, f)$ si et seulement si la matrice $g\,{}^t\!g$ stabilise ℓ et h (et donc $\ell^\perp$ et $h^\perp$) et si $\|g\,{}^t\!g|_\ell\| \geq \|g\,{}^t\!g|_{\ell^\perp}\|$ et $\|(g\,{}^t\!g)^{-1}|_{h^\perp}\| \geq \|(g\,{}^t\!g)^{-1}|_h\|$. Il existe donc toujours un cône de Weyl $V(s_0, f)$ ($f = (\ell, h) \in \mathcal{F}_{1,n-1}$) contenant $s = g \cdot s_0 = ke^{\boldsymbol{\mu}} \cdot s_0$ et ce cône de Weyl est uniquement déterminé à s si et seulement si $\|g\,{}^t\!g|_\ell\| > \|g\,{}^t\!g|_{\ell^\perp}\|$ et $\|(g\,{}^t\!g)^{-1}|_{h^\perp}\| > \|(g\,{}^t\!g)^{-1}|_h\|$. Comme ici $e^{\mu_1} = \|g\,{}^t\!g|_\ell\|$, $e^{\mu_2} = \|g\,{}^t\!g|_{\ell^\perp}\|$, $e^{-\mu_n} = \|(g\,{}^t\!g)^{-1}|_{h^\perp}\|$ et $e^{-\mu_{n-1}} = \|(g\,{}^t\!g)^{-1}|_h\|$, l'unicité de ce cône de Weyl est équivalente à ce que le segment $s_0 s$ est régulier.

On peut bien sûr considérer des cônes de Weyl de sommets quelconques : si $s \in X_n$ et $f \in \mathcal{F}_{1,n-1}$, il existe $g \in \mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$ tel que $s = g \cdot s_0$ et $f = g \cdot f_0$ (toujours car le stabilisateur de s_0 dans $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$ agit transitivement sur $\mathcal{F}_{1,n-1}$), on pose $V(s, f) = g \cdot V(s_0, f_0)$. Comme g est uniquement déterminé par multiplication à droite par un élément de M près et comme $V(s_0, f_0)$ est invariant par M, cet ensemble dépend uniquement de la paire (s, f) et non de g. Pour tout autre point s' de X_n, il existe un cône de Weyl $V(s, f)$ contenant s' et ce cône est unique si et seulement si ss' est un segment régulier.

Soit maintenant ss' un segment régulier, le *diamant* $\diamondsuit_{s,s'}$ déterminé par ss' est l'intersection du cône de Weyl $V(s, f)$ contenant s' et du cône de Weyl $V(s', f')$ contenant s : $\diamondsuit_{s,s'} = V(s, f) \cap V(s', f')$. C'est un sous-ensemble *compact* de X_n. On a $\diamondsuit_{s',s} = \diamondsuit_{s,s'}$ et, pour tout $s'' \in \diamondsuit_{s,s'}$ tel que ss'' est régulier, $\diamondsuit_{s,s''} \subset \diamondsuit_{s,s'}$. Notons aussi que, sous ces hypothèses, les drapeaux $f = (\ell, h)$ et $f' = (\ell', h')$ sont *transverses* : $\ell \cap h' = 0$ et $\ell' \cap h = 0$.

Nous aurons également besoin de versions quantitatives de la régularité. Un segment ss' de X_n sera dit *ϵ-régulier* (où $\epsilon > 0$ est fixé) si $s = g \cdot s_0$, $s' = ge^{\boldsymbol{\mu}} \cdot s_0$ avec $\boldsymbol{\mu} = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$, $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n$, sont tels que $\mu_1 - \mu_2 \geq \epsilon\, d_{X_n}(s, s')$ et $\mu_{n-1} - \mu_n \geq \epsilon\, d_{X_n}(s, s')$ avec $d_{X_n}(s, s') = \sqrt{\sum_{i=1}^n \mu_i^2}$ (d_{X_n} est la distance riemannienne dans X_n). On notera $V^\epsilon(s, f)$ l'ensemble des s' dans $V(s, f)$ tels que ss' est ϵ-régulier. On notera $\diamondsuit^\epsilon_{s,s'}$

l'intersection $V^\epsilon(s,f)\cap V^\epsilon(s',f')$ où f et f' sont déterminés par le segment régulier ss' comme ci-dessus.

5.2. Un peu de dynamique sur $\mathcal{F}_{1,n-1}$

Les notions introduites dans le paragraphe précédent permettent de définir l'ensemble limite dans $\mathcal{F}_{1,n-1}$ d'un sous-groupe Γ de $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$.

DÉFINITION 5.1. — *On note* $\Lambda_\Gamma\subset\mathcal{F}_{1,n-1}$ *et on appelle* ensemble limite *de* Γ *dans* $\mathcal{F}_{1,n-1}$ *l'ensemble des limites de suites* $(f_p)_{p\in\mathbf{N}}$ *de* $\mathcal{F}_{1,n-1}$ *telles qu'il existe une suite* $(\gamma_p)_{p\in\mathbf{N}}$ *dans* Γ *avec*

— $\lim\mu_1(\gamma_p)-\mu_2(\gamma_p)=\lim\mu_{n-1}(\gamma_p)-\mu_n(\gamma_p)=+\infty$,
— $\lim d_{X_n}(s_0,\gamma_p\cdot s_0)=+\infty$ *et,*
— *pour tout* $p\in\mathbf{N}$, $\gamma_p\cdot s_0\in V(s_0,f_p)$.

L'ensemble limite est fermé, il ne dépend pas du point base s_0. On pourrait, dans la définition, supposer seulement que $\gamma_p\cdot s_0$ est dans un R-voisinage de $V(s_0,f_p)$ où $R\geq 0$ est indépendant de p. On appelle points coniques les points de Λ_Γ obtenus ainsi en prenant une suite $(f_p)_{p\in\mathbf{N}}$ constante :

DÉFINITION 5.2. — *Un élément* f *de* $\mathcal{F}_{1,n-1}$ *est un* point limite conique *s'il existe une suite* $(\gamma_p)_{p\in\mathbf{N}}$ *de* Γ *et* $R\geq 0$ *avec* $\lim d_{X_n}(s_0,\gamma_p\cdot s_0)=+\infty$ *et, pour tout* $p\in\mathbf{N}$, $\gamma_p\cdot s_0$ *appartient au* R*-voisinage du cône de Weyl* $V(s_0,f)$.

Des caractérisations des sous-groupes Anosov seront aussi données en termes de l'action de Γ sur $\mathcal{F}_{1,n-1}$, i.e. sans référence à l'espace symétrique X_n. Les notions pertinentes sont les suivantes.

DÉFINITION 5.3. — *Une suite* $(g_p)_{p\in\mathbf{N}}$ *de* $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})^{\mathbf{N}}$ *est dite* contractante *sur* $\mathcal{F}_{1,n-1}$ *s'il existe* f^+ *et* f^- *dans* $\mathcal{F}_{1,n-1}$ *tels que, pour tout* $f\in\mathcal{F}_{1,n-1}$, *si* f *est transverse à* f^-, *alors la suite* $(g_p\cdot f)_{p\in\mathbf{N}}$ *tend vers* f^+.

L'action de Γ *sur* $\mathcal{F}_{1,n-1}$ *sera dite* de convergence *si toute suite de* Γ *tendant vers l'infini a une sous-suite contractante. (On dit qu'une suite* $(\gamma_p)_{p\in\mathbf{N}}$ *tend vers l'infini quand* $\lim d_{X_n}(s_0,\gamma_p\cdot s_0)=+\infty$.)

Si $(g_p)_{p\in\mathbf{N}}$ est une suite contractante, alors les drapeaux $f^\pm$ de la définition sont uniquement déterminés et la convergence vers f^+ est en fait uniforme sur les compacts de $\mathcal{F}_{1,n-1}$ contenus dans l'ouvert des éléments de $\mathcal{F}_{1,n-1}$ transverses à f^-.

On peut détecter l'existence d'une sous-suite contractante à l'aide de la projection de Cartan. Pour tout g dans $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$ notons encore $\boldsymbol{\mu}(g)=\operatorname{diag}(\mu_1(g),\ldots,\mu_n(g))$ l'unique matrice diagonale à coefficients décroissants contenue dans la double classe $\mathbf{SO}(n)g\mathbf{SO}(n)$. Alors une suite $(g_p)_{p\in\mathbf{N}}\in\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})^{\mathbf{N}}$ a une sous-suite contractante si et seulement si $\sup\{\mu_1(g_p)-\mu_2(g_p),\,p\in\mathbf{N}\}=\sup\{\mu_{n-1}(g_p)-\mu_n(g_p),\,p\in\mathbf{N}\}=+\infty$.

Les définitions ci-dessus sont empruntées des articles de Kapovich, Leeb et Porti. Benoist [Ben97] définit aussi une notion d'ensemble limite qu'il étudie en détails. Dans ses travaux sur les mesures de Patterson et Sullivan en rang supérieur, Albuquerque [Alb99] introduit également une notion de point limite conique.

5.3. Sous-groupes de convergence, dilatant et à ensemble limite transverse

La caractérisation donnée ici des représentations Anosov est un analogue du théorème 1.5 pour les sous-groupes convexes-cocompacts.

THÉORÈME 5.4 (Kapovich, Leeb et Porti [KLPa]). — *Soit* Γ *un sous-groupe discret de* $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$. *On suppose*

Transversalité : *Pour tous* $f \neq f'$ *dans* Λ_Γ, *les drapeaux* f *et* f' *sont transverses.*

Convergence : *L'action de* Γ *sur* $\mathcal{F}_{1,n-1}$ *est de convergence (définition 5.3).*

Dilatation : *L'action de* Γ *en tout point* $f \in \Lambda_\Gamma$ *est dilatante : il existe* $\gamma \in \Gamma$, $c > 0$ *et un voisinage* U *de* f *dans* $\mathcal{F}_{1,n-1}$ *tels que, pour tous* f_1, $f_2 \in U$, $d_{\mathcal{F}_{1,n-1}}(\gamma \cdot f_1, \gamma \cdot f_2) \geq c\, d_{\mathcal{F}_{1,n-1}}(f_1, f_2)$ ($d_{\mathcal{F}_{1,n-1}}$ *est une distance riemannienne sur* $\mathcal{F}_{1,n-1}$).

Alors le groupe Γ *est de type fini, hyperbolique au sens de Gromov et* Γ *est un sous-groupe Anosov de* $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$. *De plus, si* $\beta_1 \colon \partial_\infty\Gamma \to \mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{R})$ *et* $\beta_{n-1} \colon \partial_\infty\Gamma \to \mathbb{P}^{n-1*}(\mathbf{R})$ *sont les applications au bord associées, l'application* $\beta = (\beta_1, \beta_{n-1}) \colon \partial_\infty\Gamma \to \mathcal{F}_{1,n-1} \subset \mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{R}) \times \mathbb{P}^{n-1*}(\mathbf{R})$ *induit un homéomorphisme* Γ*-équivariant sur* Λ_Γ.

Dans ce théorème, l'hyperbolicité est déduite du résultat suivant :

THÉORÈME 5.5 (Bowditch [Bow98]). — *Soit* Z *un espace topologique compact, métrisable et parfait et soit* Γ *un groupe d'homéomorphismes de* Z *agissant proprement sur* $\{(z_1, z_2, z_3) \in Z^3 \mid z_1 \neq z_2,\, z_2 \neq z_3,\, z_3 \neq z_1\}$ *et avec quotient compact. Le groupe* Γ *est alors de type fini, hyperbolique au sens de Gromov et son bord de Gromov* $\partial_\infty\Gamma$ *s'identifie à* Z *de manière* Γ*-équivariante.*

5.4. Sous-groupes réguliers à ensemble limite conique et transverse

Cette caractérisation entre en résonance avec le corollaire 1.7 pour les sous-groupes convexes-cocompacts.

THÉORÈME 5.6 (Kapovich, Leeb et Porti [KLPa]). — *Soit* Γ *un sous-groupe de* $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$. *On suppose*

Régularité : $\lim_{\gamma\to\infty,\gamma\in\Gamma} \mu_1(\gamma) - \mu_2(\gamma) = +\infty$ *(de manière équivalente, pour toute suite* $(\gamma_p)_{p\in\mathbf{N}}$ *d'éléments deux à deux distincts,* $\lim_p \mu_1(\gamma_p) - \mu_2(\gamma_p) = +\infty$*).*

Transversalité : *Pour tous* f, f' *dans* Λ_Γ, *si* $f \neq f'$, *alors* f *et* f' *sont transverses.*

Conicalité : *Tout point* f *de* Λ_Γ *est un point limite conique (définition 5.2).*

Alors le groupe Γ *est de type fini, hyperbolique au sens de Gromov et l'injection de* Γ *dans* $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$ *est une représentation Anosov.*

Bien sûr, réciproquement, un sous-groupe Anosov satisfait à toutes les conditions énoncées dans ces deux théorèmes.

5.5. Action de type Morse

Le lemme de Morse, pour les espaces hyperboliques, affirme que les quasi-géodésiques sont à distance finie de géodésiques. Un tel énoncé n'est pas vrai en rang supérieur mais Kapovich, Leeb et Porti [KLPb] en ont donné une version pour X_n (et pour les espaces symétriques et les immeubles euclidiens) : un segment géodésique *régulier* (i.e. vérifiant la condition énoncée dans le théorème 0.1) est proche d'un diamant (respectivement, un rayon géodésique régulier est proche d'un cône de Weyl et une géodésique biinfinie est proche de la réunion de deux cônes de Weyl de même sommet et de directions transverses). La partie 6 suivante donne quelques énoncés intermédiaires qui mènent à ce résultat d'approximation des quasi-géodésiques régulières.

Voyons maintenant qu'un sous-groupe hyperbolique vérifiant cette propriété d'approximation est Anosov.

Théorème 5.7 (Kapovich, Leeb et Porti [KLPa]). — *Soit* Γ *un sous-groupe de type fini de* $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$*. On suppose que* Γ *est hyperbolique au sens de Gromov et que*

Régularité : $\lim_{\gamma\to\infty,\gamma\in\Gamma} \mu_1(\gamma) - \mu_2(\gamma) = +\infty$.

Morse : *Il existe* $R \geq 0$ *pour lequel la propriété suivante est vérifiée : pour toute géodésique finie* $(\gamma_p)_{p=0,\ldots,P}$ *dans le graphe de Cayley de* Γ*, il existe* s *et* s' *dans* X_n *tels que* $d_{X_n}(\gamma_0 \cdot s_0, s) \leq R$*,* $d_{X_n}(\gamma_P \cdot s_0, s') \leq R$*, le segment* ss' *est régulier et, pour tout* $p = 0, \ldots, P$*,* $\gamma_p \cdot s_0$ *appartient au* R*-voisinage du diamant* $\diamondsuit_{s,s'}$*.*

Le groupe Γ *est alors un sous-groupe Anosov.*

Réciproquement, un sous-groupe Anosov est « Morse » de manière quantitative :

Théorème 5.8 (Kapovich, Leeb et Porti [KLPa]). — *Soit* Γ *un sous-groupe Anosov de* $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$*. Il existe alors* $L \geq 1$*,* $A \geq 0$*,* $R \geq 0$ *et* $\epsilon > 0$ *tels que, pour toute géodésique finie* $(\gamma_p)_{p=0,\ldots,P}$ *dans le graphe de Cayley de* Γ*, on a :*

- *l'application* $\{0, 1, \ldots, P\} \to X_n / p \mapsto \gamma_p \cdot s_0$ *est une* (L, A)*-quasi-géodésique ;*
- *il existe* $s \in B_{X_n}(\gamma_0 \cdot s_0, R)$ *et* $s' \in B_{X_n}(\gamma_P \cdot s_0, R)$ *tels que* $\{\gamma_p \cdot s_0,\ p = 0, \ldots, P\}$ *est contenu dans le* R*-voisinage de* $\diamondsuit^{\epsilon}_{s,s'}$*.*

Lorsque les conclusions du théorème sont satisfaites, on parlera de *quasi-géodésique de classe Morse* ou (L, A, ϵ, R)-géodésique de classe Morse et on dira que le groupe Γ est *quasi-plongé de classe Morse* ou (L, A, ϵ, R)-plongé de classe Morse dans $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$. Lorsqu'elles sont vérifiées seulement pour les géodésiques de longueur $P \leq S$ donnée, on dira que Γ est *localement* (L, A, ϵ, R, S)*-plongé de classe Morse* ou localement quasi-plongé de classe Morse dans $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$. Puisque toutes les propriétés énoncées dans le théorème sont invariantes par multiplication à gauche par un élément de Γ, on peut aussi bien se restreindre aux géodésiques $(\gamma_p)_{p=0,\ldots,P}$ vérifiant $\gamma_0 = e_\Gamma$. La condition d'être localement quasi-plongé de classe Morse n'implique donc qu'un nombre *fini* de géodésiques (elles aussi finies) de Γ. Cette condition suffit cependant à assurer la condition globale.

Théorème 5.9 (Kapovich, Leeb et Porti [KLPa]). — *Soit* (L, A, ϵ, R) *fixé et* $\epsilon' > \epsilon$. *Il existe* $S \geq 0$ *tel que si* Γ *est un sous-groupe de* $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$*, hyperbolique au sens de Gromov, si* Γ *est régulier, et si* Γ *est localement* (L, A, ϵ', R, S)*-plongé de classe Morse dans* $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$*, alors* Γ *est* (L, A, ϵ, R)*-plongé de classe Morse.*

5.6. Divergence

Les représentations Anosov vérifient d'autres propriétés fortes de divergence. Dans [GGKW17a] est prouvé le fait que, si Γ est un sous-groupe Anosov de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$, alors, pour tout $i = 2, \ldots, n$ et pour tout rayon géodésique $(\gamma_p)_{p\in\mathbf{N}}$ dans Γ, l'application $\mathbf{N} \to \mathbf{R}_+/p \mapsto \mu_1(\gamma_p) - \mu_i(\gamma_p)$ est une quasi-isométrie. Les constantes de quasi-isométries peuvent être prises uniformes pour les rayons géodésiques tels que $\gamma_0 = e_\Gamma$. Réciproquement il est établi que, si la fonction $\Gamma \to \mathbf{R}_+/\gamma \mapsto \mu_1(\gamma) - \mu_2(\gamma)$, pour un sous-groupe Γ de type fini, vérifie une propriété de divergence « logarithmique », les suites $(f_p)_{p\in\mathbf{N}}$, dans $\mathcal{F}_{1,n-1}$, associées à un rayon géodésique $(\gamma_p)_{p\in\mathbf{N}}$ par la relation $\gamma_p \cdot s_0 \in V(s_0, f_p)$ sont toutes convergentes et de même limite ce qui permet de définir une application $\beta : \partial_\infty\Gamma \to \mathcal{F}_{1,n-1}$ équivariante et continue. Lorsque de plus Γ est hyperbolique au sens de Gromov et que les fonctions $p \mapsto \mu_1(\gamma_p) - \mu_i(\gamma_p)$ sont des quasi-isométries, il est démontré que β vérifie la propriété de transversalité et que le sous-groupe Γ est Anosov.

Un résultat analogue est le fait que, pour toute quasi-géodésique de classe Morse $(\gamma_p)_{p\in\mathbf{N}}$, la suite des projections de Cartan $(\boldsymbol{\mu}(\gamma_p\gamma_0^{-1}))_{p\in\mathbf{N}}$ est, elle aussi, une quasi-géodésique de classe Morse [KLPd].

6. HYPERBOLICITÉ DU GROUPE Γ

Cette section explique une partie des conclusions du théorème 0.1, à savoir celle concernant l'hyperbolicité du groupe. Remarquons que les hypothèses du théorème peuvent se réexprimer en disant que l'application orbitale $\Gamma \to X_n/\gamma \mapsto \gamma \cdot s_0$ est un plongement quasi-isométrique et qu'il existe $D \geq 0$ et $\epsilon > 0$ tels que, pour tous γ, γ' dans Γ, si $d_{X_n}(\gamma \cdot s_0, \gamma' \cdot s_0) \geq D$ alors le segment d'extrémités $\gamma \cdot s_0$ et $\gamma' \cdot s_0$ est ϵ-régulier. Posons $Z = \Gamma \cdot s_0 \subset X_n$ muni de la distance d_Z déduite de celle de X_n par restriction, Z est quasi-isométrique à Γ.

Il s'agit donc de démontrer que (Z, d_Z) est hyperbolique au sens de Gromov. La caractérisation suivante de l'hyperbolicité sera utilisée ici : (Z, d_Z) est hyperbolique au sens de Gromov si et seulement si tout cône asymptotique (notion due à van den Dries et Wilkie [vdDW84] et à Gromov [Gro93]) de (Z, d_Z) est un arbre réel, i.e. est 0-hyperbolique.

Soit $\mathfrak{F} \subset \mathcal{P}(\mathbf{N})$ un ultrafiltre non principal (i.e. $\mathfrak{F}$ ne contient aucun ensemble fini, est stable par intersection finie et par passage au sur-ensemble, et est maximal pour ces propriétés). Un *cône asymptotique* de (Z, d_Z) est un espace métrique $(\mathcal{Z}, d_\mathcal{Z})$ obtenu à partir d'une suite $(\lambda_p)_{p\in\mathbf{N}}$ de réels strictement positifs tendant vers 0 et d'une suite de points base $(b_p)_{p\in\mathbf{N}} \in Z^\mathbf{N}$ de la manière suivante :

— soit $\widehat{\mathcal{Z}}$ le sous-ensemble des suites $(z_p)_{p\in\mathbf{N}}$ telles que la suite réelle $(\lambda_p\, d_Z(b_p, z_p))_{p\in\mathbf{N}}$ est bornée selon $\mathfrak{F}$ (i.e. il existe $M \geq 0$ tel que l'ensemble $\{p \in \mathbf{N} \mid |\lambda_p\, d_Z(b_p, z_p)| \leq M\}$ appartient à $\mathfrak{F}$). Dans ce cas, cette suite est automatiquement convergente selon $\mathfrak{F}$ (i.e. il existe $t \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $\epsilon > 0$, $\{p \in \mathbf{N} \mid |\lambda_p\, d_Z(b_p, z_p) - t| \leq \epsilon\}$ appartient à $\mathfrak{F}$) ;

— on définit, quels que soient $(z_p)_{p\in\mathbf{N}}$ et $(z'_p)_{p\in\mathbf{N}}$ dans $\widehat{\mathcal{Z}}$, $d_{\widehat{\mathcal{Z}}}((z_p)_p, (z'_p)_p) = \lim_{\mathfrak{F}} \lambda_p\, d_Z(z_p, z'_p)$. Alors $d_{\widehat{\mathcal{Z}}}$ est symétrique et vérifie l'inégalité triangulaire ;

— on obtient un espace métrique $\mathcal{Z}$ en quotientant $\widehat{\mathcal{Z}}$ par la relation d'équivalence dont le graphe est $\{d_{\widehat{\mathcal{Z}}} = 0\} \subset \widehat{\mathcal{Z}} \times \widehat{\mathcal{Z}}$.

Ce cône asymptotique est maintenant un espace métrique connexe par arcs ; mieux il existe des géodésiques (paramétrées par un intervalle de $\mathbf{R}$) entre toute paire de points de $\mathcal{Z}$.

Aussi (et presque par construction) $\mathcal{Z}$ se plonge dans le cône asymptotique $\mathcal{X}$ de X_n. Par les travaux de Kleiner et Leeb [KL97], il est connu que ce cône asymptotique $\mathcal{X}$ a la propriété remarquable d'être un immeuble euclidien de type A_{n-1} (i.e. du même type que X_n). Concrètement, dans $\mathcal{X}$, on peut définir :

— pour tout $(s, s') \in \mathcal{X}^2$, un n-uplet $\boldsymbol{\mu}(s, s') = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbf{R}^n$ avec $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n$ (et $\sum_{i=1}^n \mu_i = 0$) ; en particulier les notions de segment régulier et de segment ϵ-régulier ;

— une « variété drapeau » à l'infini $\mathcal{F}_\infty$ (ici l'ultraproduit $\prod_{\mathfrak{F}} \mathcal{F}_{1,n-1}$) et donc des cônes de Weyl et des diamants. Une différence étant que, pour les immeubles euclidiens, un segment régulier appartient à plusieurs cônes de Weyl, néanmoins les différents diamants que l'on peut dès lors construire sont tous égaux ;

— en tout point s de $\mathcal{X}$ une « variété drapeau » $\mathcal{F}_s$ des directions des (germes de) cônes de Weyl au point s.

Dans ces variétés drapeaux $\mathcal{F}_\infty$ et $\mathcal{F}_s$, la notion de transversalité est bien définie. Une différence importante avec le cas de X_n est que la topologie induite sur $\mathcal{F}_s$ est la topologie discrète. Il y a des projections naturelles $\mathcal{F}_\infty \to \mathcal{F}_s$ et, pour tout s' dans $\mathcal{X}$ tel que le segment ss' est régulier, le (germe de) cône de Weyl contenant ce segment définit un élément $f(s') \in \mathcal{F}_s$. Cette fonction permet de caractériser le diamant (de $\mathcal{X}$) $\diamondsuit_{s^-,s^+}$: s appartient au diamant $\diamondsuit_{s^-,s^+}$ si et seulement si $f(s^-)$ et $f(s^+) \in \mathcal{F}_s$ sont transverses.

Par hypothèse sur Z (ou plutôt sur Γ), l'ensemble $\mathcal{Z}$ est automatiquement ϵ-régulier, c'est-à-dire que toute paire de points distincts dans $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}$ définit un segment ϵ-régulier. Une étape importante est d'obtenir :

> Tout segment rectifiable dans $\mathcal{Z}$ est contenu dans le diamant défini par ses extrémités, voir [KLPb, Th. 5.6].

À partir de là, Kapovich, Leeb et Porti démontrent que $\mathcal{Z}$ est un arbre métrique, [KLPb, Cor. 6.5 et 6.6].

Cette propriété des chemins rectifiables et ϵ-réguliers est quant à elle obtenue grâce à un contrôle des propriétés de contraction de la projection $\pi_\diamondsuit \colon \mathcal{X} \to \diamondsuit$ sur un diamant $\diamondsuit$ (les diamants sont convexes). Cette projection est 1-lipschitzienne pour $d_\mathcal{X}$ mais des estimées plus fines sont nécessaires pour pouvoir conclure. Pour ce faire, Kapovich, Leeb et Porti introduisent $d_\diamondsuit$ une métrique sur $\diamondsuit$ pour laquelle ils démontrent :

> La projection $\pi_\diamondsuit$ est (localement) 1-lipschitzienne de $\mathcal{X} - \diamondsuit$ dans $(\diamondsuit, d_\diamondsuit)$ [KLPb, Th. 4.8].

La propriété recherchée provient alors du fait que, pour les segments ϵ-réguliers, la distance $d_\diamondsuit$ est quantitativement plus grande que $d_{\mathcal{X}}$.

La définition de $d_\diamondsuit$ est ainsi : la longueur d'un chemin géodésique par morceaux ne « change » pas mais l'on autorise dans $\diamondsuit = \diamondsuit_{s^-,s^+}$ uniquement des morceaux qui sont des segments géodésiques xy non inclus dans l'intérieur des cônes de Weyl $V(x, f)$ (ou $V(y, f)$) qui contiennent s^- ou s^+, autrement dit y n'appartient pas aux diamants $\diamondsuit_{s^-,x}$, $\diamondsuit_{x,s^+}$ [KLPb, § 4.1].

7. UN PANORAMA (TROP RAPIDE) AUTOUR DES REPRÉSENTATIONS ANOSOV

Cet exposé n'a permis d'aborder que *quelques* caractérisations des représentations Anosov, les articles mentionnés plus haut en contiennent d'autres renforçant encore le lien avec les sous-groupes convexes-cocompacts (qui eux-mêmes admettent d'autres caractérisations). En outre, il existe aussi des caractérisations utilisant les valeurs propres des éléments du groupe plutôt que leurs valeurs principales. Par ailleurs, la métrique $d_\diamondsuit$ introduite plus haut admet une interprétation naturelle en termes de la géométrie finslérienne de l'espace symétrique ; Kapovich et Leeb [KLa] ont élaboré sur cette géométrie finslérienne et les compactifications de l'espace symétrique qui s'en suivent.

Il existe également une autre démonstration du lemme de Morse pour les espaces symétriques donnée par Bochi, Potrie et Sambarino [BPS] et se basant sur la notion de décomposition dominée en systèmes dynamiques et les résultats de Avila, Bochi et Yoccoz [ABY10] et de Bochi et Gourmelon [BG09] dans ce domaine.

7.1. Structures géométriques

Les représentations Anosov entretiennent des liens forts avec les structures géométriques. Les résultats de Barbot sur les représentations Anosov dans $\mathbf{PGL}_3(\mathbf{R})$ vont dans ce sens, § 4.2.3. L'article [GW12] montre, entre autres, que tout sous-groupe Anosov Γ d'un groupe de Lie semi-simple G est l'holonomie d'une structure géométrique sur une variété compacte ; plus précisément, il existe un G-espace homogène compact $\mathcal{E}$, un ouvert Γ-invariant Ω de $\mathcal{E}$ (construit explicitement à partir de l'application au bord $\partial_\infty\Gamma \to G/P$ et d'une représentation de G dans $\mathbf{GL}_N(\mathbf{R})$) sur lequel Γ agit proprement et avec quotient compact. L'article [KLP18] offre des éclairages nouveaux sur ces domaines de discontinuité avec quotient compact : l'argument de cocompacité est de nature dynamique (et non cohomologique) et Ω est ici un ouvert de $\mathcal{F} = G/P'$ d'une variété drapeaux et est construit à partir d'une donnée combinatoire sur le groupe de

Weyl W, explicitement il s'agit d'un sous-ensemble de W appelé « épaississement équilibré ». Y est démontré aussi que, dans $\mathcal{F} = G/P_{\min}$, l'ouvert Ω est toujours non vide si G a au moins un facteur simple qui n'est pas de type A_1, B_2 ou G_2.

L'étude de ces structures géométriques prend maintenant un nouvel élan pour les espaces de Teichmüller généralisés où les outils analytico-algébro-géométriques, déjà utilisés depuis longtemps pour établir des propriétés de ces espaces de modules, commencent aujourd'hui à être employés pour étudier ces structures géométriques. Un premier papier dans cette direction est celui de Collier, Tholozan et Toulisse [CTT] sur les représentations maximales dans $\mathbf{SO}(2, n)$.

7.2. Dynamique

Le « formalisme thermodynamique » a d'abord été introduit en théorie des systèmes dynamiques par Bowen [Bow73, Bow79], Parry et Pollicott [PP90], Ruelle [Rue78] et d'autres. Il a été ensuite utilisé par McMullen [McM08] puis par Bridgeman [Bri10] pour les représentations fuchsiennes et quasi-fuchsiennes (de nouvelles formules y sont données pour la métrique de Weyl et Petersson). L'article de Bridgeman, Canary, Labourie, et Sambarino [BCLS15] développe ce formalisme pour les représentations Anosov : ils construisent une nouvelle métrique (dite « de pression ») sur l'espace des modules des représentations Anosov (Zariski denses) et démontrent que certains invariants dynamiques (entropie, dimension de Hausdorff de l'ensemble limite, etc.) varient analytiquement. Avec ces outils, Potrie et Sambarino [PS17] ont démontré un résultat de rigidité pour les représentations $\rho : \Gamma_g \to \mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$ de la composante de Hitchin : la représentation ρ factorise par le $\mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$ principal si et seulement si l'entropie de ρ est maximale (et donc égale à 1).

7.3. Compactification, dégénérescence

Les travaux de Kapovich et Leeb et ceux de [GKW] proposent des compactifications des espaces localement symétriques $\Gamma\backslash G/K$ associés à des sous-groupes Anosov. Kapovich et Leeb [KLa] montrent que les compactifications obtenues ont une structure naturelle de variétés à coins. Réciproquement, ils établissent une caractérisation à l'aide de ces compactifications : un sous-groupe Γ de $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$ est Anosov si et seulement si Γ est uniformément régulier (c'est-à-dire les éléments de Γ assez grands sont ϵ-réguliers) et si le quotient $\Gamma\backslash X_n$ admet une compactification finslérienne et « respectant les fibrations naturelles à l'infini ».

Il est également possible d'utiliser les structures géométriques mentionnées plus haut pour obtenir des compactifications de quotients $\Gamma\backslash G/H$ plus généraux. Centrons le reste de ce paragraphe sur les quotients $\Gamma\backslash \left(G \times G\right)/\Delta(G)$ où Γ est un sous-groupe de $G \times G$ et $\Delta(G)$ est le sous-groupe diagonal de $G \times G$. L'étude de ces quotients a une longue histoire que nous n'évoquons pas ici. L'article [GGKW17b] montre que ces doubles quotients ont des compactifications naturelles lorsque Γ est Anosov dans un sur-groupe G' de $G \times G$ (G' est explicite, il est simple si G est simple). Il y a des réciproques quand G est de rang réel égal à 1 : si Γ est un sous-groupe de $G \times G$ agissant proprement et avec quotient compact sur $(G \times G)/\Delta(G)$, alors le groupe Γ est un sous-groupe Anosov dans G' d'un groupe de Lie simple G' contenant $G \times G$ (voir [GGKW17a] qui donne un énoncé plus général).

Un autre aspect est la compactification de l'espace des modules des représentations Anosov, et donc de comprendre les dégénérescences de suites de représentations Anosov. Les travaux généraux de Parreau [Par12] construisent des compactifications de l'espace des modules de toutes les représentations par des actions sur les immeubles euclidiens. Dans [BP17], Burger et Pozzetti analysent quels sont les immeubles intervenant dans la compactification de l'espace des modules des représentations maximales dans $\mathbf{Sp}_{2m}(\mathbf{R})$ et détaillent les structures particulières des actions obtenues. L'article [Mer] donne quels groupes Γ admettent des suites « fortement » dégénérées d'actions Anosov.

L'action du groupe des automorphismes extérieurs $\mathrm{Out}(\Gamma)$ sur l'espace des modules des représentations Anosov est propre [Lab08, Wie06]. Dans [CLS17], Canary, Lee et Stover introduisent une notion de représentation « Anosov amalgamés » et démontrent la propreté de l'action de $\mathrm{Out}(\Gamma)$ sur leur espace de modules quand le groupe Γ a un bout. Ils montrent également que, pour une infinité de groupes Γ, l'espace des représentations Anosov amalgamées, qui contient toujours l'espace des représentations Anosov, ne coïncide pas avec ce dernier.

7.4. Le retour des sous-groupes convexes-compacts

Les travaux récents de Danciger, Guéritaud et Kassel [DGKa, DGKb] rétablissent de plein droit la convexe-cocompacité dans l'étude des représentations Anosov. L'un de leurs résultats est le théorème suivant : un sous-groupe Γ de $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$ est Anosov et laisse stable un convexe propre de l'espace projectif $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{R})$ si et seulement si Γ agit de manière convexe-cocompacte sur un ouvert convexe $\Omega \subset \mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{R})$ strictement convexe et à bord C^1 (i.e. il existe $C \subset \Omega$ fermé, convexe, Γ-invariant, sur lequel Γ agit proprement avec quotient compact). Zimmer [Zim] démontre un résultat analogue pour une notion légèrement différente de convexe cocompacité, et en déduit des énoncés de rigidité. En fait des hypothèses plus faibles sur Ω impliquent déjà que Γ est Anosov. Si ce résultat ne peut s'appliquer aux sous-groupes de $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$ ne stabilisant aucun convexe de l'espace projectif, on en tire tout de même le résultat inconditionnel suivant : un sous-groupe Γ de $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$ est Anosov si et seulement si l'action de Γ par transconjugaison sur l'espace $\mathbf{S}_n(\mathbf{R})$ des matrices symétriques est convexe-cocompacte : il existe $\Omega \subset \mathbb{P}(\mathbf{S}_n(\mathbf{R}))$, un ouvert convexe, Γ-invariant, strictement convexe et à bord C^1, sur lequel l'action de Γ est convexe-cocompacte.

RÉFÉRENCES

[ABY10] A. Avila, J. Bochi & J.-C. Yoccoz – « Uniformly hyperbolic finite-valued $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-cocycles », *Comment. Math. Helv.* **85** (2010), no. 4, p. 813–884.

[Alb99] P. Albuquerque – « Patterson-Sullivan theory in higher rank symmetric spaces », *Geom. Funct. Anal.* **9** (1999), no. 1, p. 1–28.

[Bar10] T. Barbot – « Three-dimensional Anosov flag manifolds », *Geom. Topol.* **14** (2010), no. 1, p. 153–191.

[Bar15] ———, « Deformations of Fuchsian AdS representations are quasi-Fuchsian », *J. Differential Geom.* **101** (2015), no. 1, p. 1–46.

[BCLS15] M. Bridgeman, R. Canary, F. Labourie & A. Sambarino – « The pressure metric for Anosov representations », *Geom. Funct. Anal.* **25** (2015), no. 4, p. 1089–1179.

[Ben97] Y. Benoist – « Propriétés asymptotiques des groupes linéaires », *Geom. Funct. Anal.* **7** (1997), p. 1–47.

[Ben04] ———, « Convexes divisibles. I », in *Algebraic groups and arithmetic*, Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2004, p. 339–374.

[Ber70] L. Bers – « On boundaries of Teichmüller spaces and on Kleinian groups. I », *Ann. of Math. (2)* **91** (1970), p. 570–600.

[BG09] J. Bochi & N. Gourmelon – « Some characterizations of domination », *Math. Z.* **263** (2009), no. 1, p. 221–231.

[BILW05] M. Burger, A. Iozzi, F. Labourie & A. Wienhard – « Maximal representations of surface groups : Symplectic Anosov structures », *Pure Appl. Math. Q.* **1** (2005), no. 3, Special Issue : In memory of Armand Borel. Part 2, p. 543–590.

[BIW10] M. Burger, A. Iozzi & A. Wienhard – « Surface group representations with maximal Toledo invariant », *Ann. of Math. (2)* **172** (2010), no. 1, p. 517–566.

[BM12] T. Barbot & Q. Mérigot – « Anosov AdS representations are quasi-Fuchsian », *Groups Geom. Dyn.* **6** (2012), no. 3, p. 441–483.

[Bow73] R. Bowen – « Symbolic dynamics for hyperbolic flows », *Amer. J. Math.* **95** (1973), p. 429–460.

[Bow79] ———, « Hausdorff dimension of quasicircles », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1979), no. 50, p. 11–25.

[Bow98] B. H. Bowditch – « A topological characterisation of hyperbolic groups », *J. Amer. Math. Soc.* **11** (1998), no. 3, p. 643–667.

[BP17] M. Burger & B. Pozzetti – « Maximal representations, non Archimedean Siegel spaces, and buildings », *Geom. Topol.* **21** (2017), p. 3539–3599.

[BPS] J. Bochi, R. Potrie & A. Sambarino – « Anosov representations and dominated splittings », *J. Eur. Math. Soc.*, à paraître.

[Bri10] M. Bridgeman – « Hausdorff dimension and the Weil-Petersson extension to quasifuchsian space », *Geom. Topol.* **14** (2010), no. 2, p. 799–831.

[CLS17] R. D. Canary, M. Lee & M. Stover – « Amalgam Anosov representations », *Geom. Topol.* **21** (2017), no. 1, p. 215–251, With an appendix by Canary, Lee, Andrés Sambarino and Stover.

[CTT] B. Collier, N. Tholozan & J. Toulisse – « The geometry of maximal representations of surface groups into $\mathrm{SO}(2,n)$ », preprint, arXiv:1702 :09799.

[DGKa] J. Danciger, F. Guéritaud & F. Kassel – « Convex cocompactness in pseudo-Riemannian hyperbolic spaces », *Geom. Dedicata*, volume en l'honneur de Bill Goldman, à paraître.

[DGKb] ———, « Convex cocompact actions in real projective geometry », preprint, arXiv:1704.08711.

[FG06] V. Fock & A. Goncharov – « Moduli spaces of local systems and higher Teichmüller theory », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (2006), no. 103, p. 1–211.

[GGKW17a] F. Guéritaud, O. Guichard, F. Kassel & A. Wienhard – « Anosov representations and proper actions », *Geom. Topol.* **21** (2017), p. 485–584.

[GGKW17b] ———, « Compactification of certain Clifford–Klein forms of reductive homogeneous spaces », *Michigan Math. J.* **66** (2017), no. 1, p. 49–84.

[GKW] O. Guichard, F. Kassel & A. Wienhard – « Tameness of Riemannian locally symmetric spaces arising from Anosov representations », preprint, arXiv:1508.04759.

[Gro93] M. Gromov – « Asymptotic invariants of infinite groups », in *Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 182, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993, p. 1–295.

[GW12] O. Guichard & A. Wienhard – « Anosov representations : domains of discontinuity and applications », *Invent. Math.* **190** (2012), no. 2, p. 357–438.

[Hit92] N. J. Hitchin – « Lie groups and Teichmüller space », *Topology* **31** (1992), no. 3, p. 449–473.

[Kap07] M. Kapovich – « Convex projective structures on Gromov-Thurston manifolds », *Geom. Topol.* **11** (2007), p. 1777–1830.

[KLa] M. Kapovich & B. Leeb – « Finsler bordifications of symmetric and certain locally symmetric spaces », preprint, arXiv:1505.03593.

[KLb] ———, « Discrete isometry groups of symmetric spaces », in *Handbook of group actions. Vol. IV* (L. Ji, A. Papadopoulos & S.-T. Yau, éds.), Adv. Lect. Math. (ALM), Int. Press, Somerville, MA, à paraître.

[KL97] B. Kleiner & B. Leeb – « Rigidity of quasi-isometries for symmetric spaces and Euclidean buildings », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1997), no. 86, p. 115–197 (1998).

[KL06] ———, « Rigidity of invariant convex sets in symmetric spaces », *Invent. Math.* **163** (2006), no. 3, p. 657–676.

[KLPa] M. Kapovich, B. Leeb & J. Porti – « Morse actions of discrete groups on symmetric spaces », preprint, arXiv:1403.7671.

[KLPb] ———, « A Morse Lemma for quasigeodesics in symmetric spaces and euclidean buildings », preprint, arXiv:1411.4176.

[KLPc] ———, « Lectures on Anosov representations I : Dynamical and geometric characterizations », preprint, 2016.

[KLPd] ———, « Anosov subgroups : Dynamical and geometric characterizations », *Eur. J. Math.*, à paraître.

[KLP16] ———, « Some recent results on Anosov representations », *Transform. Groups* **21** (2016), no. 4, p. 1105–1121.

[KLP18] ———, « Dynamics on flag manifolds : domains of proper discontinuity and cocompactness », *Geom. Topol.* **22** (2018), no. 1, p. 157–234.

[Kos68] J.-L. Koszul – « Déformations de connexions localement plates », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **18** (1968), no. fasc. 1, p. 103–114.

[Lab06] F. Labourie – « Anosov flows, surface groups and curves in projective space », *Invent. Math.* **165** (2006), no. 1, p. 51–114.

[Lab08] ———, « Cross ratios, Anosov representations and the energy functional on Teichmüller space », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **41** (2008), no. 3, p. 437–469.

[LM] G.-S. Lee & L. Marquis – « Anti-de Sitter strictly GHC-regular groups which are not lattices », preprint, arXiv:1708.02101.

[Lus94] G. Lusztig – « Total positivity in reductive groups », in *Lie theory and geometry*, Progr. Math., vol. 123, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1994, p. 531–568.

[McM08] C. T. McMullen – « Thermodynamics, dimension and the Weil-Petersson metric », *Invent. Math.* **173** (2008), no. 2, p. 365–425.

[Mer] L. Merlin – « A note on degenerations of Morse actions », preprint, arXiv:1612.09332.

[Par12] A. Parreau – « Compactification d'espaces de représentations de groupes de type fini », *Math. Z.* **272** (2012), no. 1-2, p. 51–86.

[PP90] W. Parry & M. Pollicott – « Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics », *Astérisque* (1990), no. 187-188, p. 268.

[PS17] R. Potrie & A. Sambarino – « Eigenvalues and entropy of a Hitchin representation », *Invent. Math.* **209** (2017), no. 3, p. 885–925.

[Qui05] J.-F. Quint – « Groupes convexes cocompacts en rang supérieur », *Geom. Dedicata* **113** (2005), p. 1–19.

[Rue78] D. Ruelle – *Thermodynamic formalism*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 5, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1978, The mathematical structures of classical equilibrium statistical mechanics, With a foreword by Giovanni Gallavotti and Gian-Carlo Rota.

[vdDW84] L. van den Dries & A. J. Wilkie – « Gromov's theorem on groups of polynomial growth and elementary logic », *J. Algebra* **89** (1984), no. 2, p. 349–374.

[Wie06] A. Wienhard – « The action of the mapping class group on maximal representations », *Geom. Dedicata* **120** (2006), p. 179–191.

[Zim] A. Zimmer – « Projective Anosov representations, convex cocompact actions, and rigidity », preprint, arXiv:1704.08582.

Olivier GUICHARD

Université de Strasbourg, CNRS, IRMA UMR 7501
F-67000, Strasbourg, France
E-mail : `olivier.guichard@math.unistra.fr`