Séminaire BOURBAKI Juin 2017
69ème année, 2016-2017, n$^{\text{o}}$ 1135

SOLUTIONS FAIBLES DE L'ÉQUATION DE NAVIER-STOKES DES FLUIDES COMPRESSIBLES [d'après A. Vasseur et C. Yu]

par **Frédéric ROUSSET**

INTRODUCTION

Dans cet exposé, on considère un système classique d'équations aux dérivées partielles décrivant le mouvement d'un fluide visqueux. On notera $\rho(t,x) \geq 0$, la densité du fluide, $u(t,x) \in \mathbb{R}^d$ le champ de vitesse du fluide, et $p(t,x) \in \mathbb{R}$ la pression, t désigne la variable de temps et x la variable d'espace. Dans tout l'exposé on supposera que $x \in \Omega = \mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$, $d = 2, 3$, ce qui peut s'interpréter comme des conditions aux limites périodiques. La plupart des résultats sont aussi valables si on suppose que le fluide emplit tout l'espace, c'est-à-dire $x \in \mathbb{R}^d$. On obtient le système

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla p = \nabla \cdot \tau, \end{cases} \tag{1}$$

où la matrice τ est définie de telle sorte que $\sigma = \tau - p\, Id_{\mathbb{R}^d}$ est le tenseur des contraintes :

$$\sigma = 2\mu Du + (\lambda \nabla \cdot u - p) Id_{\mathbb{R}^n}, \quad Du = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^\top).$$

On supposera que l'évolution du fluide se fait à température constante. La première équation du système exprime la conservation de la masse, la deuxième, l'évolution de la quantité de mouvement.

Si l'on suppose de plus que la densité ρ est constante, le système se réduit au système de Navier-Stokes pour les fluides incompressibles (homogènes)

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla p = \mu \Delta u, \quad \nabla \cdot u = 0. \tag{2}$$

Notons que l'incompressibilité se traduit par le fait que le champ de vitesse est à divergence nulle, il n'y a pas d'équation d'évolution sur la pression p, elle est déterminée indirectement par la contrainte. On suppose le fluide visqueux, donc $\mu > 0$. On va s'intéresser au problème de Cauchy, c'est-à-dire à l'existence d'une solution au système lorsqu'on ajoute une condition initiale qui se réduit à $u_{/t=0} = u_0$. Il y a classiquement deux manières d'aborder le problème. L'une se base sur l'identité d'énergie associée à ce système : en prenant le produit scalaire de (2) par u et en intégrant en espace, on remarque formellement (c'est-à-dire en supposant que la solution est suffisamment régulière pour que toutes les manipulations soient licites) que

$$\int_\Omega (u\cdot\nabla u)\cdot u\,dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega |u|^2\nabla\cdot u\,dx = 0, \quad \int_\Omega \nabla p\cdot u = -\int_\Omega p\,\nabla\cdot u\,dx = 0$$

et donc on obtient l'identité d'énergie

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_\Omega |u|^2 dx + \mu\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = 0.$$

En intégrant en temps on obtient un contrôle de u dans $L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))\cap L^2(\mathbb{R}_+, H^1(\Omega))$. On est alors naturellement amené à essayer de construire une solution faible, c'est-à-dire vérifiant (2) au sens des distributions dans cet espace. Pour l'équation de Navier-Stokes incompressible, c'est le fameux résultat de Leray [24] :

Théorème 0.1 (Leray). — *Pour tout* $u_0 \in L^2(\Omega)$*, tel que* $\nabla\cdot u_0 = 0$*, il existe une solution faible* $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))\cap L^2(\mathbb{R}_+, H^1(\Omega))$ *et vérifiant pour presque tout* $T > 0$ *l'inégalité d'énergie :*

$$\|u(T)\|_{L^2}^2 + 2\mu\int_0^T \|\nabla u(s)\|_{L^2}^2\,ds \le \|u_0\|_{L^2}^2.$$

Une fois ce type de résultat obtenu, les questions importantes restant à résoudre sont l'unicité (le théorème ci-dessus est un résultat d'existence sans unicité), et la régularité (si la donnée initiale est plus régulière, peut-on avoir une solution qui garde cette régularité supplémentaire pour tout temps [11] ?).

L'autre approche classique du problème de Cauchy consiste à utiliser l'invariance par changement d'échelle de l'équation : si $u(t,x)$ est solution de (2) alors $u_\lambda(t,x) = \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x)$ est solution de la même équation. Cette approche initiée par Kato consiste à chercher des solutions « fortes », vérifiant la formule de Duhamel (en supposant $\mu = 1$ pour simplifier l'écriture)

$$u(t) = e^{t\Delta}u_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\nabla\cdot(u\otimes u)(s)\,ds,$$

où $\mathbb{P}$ est la projection orthogonale sur les champs à divergence nulle, dans des espaces critiques c'est-à-dire ceux qui sont invariants par le changement d'échelle de l'équation (c'est-à-dire un espace X pour lequel $\|(u_0)_\lambda\|_X = \|u_0\|_X$). Cette approche permet de montrer que le problème est globalement bien posé (c'est-à-dire existence, unicité, et dependance continue par rapport aux données dans des espaces $X_T \subset \mathcal{C}([0,T], X)$) pour des données initiales petites. Toutefois, cette approche ne fournit qu'une existence locale pour des données quelconques. Notons qu'en dimension deux, L^2 est un espace critique de telle sorte que l'approche de Leray et celle de Kato coïncident. En dimension trois il existe toute une échelle d'espaces pour lesquels ce programme a été réalisé, $\dot{H}^{\frac{1}{2}} \subset L^3 \cdots \subset BMO^{-1}$ [15, 20, 22] ; on renvoie par exemple à [23]. Notons que dans cette échelle d'espaces critiques une fonction peut être grande dans l'un et petite dans un autre.

On va maintenant s'intéresser à (1) dans le cas des fluides compressibles, on ne suppose donc plus que ρ est constante mais pour fermer le système on suppose que le fluide est barotrope, la pression p est une fonction de la densité, on considérera uniquement le cas des fluides polytropiques $p(\rho) = a\rho^\gamma$ où a est une constante strictement positive et $\gamma > 1$. Les coefficients de Lamé μ et λ peuvent dépendre de ρ. Il y a naturellement une estimation d'énergie pour le système (1) qui s'écrit

$$\frac{d}{dt}E(t) + \int_\Omega \left(2\mu|Du|^2 + \lambda|\nabla\cdot u|^2\right)\, dx = 0, \quad E(t) = \int_\Omega \left(\rho\frac{|u|^2}{2} + a\frac{\rho^\gamma}{\gamma-1}\right) dx. \tag{3}$$

Il y aussi une invariance d'échelle, si (ρ, u) est solution, $(\rho_\lambda, u_\lambda)$ avec $\rho_\lambda(t,x) = \rho(\lambda^2 t, \lambda x)$, $u_\lambda(t,x) = \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x)$ est encore solution si on change p en $\lambda^2 p$. On peut donc naturellement se poser la question de l'existence globale de solution faible vérifiant l'inégalité d'énergie et de l'existence de solutions fortes. Dans le cas des fluides compressibles une nouvelle difficulté apparaît, liée à la présence potentielle de vide, c'est-à-dire de zones dans le fluide pour lesquelles la densité ρ s'annule. Il existe de très nombreux travaux établissant l'existence de solutions fortes globales sans vide dans des espaces critiques pour des données initiales qui sont des perturbations d'équilibres du type $(\rho = 1, u = 0)$, on peut par exemple citer [12]. En dimension deux d'espace, il y a des résultats d'existence globale non perturbatifs de solutions fortes sans vide pour des choix particuliers des coefficients λ et μ, $\lambda(\rho) = \rho^\beta$, $\beta > 3$ et $\mu(\rho) = 1$, [21]. Pour un panorama des divers types de notions de solutions pour les équations de Navier-Stokes des fluides compressibles, on renvoie par exemple à [1].

Dans cet exposé, on va se concentrer sur des résultats récents d'existence de solutions faibles dans un cadre qui autorise la présence ou la formation de vide. Dans la suite de l'exposé, une solution faible désignera toujours une solution globale faible.

1. CAS DES VISCOSITÉS CONSTANTES

Nous allons d'abord rapidement rappeler le résultat d'existence de solutions faibles dû à P.-L. Lions [25] et amélioré par E. Feireisl et collaborateurs [13] ; ce résultat est valable dans le cadre où les coefficients μ et λ sont des constantes (donc sont indépendants de ρ) et vérifient $\mu > 0$, $\lambda + 2\mu > 0$.

Comme on autorise la densité à s'annuler, on écrit la condition initiale sous la forme

$$\rho_{/t=0} = \rho_0, \quad (\rho u)_{/t=0} = m_0 \tag{4}$$

où m_0 est telle que $m_0 = 0$ sur $\{\rho_0 = 0\}$. Dans ce cadre, on appelle solution faible renormalisée (ρ, u), une solution de (1) au sens des distributions telle que la densitéé est une solution renormalisée de l'équation de conservation de la masse. Cela signifie que pour toute fonction $\beta \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$ (avec des conditions de croissance à l'infini), $\beta(\rho)$ vérifie aussi au sens des distributions

$$\partial_t \beta + \nabla\cdot(u\beta) + (\rho\beta' - \beta)\nabla\cdot u = 0.$$

On a par exemple le résultat suivant :

Théorème 1.1 (P.-L. Lions). — *Si* $\rho_0 \in L^\gamma$, $m_0/\rho_0 \in L^1$ *et* $\gamma > 3d/(d+2)$, *il existe une solution faible renormalisée de* (1), (4), *vérifiant l'inégalité d'énergie :*

$$E(T) + \int_0^T \int_\Omega \left(2\mu|Du|^2 + \lambda|\nabla\cdot u|^2\right)\,dx, \quad \leq E_0, \quad p.p.\ T, \tag{5}$$

avec $E(t) = \int_\Omega (\rho\frac{|u|^2}{2} + \frac{a\rho^\gamma}{\gamma-1})\,dx$.

Le résultat ci-dessus a été généralisé à $\gamma > d/2$ par E. Feireisl [13]. En dimension 2, il a été établi pour $\gamma = 1$ dans [27].

Notons que pour μ et λ constants, le terme de dissipation d'énergie se met aussi sous la forme

$$\int_\Omega \left(2\mu|Du|^2 + \lambda|\nabla\cdot u|^2\right)\,dx = \int_\Omega \left(\mu|\nabla u|^2 + (\lambda+\mu)|\nabla\cdot u|^2\right)\,dx.$$

Pour montrer l'existence d'une solution faible, on suit classiquement le plan suivant :

1. Établir des estimations a priori sur des solutions assez régulières du système (on a déjà l'estimation d'énergie).
2. Approcher le système par une suite de systèmes meilleurs (c'est-à-dire pour lesquels on sait déjà montrer l'existence d'une solution globale) et de telle sorte que les estimations a priori sont valides uniformément. Cela génère une suite de solutions approchées (ρ_n, u_n).
3. À extraction de sous-suite près, montrer par des arguments de compacité à l'aide des estimations a priori uniformes que (ρ_n, u_n) converge vers une solution faible (ρ, u) du système de départ.

Dans l'optique de réaliser le programme ci-dessus, en particulier le point 3, il est naturel de se poser la question de la stabilité des solutions faibles : si on considère (ρ_n, u_n) une suite de solutions faibles vérifiant uniformément les estimations a priori, peut-on montrer que (à sous-suite près) (ρ_n, u_n) converge vers une solution faible (ρ, u) ? Cela permet de se focaliser sur le problème de la compacité dans le système indépendamment du problème de la régularisation du système.

Nous allons maintenant rapidement étudier la stabilité des solutions faibles dans le cadre ci-dessus. De manière classique, la difficulté est de passer à la limite dans les termes non linéaires, les convergences faibles qui se déduisent immédiatement des estimations a priori n'étant en général pas suffisantes pour le faire.

L'estimation d'énergie assure que (ρ_n) est bornée dans $L^\infty_T L^\gamma$ et $(\rho_n^{\frac{1}{2}} u_n)$ dans $L^\infty_T L^2$. De plus u_n est bornée dans $L^2_T H^1$. Dans toute la suite, on utilise la notation $L^p_T X$ pour $L^p([0,T], X)$, avec X espace de Banach. Il est relativement facile de passer à la limite dans le système dans les termes du type $\rho_n u_n$ et $\rho_n u_n \otimes u_n$, le point clé étant la borne $L^2_T H^1$ sur u_n. Admettons la convergence du premier pour nous concentrer sur le deuxième. On peut d'abord montrer que $\rho_n^{\frac{1}{2}} u_n$ converge fortement dans $L^2_T L^2$. Pour cela, on remarque que

$$\int_0^T \int_\Omega \rho_n |u_n|^2 \, dt dx = \langle \rho_n u_n, u_n \rangle_{L^2_T H^{-1}, L^2_T H^1}. \tag{6}$$

Comme u_n converge faiblement dans $L^2_T H^1$, il suffit de montrer que $\rho_n u_n$ converge fortement dans $L^2_T H^{-1}$ pour passer à la limite. On observe par Hölder que $\rho_n u_n$ est bornée dans $L^\infty_T L^{\frac{2\gamma}{\gamma+2}}$ et par l'équation sur la quantité de mouvement dans (1), on obtient que $\partial_t(\rho_n u_n)$ est bornée dans $L^2_T H^{-s}$ pour s suffisamment grand. En utilisant que $\gamma > d/2$ et le Lemme de compacité d'Aubin-Lions, on conclut à la convergence forte de $\rho_n u_n$ dans $L^2_T H^{-1}$ et donc on obtient que

$$\int_0^T \int_\Omega \rho_n |u_n|^2 \, dt dx \to \int_0^T \int_\Omega \rho |u|^2 \, dt dx$$

puis que $\rho_n u_n$ converge fortement dans $L^2_T L^2$. Ceci étant établi, on passe facilement à la limite dans le terme $\rho_n u_n \otimes u_n$ en utilisant que $\rho_n u_n$ converge fortement vers ρu dans $L^2_T L^2$ et que u_n converge faiblement vers u dans $L^2_T L^2$.

La difficulté la plus sérieuse est en fait pour passer à la limite dans la pression, c'est-à-dire dans le terme $a\rho_n^\gamma$ puisque les estimations a priori ne donnent aucune compacité forte sur ρ_n. La preuve assez longue utilise plusieurs idées importantes :

— intégrabilité supplémentaire pour la densité : $\rho_n^{\gamma+\theta}$ est bornée dans $L^1_T L^1$ pour un $\theta > 0$. Cela s'obtient par une estimation d'énergie avec un multiplicateur bien choisi,

— compacité pour le flux effectif : le flux effectif $a\rho_n^\gamma - (2\mu + \lambda)\nabla \cdot u_n$ possède une propriété de compacité. Cela permet de déduire que

$$\overline{\rho \nabla \cdot u} - \rho \nabla \cdot u = \frac{1}{2\mu + \lambda}(a\overline{\rho^\gamma}\, \rho - \overline{\rho^\gamma \rho})$$

où $\overline{\cdot}$ désigne la limite faible.

— propagation de la compacité pour la densité : en utilisant la propriété de renormalisation pour la densité, on écrit

$$\partial_t \left(\overline{\rho \log \rho} - \rho \log \rho \right) + \nabla \cdot \left((\overline{\rho \log \rho} - \rho \log \rho) u \right) = \frac{1}{2\mu + \lambda}(a\overline{\rho^\gamma}\rho - a\overline{\rho^\gamma \rho}) \leq 0$$

grâce à la monotonie de la pression. Cela permet d'obtenir de la compacité forte L^1 pour la densité.

La construction d'une solution approchée peut se faire de manière classique en ajoutant une viscosité artificielle dans l'équation sur la densité.

2. VISCOSITÉ DÉPENDANT DE LA DENSITÉ, NOUVELLES PROPRIÉTÉS

Dans le paragraphe précédent, la démonstration utilise de manière cruciale que l'on a supposé les coefficients de viscosité λ et μ indépendants de la densité. Cette hypothèse n'est pas très satisfaisante pour plusieurs raisons. Lorsque la densité tend vers zéro, on n'attend pas que le modèle des équations de Navier-Stokes compressible soit encore valable, d'autres modèles de gaz raréfiés doivent être utilisés. Cependant, si on fait tendre la densité vers zéro dans (1) lorsque les coefficients μ et λ ne dépendent pas de la densité, on trouve formellement le système elliptique

$$2\mu\nabla \cdot (Du) + \lambda\nabla\nabla \cdot u = 0$$

qui ne semble avoir aucune signification physique. Le fait de prendre des coefficients λ et μ dépendant de ρ et s'annulant lorsque ρ tend vers zéro permet de supprimer cette anomalie. Des problèmes de continuité des solutions par rapport aux données initiales surviennent également dans le cas de viscosités supposées constantes [18].

Il semble donc particulièrement pertinent de prendre en compte des coefficients λ et μ dépendant de ρ et s'annulant lorsque $\rho = 0$. L'inégalité d'énergie (3) est toujours valable dans ce cadre, mais le terme de dissipation d'énergie dégénère lorsque ρ tend vers zéro. En particulier, on ne dispose plus d'une borne $L^2_T H^1$ sur u que l'on a précédemment utilisée de manière cruciale.

Dans la suite de l'exposé, on va se concentrer sur le cas particulier où :

$$\mu(\rho) = \frac{\rho}{2}, \quad \lambda(\rho) = 0 \; ; \tag{7}$$

on va donc considérer le système

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + a\nabla\rho^\gamma = \nabla \cdot (\rho D u). \end{cases} \tag{8}$$

Certaines des propriétés qui suivent sont valables dans un cadre plus général, on y reviendra à la fin de l'exposé. Lorsque $d = 2$, le système (8) avec la relation (7) a une signification physique pour décrire des écoulements tri-dimensionnels en eaux peu profondes ([16], on renvoie aussi à [9] pour l'obtention rigoureuse d'un système proche). Dans ce cadre, u est une vitesse horizontale moyennée sur la verticale et ρ est une hauteur d'eau.

Une observation cruciale pour l'analyse de ces systèmes a été faite par Bresch et Desjardins [2] :

Lemme 2.1. — *Pour une solution suffisamment régulière de* (8), *on a l'estimation suivante*

$$(9)\quad \mathcal{E}(T)+\frac{4a}{\gamma}\int_0^T\int_\Omega|\nabla\rho^{\frac{\gamma}{2}}|^2\,dxdt+\int_0^T\int_\Omega\rho|Au|^2\,dxdt \\ \leq\int_\Omega\left(\rho_0|u_0|^2+|\nabla\rho_0^{\frac{1}{2}}|^2+a\frac{\rho_0^\gamma}{\gamma-1}\right)dx,$$

où

$$\mathcal{E}(t)=\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\rho|u+\nabla\log\rho|^2+a\frac{\rho^\gamma}{\gamma-1}\right)dx,\quad Au=\frac{1}{2}(\nabla u-\nabla u^\top).$$

Il est maintenant traditionnel d'appeler la quantité $\mathcal{E}$ BD-entropie, nous ferons cela dans la suite.

Démonstration. — L'idée est d'utiliser une estimation d'énergie à peu près analogue à celle menant à (3), mais en utilisant une vitesse effective $v=u+\nabla\log\rho$. En utilisant une convention de sommation sur les indices répétés, la conservation de la masse s'écrit

$$(10)\qquad \partial_t\rho+\partial_j(\rho u^j)=0,$$

on trouve donc

$$\rho(\partial_t+u^i\partial_i)\partial_j\log\rho=-\rho\partial_j\partial_iu^i-\partial_ju_i\partial_i\rho.$$

Remarquons aussi que l'équation sur la vitesse se met sous la forme

$$(11)\qquad \rho(\partial_t+u^i\partial_i)u^j+a\partial_j\rho^\gamma=\frac{1}{2}\partial_i(\rho(\partial_iu^j+\partial_ju^i))=\partial_i(\rho A^{ij})+\partial_ju_i\partial_i\rho+\rho\partial_j\partial_iu^i$$

avec $A^{ij}=\frac{1}{2}(\partial_iu^j-\partial_ju^i)$. En additionnant (10) et (11), cela donne pour le vecteur $v^j=u^j+\partial_j\log\rho$ l'équation

$$\rho(\partial_t+u^i\partial_i)v^j+a\partial_j\rho^\gamma=\partial_i(\rho A^{ij})$$

et donc

$$\rho(\partial_t+u^i\partial_i)\frac{|v|^2}{2}+a\partial_j\rho^\gamma v^j=\partial_i(\rho A^{ij})v^j$$

qui, en utilisant la conservation de la masse, se met sous la forme

$$\partial_t(\rho\frac{|v|^2}{2})+\partial_i(\rho\frac{|v|^2}{2}u^i)+a\partial_j\rho^\gamma v^j=\partial_i(\rho A^{ij})v^j.$$

Cela permet de combiner cette équation avec la conservation de la masse pour avoir

$$\partial_t\left(\rho\frac{|v|^2}{2}+a\frac{\rho^\gamma}{\gamma-1})\right)+\partial_i\left(\left(\rho\frac{|v|^2}{2}+a\frac{\rho^\gamma}{\gamma-1}\right)u^i\right)+a\partial_j(\rho^\gamma v^j) \\ =\partial_i(\rho A^{ij})v^j+a\rho^\gamma\Delta\log\rho.$$

En intégrant en espace et en temps, on trouve alors (9).

□

Remarquons que l'identité assure un contrôle $L^2_T H^1$ de $\rho^{\frac{\gamma}{2}}$ et donc fournit facilement de la compacité forte pour la densité.

Une deuxième estimation a priori importante a été observée par Mellet et Vasseur [26] :

Lemme 2.2. — *Supposons que $\gamma > 1$ en dimension deux et $1 < \gamma < 3$ en dimension trois. Pour une solution suffisamment régulière de (8), que l'on suppose satisfaire l'estimation d'énergie et l'estimation de BD-entropie, on a de plus l'estimation suivante : il existe $C = C(T, E_0, \mathcal{E}_0, \int_\Omega \rho_0)$ telle que pour tout $T > 0$:*

(12)
$$\mathbb{E}(T) \le \mathbb{E}_0 + C(T, E_0, \mathcal{E}_0, \int_\Omega \rho_0) \quad \forall T \ge 0, \quad \mathbb{E}(T) = \int_\Omega \rho |u|^2 \log(1 + |u|^2)(T, x)\, dx.$$

Démonstration. — Notons $\phi(s) = (1 + s)\log(1 + s)$. On trouve d'abord facilement en combinant les deux équations :

$$\partial_t(\rho \frac{\phi(|u|^2)}{2}) + \nabla \cdot (\rho \frac{\phi(|u|^2)}{2} u) = (1 + \log(1 + |u|^2))\,(-a\nabla\rho^\gamma \cdot u + (\nabla \cdot (\rho D u)) \cdot u)\,.$$

En intégrant en temps et en espace, on trouve après intégration par parties que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \rho \frac{\phi(|u|^2)}{2}(T)\, dx + \int_0^T \int_\Omega \rho(1 + \log(1 + |u|^2))|Du|^2 \le \mathbb{E}_0 - \int_0^T \int_\Omega (1 + \log(1 + |u|^2))(-a\nabla\rho^\gamma \cdot u) + \int_0^T \int_\Omega \rho |\nabla u|^2. \tag{13}$$

Il reste donc à estimer le membre de droite. Le dernier terme peut être clairement estimé par la dissipation d'énergie et la dissipation de BD-entropie. En effet, la dissipation d'énergie (3) assure que $\rho^{\frac{1}{2}} Du \in L^2_T L^2$, alors que la dissipation de BD-entropie assure que $\rho^{\frac{1}{2}} Au \in L^2_T L^2$; en combinant les deux, on a bien une borne $L^2_T L^2$ sur $\rho^{\frac{1}{2}} \nabla u$. Il reste donc seulement à estimer :

$$I = \left| \int_0^T \int_\Omega (1 + \log(1 + |u|^2))(-a\nabla\rho^\gamma \cdot u) \right|.$$

En intégrant par parties, on trouve

$$I \le \int_0^T \int_\Omega \left(\rho^\gamma |\nabla \cdot u|(1 + \log(1 + |u|^2)) + \rho^\gamma |\nabla u|\right) dx dt\,;$$

cela donne, en utilisant de manière classique l'inégalité de Young ($ab \le \varepsilon a^2/2 + b^2/(2\varepsilon)$), l'estimation

$$I \le \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \rho(1 + \log(1 + |u|^2))|Du|^2 + \int_0^T \int_\Omega \rho|\nabla u|^2 + C\int_0^T \int_\Omega (1 + \log(1 + |u|^2))\rho^{2\gamma - 1}.$$

Dans l'estimation ci-dessus, on voit qu'au membre de droite, le premier terme est absorbable par le terme de dissipation dans (13), le deuxième terme est déjà contrôlé par la dissipation d'énergie dans (3) ; il reste donc uniquement à estimer le dernier terme III. En utilisant l'inégalité de Hölder, on écrit pour $\delta \in]0, 2[$

$$III \leq \int_0^T \left(\int_\Omega (\rho^{2\gamma - \frac{\delta}{2} - 1})^{\frac{2}{2-\delta}} \, dx \right)^{\frac{2-\delta}{2}} \left(\int_\Omega \rho (1 + \log(1 + |u|^2))^{\frac{2}{\delta}} \right)^{\frac{\delta}{2}}. \tag{14}$$

La dissipation d'énergie et la conservation de la masse qui assurent $\rho \in L^\infty_T L^1$ et $\rho |u|^2 \in L^\infty_T L^1$ permettent d'écrire

$$III \leq C(T, \int_\Omega \rho_0, E_0) \int_0^T \left(\int_\Omega (\rho^{2\gamma - \frac{\delta}{2} - 1})^{\frac{2}{2-\delta}} \, dx \right)^{\frac{2-\delta}{2}}.$$

Pour contrôler le membre de droite avec un choix de δ petit, on utilise les estimations supplémentaires provenant de la BD-entropie. Faisons le calcul en dimension trois. D'après (9) et l'injection de Sobolev, on a que $\rho^{\frac{\gamma}{2}} \in L^2_T H^1 \subset L^2_T L^6$, ce qui revient à dire que $\rho^\gamma \in L^1_T L^3$. On sait de plus par l'identité d'énergie que $\rho^\gamma \in L^\infty_T L^1$; en interpolant, on obtient donc

$$\|\rho^\gamma\|_{L^{\frac{5}{3}}([0,T] \times \Omega)} \leq \|\rho^\gamma\|^{\frac{2}{5}}_{L^\infty_T L^1} \|\rho^\gamma\|^{\frac{3}{5}}_{L^1_T L^3} \leq C(T, E_0, \mathcal{E}_0). \tag{15}$$

Si $2\gamma - 1 < \frac{5}{3}\gamma$, on peut alors choisir δ suffisamment petit pour que

$$III \leq C(T, \int_\Omega \rho_0, E_0, \mathcal{E}_0).$$

□

3. STABILITÉ DES SOLUTIONS FAIBLES

Passons maintenant à l'étude de la stabilité des solutions faibles. Au vu du paragraphe précédent il est naturel d'étudier la stabilité des solutions faibles vérifiant l'inégalité d'énergie mais aussi l'estimation de BD-entropie et l'estimation de Mellet Vasseur. En utilisant les résultats du paragraphe précédent, Mellet et Vasseur [26] ont établi la propriété suivante de stabilité des solutions faibles.

THÉORÈME 3.1. — *Considérons* (ρ_n, u_n) *une suite de solutions faibles de* (8) *satisfaisant uniformément les estimations* (3), (9) *et* (12). *Alors on peut extraire une sous-suite telle que la limite est une solution faible de* (8) *vérifiant les estimations* (3), (9) *et* (12).

Un résultat analogue avait été établi par Bresch et Desjardins [3] pour des systèmes modifiés par l'ajout de termes de traînée ou de pression singulière. Par exemple avec l'ajout d'une traînée, le système s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ \partial_t (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + a \nabla \rho^\gamma + r|u|^{1+\delta} u = \nabla \cdot (\rho D u), \end{cases} \tag{16}$$

avec $r > 0$, $\delta > 0$. Ce type de terme est particulièrement pertinent dans le contexte des équations de Saint-Venant [3]. Ce terme est compatible avec les estimations d'énergie et de BD-entropie. De plus on déduit, grâce au terme d'amortissement supplémentaire, que l'estimation d'énergie assure aussi un contrôle de

$$\int_0^T \int_\Omega \rho |u|^{2+\delta}.$$

Ce gain d'intégrabilité pour $\delta > 0$ dans l'estimation d'énergie permet de montrer la stabilité des solutions faibles vérifiant les inégalités d'énergie et de BD-entropie pour ce système sans utiliser l'estimation de Mellet-Vasseur (12).

Démonstration. — La démonstration se découpe en étudiant successivement les convergences de $\rho_n^{\frac{1}{2}}$, ρ_n^γ, $m_n = \rho_n u_n$, $\rho_n^{\frac{1}{2}} u_n$ et les termes de diffusion, ce qui fait donc cinq étapes. Toutes les convergences se font à extraction de sous-suite près, on ne le mentionnera plus. Le gain de compacité sur la densité provenant de l'estimation de BD-entropie permet de traiter assez facilement les trois premières étapes. En effet à travers l'estimation $L^{\frac{5}{3}}$ (15) appliquée à ρ_n, on obtient par exemple que ρ_n est bornée dans $L^{\frac{5}{3}}([0,T] \times \Omega)$. De plus l'estimation de BD-entropie donne que $\rho_n^{\frac{1}{2}} v_n$ avec v_n la vitesse effective $v_n = u_n + \nabla \log \rho_n$ est bornée dans $L_T^\infty L^2$. Ceci combiné à la borne sur l'énergie donne que $\nabla \rho_n^{\frac{1}{2}}$ est bornée dans $L_T^\infty L^2$. En utilisant l'équation et le lemme d'Aubin-Lions, on peut alors obtenir assez facilement que $\rho_n^{\frac{1}{2}}$ converge fortement vers $\rho^{\frac{1}{2}}$ dans $L_T^2 L^2$ et que ρ_n^γ converge fortement vers ρ^γ dans $L_T^1 L^1$. En particulier cela donne que ρ_n converge aussi vers ρ presque partout. De plus en écrivant que $m_n = \rho_n^{\frac{1}{2}} \rho_n^{\frac{1}{2}} u_n$, puisque $\rho_n^{\frac{1}{2}} u_n$ est bornée dans $L_T^\infty L^2$ et $\rho_n^{\frac{1}{2}}$ est bornée dans $L_T^\infty H^1 \subset L_T^\infty L^6$ (en dimension trois), on trouve que m_n est bornée dans $L_T^\infty L^{\frac{3}{2}}$. De l'identité

$$\partial_i m_n = \rho_n^{\frac{1}{2}} \rho_n^{\frac{1}{2}} \partial_i u_n + 2 \rho_n^{\frac{1}{2}} u_n \partial_i \rho_n^{\frac{1}{2}},$$

et en utilisant les bornes uniformes précédentes et les dissipations d'énergie (5) et de BD-entropie (9) qui assurent que $\rho_n^{\frac{1}{2}} |\nabla u_n|$ est bornée dans $L_T^2 L^2$, on déduit que ∇m_n est bornée dans $L_T^1 L^1$. L'équation sur la quantité de mouvement permet enfin de déduire de nouveau du lemme d'Aubin-Lions que m_n converge fortement dans $L_T^2 L^1$, puis presque partout vers m.

On peut alors définir une vitesse limite u par $u = m/\rho$ hors de $\{\rho = 0\}$ et on prend par exemple $u = 0$ en dehors. Une propriété importante encore manquante à ce stade sera d'établir que $m = 0$ sur $\{\rho = 0\}$.

On va maintenant se concentrer sur la démonstration de la convergence forte $L_T^2 L^2$ de $\rho_n^{\frac{1}{2}} u_n$. Cela permet donc d'assurer le passage à la limite dans $\rho_n u_n \otimes u_n$. Dans le cadre viscosité dégénérée, il s'agit de l'étape la plus délicate. Notons que l'argument basé sur l'identité (6) ne donne rien puisque dans ce cadre nous n'avons aucun contrôle sur u_n.

Dans les étapes précédentes, on a déjà établi que ρ_n et m_n convergent presque partout. On observe ensuite que $\frac{m_n}{\rho_n^{\frac{1}{2}}} = \rho_n^{\frac{1}{2}} u_n$ est bornée dans $L^\infty_T L^2$ donc, par le lemme de Fatou,

$$\int_\Omega \liminf \frac{m_n^2}{\rho_n}\, dx < +\infty\,;$$

cela assure que $m = 0$ presque partout sur $\{\rho = 0\}$. Avec la définition précédente de u, on a bien $m = \rho u$, $\rho^{\frac{1}{2}} u = m^{\frac{1}{2}}/\rho \in L^\infty_T L^2$ et u_n tend vers u presque partout sur $\{\rho \neq 0\}$. La borne uniforme sur $\mathbb{E}_n(T)$ et le lemme de Fatou assurent aussi que

$$\begin{aligned}(17) \quad \int_\Omega \rho|u|^2 \log(1+|u|^2)\, dx &= \int_{\rho\neq 0} \rho|u|^2 \log(1+|u|^2)\, dx \\ &= \int_{\rho\neq 0} \liminf \rho_n |u_n|^2 \log(1+|u_n|^2)\, dx \le \liminf \mathbb{E}_n(T) \le C < +\infty.\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant conclure à la convergence forte $L^2_T L^2$ de $\rho_n^{\frac{1}{2}} u_n$. Pour tout $M > 0$ on peut écrire :

$$\begin{aligned}\|\rho_n^{\frac{1}{2}} u_n - \rho^{\frac{1}{2}} u\|_{L^2_T L^2} &\le \|\rho_n^{\frac{1}{2}} u_n \mathbf{1}_{|u_n|\le M} - \rho^{\frac{1}{2}} u \mathbf{1}_{|u|\le M}\|_{L^2_T L^2} \\ &\quad + \|\rho_n^{\frac{1}{2}} u_n \mathbf{1}_{|u_n|\ge M}\|_{L^2_T L^2} + \|\rho^{\frac{1}{2}} u \mathbf{1}_{|u|\ge M}\|_{L^2_T L^2}.\end{aligned}$$

Pour les deux derniers termes ci-dessus, en utilisant la borne uniforme sur $\mathbb{E}_n$ et (17), on obtient pour tout $M > 0$, l'estimation uniforme

$$\|\rho_n^{\frac{1}{2}} u_n \mathbf{1}_{|u_n|\ge M}\|^2_{L^2_T L^2} + \|\rho^{\frac{1}{2}} u \mathbf{1}_{|u|\ge M}\|^2_{L^2_T L^2} \le \frac{1}{\log(1+M^2)} C_T.$$

Pour le premier terme, on utilise que $\rho_n^{\frac{1}{2}} u_n \mathbf{1}_{|u_n|\le M} - \rho^{\frac{1}{2}} u \mathbf{1}_{|u|\le M}$ est clairement bornée dans $L^3([0,T]\times\Omega)$ et que $\rho_n^{\frac{1}{2}} u_n \mathbf{1}_{|u_n|\le M}$ converge vers $\rho^{\frac{1}{2}} u \mathbf{1}_{|u|\le M}$ presque partout. En effet, la convergence sur $\{\rho \neq 0\}$ est claire, alors que la convergence sur $\{\rho = 0\}$ vient de l'estimation

$$|\rho_n^{\frac{1}{2}} u_n \mathbf{1}_{|u_n|\le M}| \le M \rho_n^{\frac{1}{2}} \to 0.$$

Cela est suffisant pour assurer que $\rho_n^{\frac{1}{2}} u_n \mathbf{1}_{|u_n|\le M} - \rho^{\frac{1}{2}} u \mathbf{1}_{|u|\le M}$ converge dans $L^2([0,T]\times\Omega)$.
□

4. CONSTRUCTION DES SOLUTIONS

Le théorème 3.1 de stabilité des solutions faibles utilise de manière cruciale en plus de l'estimation d'énergie, l'estimation de BD-entropie et l'estimation de Mellet-Vasseur. Cela contraint très fortement le type de régularisation que l'on peut utiliser. En effet l'estimation de BD-entropie est très sensible à toute perturbation de l'équation de conservation de la masse, en particulier une régularisation de type viscosité artificielle sur la densité

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = \varepsilon \Delta \rho, \quad \varepsilon > 0$$

détruit l'estimation. En revanche, l'estimation de BD-entropie est naturellement compatible avec une régularisation par ajout de termes capillaires. Bresch et Desjardins ont donc construit dans [4] une solution faible pour le système (16) en utilisant une régularisation

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ \partial_t (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + a \nabla \rho^\gamma + r|u|^{1+\delta} u = \nabla \cdot (\rho D u) + \kappa \rho \nabla \Delta \rho + \varepsilon \rho \nabla \Delta^{2s+1} \rho \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \varepsilon \nabla (p_1(\rho)) - \eta \Delta^2 u. \end{cases}$$

Dans ce système $\kappa \geq 0$, cela permet de construire à la fois une solution pour (8) et pour le système avec un terme de « capillarité » $\kappa \nabla \Delta \rho$. Ce terme est pertinent dans le cadre des équations de Saint-Venant étudié dans [4]. Les petits paramètres ε et η sont strictement positifs et destinés à tendre vers zéro et s est choisi suffisamment grand. Les données initiales sont aussi régularisées et approchées de telle sorte que $\rho_0^\varepsilon \geq \varepsilon > 0$. Le terme de pression supplémentaire $p_1(\rho)$ est choisi du type $p_1(\rho) = -1/\rho^m$ avec m assez grand. Ce terme permet de garantir que, pour le système approché, la densité reste strictement positive. Pour ce système régularisé, l'énergie devient

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 + \frac{\rho^\gamma}{\gamma - 1} + \frac{\kappa}{2} |\nabla \rho|^2 + \frac{\varepsilon}{2} |\nabla \Delta^s \rho|^2 + \frac{\varepsilon}{m+2} \frac{1}{\rho^m} \right) dx$$

et le système est compatible avec l'estimation de BD-entropie.

Lorsque ε et η sont strictement positifs l'existence d'une solution globale régulière est assez classique car on a un système parabolique sur la vitesse. On peut alors faire tendre η vers zéro pour obtenir une solution globale régulière, sans vide d'un système purement capillaire vérifiant une estimation d'énergie et de BD-entropie. On fait ensuite tendre ε vers zéro, et on utilise les arguments du paragraphe précédent pour passer à la limite.

Cette approche utilise de manière cruciale les termes supplémentaires dans le système (16). Le problème resté longtemps ouvert et résolu très récemment par Vasseur et Yu [28] a été la construction de solutions faibles pour le système (8) sans terme supplémentaire. Dans ce cadre, la stabilité des solutions faibles décrite dans le théorème 3.1 utilise de manière cruciale l'estimation de Mellet-Vasseur (12). On est donc conduit à chercher à construire une approximation compatible avec l'estimation (12). Comme on l'a vu précédemment, il est naturel de chercher à régulariser le système en ajoutant des termes de capillarité. Malheureusement l'estimation (12) n'est pas compatible avec de tels termes. Une autre approche serait d'essayer de faire tendre r vers zéro dans (16). Avec cette stratégie il est délicat de travailler directement avec les solutions de (16) déjà construites. En effet, comme ce sont seulement des solutions faibles vérifiant les inégalités d'énergie et de BD-entropie, les manipulations donnant lieu à l'estimation de Mellet-Vasseur (12) semblent très difficiles à justifier. Nous allons décrire au paragraphe suivant la stratégie employée par Vasseur et Yu [28] qui en un sens interpole entre ces deux possibilités.

5. LES RÉSULTATS DE VASSEUR ET YU [28]

La construction de solutions faibles pour (8) part d'une idée proche de celle de Bresch et Desjardins exposée précédemment mais avec une capillarité bien choisie. On considère pour r_0, $r_1 > 0$ et $\kappa > 0$ le système

$$\tag{18} \begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + a\nabla\rho^\gamma + r_0 u + r_1 \rho |u|^2 u = \nabla \cdot (\rho D u) + \kappa \rho \nabla \left(\dfrac{\Delta \rho^{\frac{1}{2}}}{\rho^{\frac{1}{2}}} \right). \end{cases}$$

Le terme de capillarité ajouté $\rho\nabla(\Delta\rho^{\frac{1}{2}}/\rho^{\frac{1}{2}})$ est parfois appelé pression quantique. Rappelons que lorsqu'on néglige la viscosité et les termes d'amortissement, le système appelé parfois Euler quantique

$$\tag{19} \begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + a\nabla\rho^\gamma = \dfrac{1}{2}\rho \nabla \left(\dfrac{\Delta \rho^{\frac{1}{2}}}{\rho^{\frac{1}{2}}} \right) \end{cases}$$

est relié à l'équation de Schrödinger non linéaire par la transformée de Madelung. Considérons $\psi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ solution de l'équation

$$i\partial_t \psi + \frac{1}{2}\Delta\psi - f(|\psi|^2)\psi = 0, \quad f(s) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} s^{\gamma-1}.$$

Alors en écrivant $\psi = \rho^{\frac{1}{2}} e^{i\phi}$ et en posant $u = \nabla\varphi$, on trouve en prenant la partie réelle et la partie imaginaire que (ρ, u) est solution de (19).

Le point de départ de [28] est donc la construction faible pour (18) obtenue dans [29] :

THÉORÈME 5.1 ([29]). — *Pour toute donnée initiale d'énergie et de BD-entropie finies, vérifiant de plus*

$$\tag{20} -r_0 \int_\Omega \log_- \rho_0 dx < +\infty, \quad \log_- = \log Min(\cdot, 1),$$

il existe une solution faible de (18) *vérifiant les estimations d'énergie et de BD-entropie suivantes uniformes par rapport aux paramètres κ, r_0, r_1 : pour presque tout $T > 0$,*

$$\tag{21} \tilde{E}(T) + \int_0^T \int_\Omega \left(\rho |Du|^2 + r_0 |u|^2 + r_1 \rho |u|^4 \right) dx dt \leq \tilde{E}_0,$$

$$\tag{22} \tilde{\mathcal{E}}(T) + \int_0^T \int_\Omega \left(|\nabla \rho^{\frac{\gamma}{2}}|^2 + \rho |Au|^2 + \kappa \rho |\nabla^2 \log \rho|^2 \right) dx dt \leq \tilde{\mathcal{E}}_0 + 2\tilde{E}_0,$$

avec

$$\tilde{E}(T) = \int_\Omega \left(\rho \frac{|u|^2}{2} + a \frac{\rho^\gamma}{\gamma - 1} + \frac{\kappa}{2} |\nabla \rho^{\frac{1}{2}}|^2 \right) dx,$$

$$\tilde{\mathcal{E}}(T) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} \rho |u + \nabla \log \rho|^2 + a \frac{\rho^\gamma}{\gamma - 1} + \frac{\kappa}{2} |\nabla \rho^{\frac{1}{2}}|^2 - r_0 \log \rho \right) dx.$$

De plus les solutions faibles vérifient l'estimation

$$\kappa^{\frac{1}{2}} \|\rho^{\frac{1}{2}}\|_{L^2_T H^2} + \kappa^{\frac{1}{4}} \|\nabla \rho^{\frac{1}{4}}\|_{L^4_T L^4}, \leq C \tag{23}$$

où C ne dépend que des données initiales, et on a les propriétés suivantes :

$$\rho u \in \mathcal{C}([0,T], L^{\frac{3}{2}}_{faible}), \quad \partial_t \rho^{\frac{1}{2}} \in L^2_T L^2.$$

En utilisant les estimations ci-dessus, on peut déduire comme précédemment que lorsqu'on fait tendre κ vers zéro avec r_0, $r_1 > 0$ fixés, une suite de solutions faibles (ρ_κ, u_κ) comme ci-dessus de (18) converge quand κ tend vers zéro vers une solution faible du système

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + a \nabla \rho^\gamma + r_0 u + r_1 \rho |u|^2 u = \nabla \cdot (\rho D u). \end{cases} \tag{24}$$

De plus $\rho_\kappa^{\frac{1}{2}} u_\kappa$ converge fortement vers $\rho^{\frac{1}{2}} u$ dans $L^2_T L^2$.

Le théorème 5.1 est relié à un travail précédent de Jungel [19] où un type particulier de solutions faibles (les solutions faibles étant définies avec des fonctions tests de la forme $\rho\psi$) pour des systèmes (18) était construit. En particulier l'estimation de $\nabla \rho^{\frac{1}{4}}$ dans $L^4_T L^4$ était déjà obtenue. Un résultat du même type que ci-dessus a été obtenu dans [17], pour des systèmes avec des termes de pression singulières plutôt que d'amortissement.

Pour construire les solutions du théorème 5.1, les auteurs utilisent classiquement la méthode de Faedo-Galerkin pour un système régularisé avec une viscosité artificielle $\varepsilon\Delta$ sur l'équation de la densité, et une régularisation de l'équation sur la quantité de mouvement par un bilaplacien de la vitesse, une pression singulière et une dispersion d'ordre plus élévé. Il s'agit ensuite de justifier le passage à la limite.

En partant des solutions ci-dessus, le résultat principal de [28] est de montrer que les solutions faibles de (24) ainsi construites vérifient l'estimation de Mellet-Vasseur uniformément en r_0, r_1.

Théorème 5.2 ([28]). — *Supposons que $\gamma > 1$ en dimension deux et $1 < \gamma < 3$ en dimension trois. Il existe une solution faible (ρ, u) de (24) vérifiant toutes les propriétés du théorème 5.1 avec $\kappa = 0$ et vérifiant aussi pour presque tout $T > 0$ l'estimation suivante uniforme en r_0, $r_1 \in]0,1]$:*

$$\mathbb{E}(T) \leq \mathbb{E}_0 + C(T, E_0, \mathcal{E}_0, \int_\Omega \rho_0, -r_0 \int_\Omega \log_- \rho_0) \quad \forall T \geq 0, \tag{25}$$

avec

$$\mathbb{E}(T) = \int_\Omega \rho |u|^2 \log(1 + |u|^2)(T,x)\, dx.$$

Démonstration. — Rappelons que les solutions faibles de (24) ont une régularité trop faible pour justifier les manipulations menant à l'estimation de Mellet-Vasseur et que, pour $\kappa > 0$, on bénéficie de régularité supplémentaire pour les solutions de (18), mais que malheureusement l'estimation de Mellet-Vasseur n'est pas valable pour $\kappa > 0$. La stratégie utilisée est donc d'établir une estimation à $\kappa > 0$ avec $s \log s$ remplacée par une version tronquée et régularisée et de faire tendre dans un régime bien choisi κ vers zéro tout en relaxant les paramètres de troncature.

On introduit la quantité

$$\int_\Omega \rho\varphi_n\left(\phi_{m,K}(\rho)u(t,x)\right)\,dx,$$

où $\varphi_n(u) = \tilde{\varphi}_n(|u|^2)$ est une approximation bornée bien choisie de $(1+|u|^2)\log(1+|u|^2)$; en particulier $\lim_n \varphi_n(y) = (1+y)\log(1+y)$ pour presque tout y et $\phi_{m,K}$ est une fonction de troncature sous la forme

$$\phi_{m,K}(\rho) = \phi_m(\rho)\phi_K(\rho),$$

et

$$\phi_m = 0,\ \rho < \frac{1}{2m},\ \phi_m = 1,\ \rho \geq \frac{1}{m}, \quad \phi_m' \leq 2m,$$
$$\phi_K = 0,\ \rho > 2K,\ \phi_K = 1,\ \rho \leq K, \quad |\phi_K'| \leq \frac{2}{K}.$$

La démonstration se fait ensuite en quatre étapes :

— **Étape 1 :** On pose $v = \phi_{m,K}(\rho)u$, et on observe d'abord que pour $\kappa > 0$, les estimations du théorème 24 assurent que $\nabla v \in L^2_T L^2$ (l'estimation n'étant pas uniforme par rapport aux paramètres). On montre ensuite par des arguments dans l'esprit des lemmes de renormalisation de Di Perna-Lions [10] que toute solution faible donnée par le théorème 5.1 vérifie

$$\begin{aligned}(26)\quad -\int_0^T\int_\Omega \psi'(t)\rho\varphi_n(v)dxdt + \int_0^T\int_\Omega \psi(t)\varphi_n'(v)Fdxdt \\ + \int_0^T\int_\Omega \psi(t)S : \nabla(\varphi_n'(v))\,dxdt = \int_\Omega \rho_0\varphi_n(v_0)\psi(0)\,dx\end{aligned}$$

pour toute fonction test $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(]-1,+\infty[)$ avec

$$S = \rho\phi_{m,K}(\rho)\left(Du + \kappa\frac{\Delta\rho^{\frac12}}{\rho^{\frac12}}Id\right),$$
$$\begin{aligned}F = {}& \rho^2\phi_{m,K}'(\rho)\nabla\cdot u + 2\rho^{\frac{\gamma}{2}}\nabla\rho^{\frac{\gamma}{2}}\phi_{m,K}(\rho) + \rho\nabla\phi_{m,K}(\rho)Du + r_0 u\phi_{m,K}(\rho) \\ & + r_1\rho|u|^2u\phi_{M,K}(\rho) + \kappa\rho^{\frac12}\nabla\phi_{m,K}(\rho)\Delta\rho^{\frac12} + 2\kappa\phi_{m,K}(\rho)\nabla\rho^{\frac12}\Delta\rho^{\frac12}.\end{aligned}$$

Pour montrer (26), on observe d'abord que la régularité des solutions faibles est suffisante pour justifier que

$$\partial_t(\rho v) + \nabla\cdot(\rho u \otimes v) - \nabla\cdot S + F = 0$$

au sens des distributions. On utilise ensuite une fonction test de la forme

$$\Phi(t,x) = R_\varepsilon\left(\psi(t)\varphi_n'(R_\varepsilon v)\right),$$

où R_ε est une régularisation par convolution et on fait ensuite tendre ε vers zéro.

— **Étape 2 :** On fait ensuite tendre m vers $+\infty$ en gardant les autres paramètres fixés. On aboutit au fait que (26) avec $\phi_{m,K}$ remplacée par ϕ_K est valable.

— **Étape 3 :** On fait tendre κ vers zéro et K vers $+\infty$, cela se fait dans le régime $K = \kappa^{-\frac{3}{4}}$ pour établir qu'à la limite :

$$(27)\quad -\int_0^T \psi'(t)\rho\varphi_n(u)\,dxdt \le C\left(\|\psi\|_{L^\infty}, E_0, \mathcal{E}_0, -r_0\int_\Omega \log_- \rho_0\right) + C(\|\psi|_{L^\infty})\int_0^T\int_\Omega (1+\tilde{\varphi}_n'(|u|^2)\rho^{2\gamma-1}\,dxdt.$$

C'est une étape très délicate dans laquelle on combine les idées déjà décrites pour établir formellement l'estimation de Mellet-Vasseur, en particulier (15) avec de nouveaux arguments pour obtenir des estimations quantitatives. L'estimation (23) est particulièrement utile ici.

— **Étape 4 :** Il reste essentiellement à passer à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans (27). Pour cela il s'agit de contrôler le membre de droite par l'énergie et la BD-entropie, on le fait en utilisant de nouveau les arguments de l'estimation (14). □

Comme conséquence du théorème 5.2, on obtient

THÉORÈME 5.3. — *Supposons que $\gamma > 1$ en dimension deux et $1 < \gamma < 3$ en dimension trois. Pour toute donnée initiale (ρ_0, m_0) vérifiant $\rho_0 \ge 0$, $\rho_0 \in L^\gamma$, $\nabla\rho_0^{\frac{1}{2}} \in L^2$, $m_0 \in L^1$, $|m_0|^2/\rho_0 \in L^1$ (et $m_0 = 0$ sur $\{\rho_0 = 0\}$), il existe une solution globale faible de* (8) *vérifiant les estimations d'énergie, de BD-entropie et de Mellet-Vasseur.*

Démonstration. — Pour déduire le résultat à partir du théorème 5.2, il reste à faire tendre r_0, r_1 vers zéro On le fait d'abord pour une donnée initiale ρ_0 vérifiant de plus

$$(28)\qquad \rho_0 \ge \frac{1}{m_0}, \quad m_0 > 0.$$

Notons qu'avec cette hypothèse supplémentaire, pour m_0 fixé lorsque r_0 tend vers zéro, le terme $r_0\int_\Omega \log_- \rho_0\,dx$ provenant de la condition (20) qui apparaît au membre de droite de (12) tend vers zéro lorsque r_0 tend vers zéro et donc disparaît des estimations à la limite. Notons (ρ_k, u_k) une solution faible avec les propriétés du théorème 5.2 pour des suites r_0^k, r_1^k tendant vers zéro. Pour passer à la limite dans (24) en ayant à notre disposition les estimations d'énergie, de BD-entropie et de Mellet-Vasseur, il reste seulement à traiter les termes $r_0^k u_k$ et $r_1^k\rho_k|u_k|^2u_k$, tous les autres termes se traitent comme dans le théorème 3.1 de stabilité des solutions faibles. En utilisant (21), on observe que $(r_0^k)^{\frac{1}{2}} u_k$ est bornée dans $L_T^2 L^2$ et donc on obtient facilement que $r_0^k u_k$ converge dans L^1. De même, $(r_k^k)^{\frac{1}{2}} \rho_k^{\frac{1}{2}} |u_k|^2$ est bornée dans $L_T^2 L^2$; donc en écrivant

$$r_1^k \|\rho_k |u|_k^2 u_k\|_{L_T^1 L^1} \leq (r_1^k)^{\frac{1}{2}} \left((r_1^k)^{\frac{1}{2}} \|\rho_k^{\frac{1}{2}} |u_k|^2\|_{L_T^2 L^2} \right) \|\rho_k^{\frac{1}{2}} u_k\|_{L_T^2 L^2}$$

et en utilisant que $\|\rho_k^{\frac{1}{2}} u_k\|_{L_T^2 L^2}$ est bornée par l'estimation d'énergie, on obtient que $r_1^k \rho_k |u_k|^2 u_k$ converge vers zéro.

On a donc établi que, pour tout $m_0 > 0$ et pour toute donnée initiale vérifiant de plus (28), il existe une solution faible de (8) vérifiant les estimations d'énergie, de BD-entropie et de Mellet-Vasseur uniformément par rapport à m_0. Pour traiter le cas général $\rho_0 \geq 0$, il suffit d'approcher ρ_0 par une suite vérifiant (28) et de passer à la limite quand m_0 tend vers l'infini en utilisant le théorème 3.1 de stabilité des solutions faibles. $\square$

6. REMARQUES FINALES

Les estimations de BD-entropie et de Mellet-Vasseur ([2], [26]) sont valables sous l'hypothèse que les coefficients μ et λ dans (1) vérifient la relation

$$\lambda(\rho) = 2(\rho\mu'(\rho) - \mu(\rho)).$$

Il serait bien sûr très intéressant d'étendre le résultat de Vasseur et Yu à ce cadre.

Signalons aussi un travail très récent et très intéressant de Bresch et Jabin [8] étendant la théorie de Lions et Feireisl à des lois de pression non monotones et des viscosités anisotropes. Cela nécessite une approche différente basée sur des estimations quantitatives pour montrer la compacité sur la densité.

Nous nous sommes concentré dans cet exposé sur le cas des fluides barotropes ; le modèle complet des fluides conducteurs de chaleur couple le système (1) avec l'équation

$$\partial_t(\rho E) + \nabla \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\rho|u|^2 + \rho e + p \right) u \right) = \nabla \cdot (\tau\, u) + \nabla \cdot (\kappa\theta).$$

L'energie totale spécifique est donnée par $E = \frac{1}{2}|u|^2 + e$, où e est une fonction de (ρ, θ). La pression p est aussi une fonction de ρ et θ. Le cas des gaz parfaits correspond à

$$p = \rho R\theta, \quad e = C_v\theta,$$

C_V et R étant des constantes strictement positives. La théorie de type Lions et Feireisl permet de prendre en compte des viscosités constantes ou dépendant de la température pour ce système [14]. Le cas de viscosités dégénérées dépendant de la densité a été étudié par Bresch et Desjardins [5] en ajoutant une pression singulière.

Pour une présentation plus détaillée de ces résultats, on renvoie le lecteur aux présentations [6], [7].

Remerciements. – L'auteur remercie chaleureusement Didier Bresch pour de nombreux conseils très utiles pour la rédaction de ce texte.

RÉFÉRENCES

[1] D. Bresch. *Topics on compressible Navier-Stokes equations, non degenerate viscosities.* Contributions by R. Danchin, A. Novotny, M. Perepetlisa. Panorama et synthèses **50**, 2016.

[2] D. Bresch et B. Desjardins. *Some diffusive capillary models of Korteweg type.* C. R. Acad. Sci., Paris, Section Mécanique **332** (2004), 881–886.

[3] D. Bresch et B. Desjardins. *Existence of global weak solutions for a 2D viscous shallow water equations and convergence to the quasi-geostrophic model,* Commun. Math. Phys. **238** (2003), 211–223.

[4] D. Bresch et B. Desjardins. *On the construction of approximate solutions for the 2D viscous shallow water model and for compressible Navier-Stokes models.* J. Math. Pures Appl. **86** (2006), 362–368.

[5] D. Bresch et B. Desjardins. *On the existence of global weak solutions to the Navier-Stokes equations for viscous compressible and heat conducting fluids.* J. Math. Pures Appl. (9) **87** (2007), 57–90.

[6] D. Bresch et B. Desjardins. *Sur la théorie globale des équations de Navier-Stokes compressible.* J. EDP 2006, Exposé no. 3.

[7] D. Bresch et B. Desjardins. Weak solutions with density dependent viscosities, à paraître.

[8] D. Bresch et P-E. Jabin. *Global Existence of Weak Solutions for Compresssible Navier- Stokes Equations : Thermodynamically unstable pressure and anisotropic viscous stress tensor.* ArXiv :1507.04629, 2015.

[9] D. Bresch et P. Noble. *Mathematical justification of a shallow water model.* Methods Appl. Anal. **14** (2007), 87–117.

[10] R.J. DiPerna et P.-L. Lions. *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces.* Invent. Math. **98** (1989), 511–547.

[11] C.L. Fefferman. *Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation,* in : The Millennium Prize Problems, Clay Math. Inst., Cambridge, MA, 2006, pp. 57–67.

[12] R. Danchin. *Global existence in critical spaces for compressible Navier-Stokes equations* Invent. Math. **141** (2000), 579–614.

[13] E. Feireisl, A. Novotny et H. Petzletova. *On the existence of globally defined weak solutions to the Navier-Stokes equations.* J. Math. Fluid Mech. **3** (2001), 358–392.

[14] E. Feireisl et A. Novotny. Singular limits in thermodynamics of viscous fluids. Adv. Math. Fluid mech., Birkhäuser-Springer (2009).

[15] H. Fujita et T. Kato. *On the Navier-Stokes initial value problem, I,* Arch. Rat. Mech. Anal. **16** (1961), 269–315.

[16] P. Gent. *The energetically consistent shallow water equations* J. Atmos. Sci. **50** (1993), 1323–325.

[17] M. Gisclon et I. Lacroix-Violet. *About the barotropic compressible quantum Navier-Stokes equations.* ArXiv :1412.1332.

[18] D. Hoff et D. Serre. *The failure of continuous dependence on initial data for the Navier-Stokes equations of compressible flow.* SIAM J. Appl. Math. **51** (1991), 887-898.

[19] A. Jungel. *Global weak solutions to compressible Navier-Stokes equations for quantum fluids.* SIAM J. Math. Anal. **42** (2010), no. 3, 1025–1045.

[20] T. Kato. *Strong L^p solutions of the Navier-Stokes equations in $\mathbf{R}^m$ with applications to weak solutions*, Math. Z. **187** (1984), 471–480.

[21] A. Kazhikhov et W. Weigant. *On existence of global solutions to the two dimensional Navier-Stokes equations for a compressible viscous fluid.* Siberian Mathematical Journal, Vol 36, No. 6 (1995).

[22] H. Koch et D. Tataru. *Well-posedness for the Navier-Stokes equations*, Adv. Math. **157** (2001), 22–35.

[23] P.-G. Lemarié-Rieusset. *The Navier-Stokes Problem in the 21st Century* , Chapman and Hall (2016).

[24] J. Leray. *Sur le mouvement d'un fluide visqueux remplissant l'espace*, Acta Math. **63** (1934), 193–248.

[25] P.-L. Lions. *Mathematical topics in fluid mechanics.* Vol. 1, volume 3 of Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1996. Incompressible models, Oxford Science Publications.

[26] A. Mellet et A. Vasseur. On the barotropic compressible Navier-Stokes equations. Comm. Partial Differential Equations **32** (2007), 431–452.

[27] P. Plotnikov et W.Weigant. *Isothermal Navier-Stokes Equations and Radon Transform.* SIAM J. Math. Anal. **47** (2015), 626–653.

[28] A. Vasseur et C. Yu. *Existence of global weak solutions for 3D degenerate compressible Navier-Stokes equations*. Invent. Math. **206** (2016), 935–974.

[29] A. Vasseur et C. Yu. *Global weak solutions to compressible quantum Navier-Stokes equations with damping*. SIAM J. Math. Anal. **48**, no. 2 (2016), 1489–1511.

Frédéric ROUSSET

Université Paris-Sud 11
Département de Mathématiques d'Orsay
UMR 8628 du CNRS
Bâtiment 425
F–91405 Orsay Cedex
E-mail : frederic.rousset@math.u-psud.fr