Séminaire BOURBAKI Novembre 2015
68ème année, 2015-2016, n$^{\text{o}}$ 1106

CONJECTURE DE HILBERT-SMITH EN DIMENSION 3
[d'après J. Pardon]

par **Sylvain MAILLOT**

INTRODUCTION

Pour toute variété topologique M, on note Homeo(M) le groupe des homéomorphismes de M, que l'on munit de la topologie *compacte-ouverte* (engendrée par les ensembles de la forme $V(K,U) = \{f \in \text{Homeo}(M) \mid f(K) \subset U\}$ pour $K \subset M$ compact et $U \subset M$ ouvert). A toute action d'un groupe topologique G sur M on peut associer un morphisme continu de G dans Homeo(M). On rappelle que l'action est dite *fidèle* si ce morphisme est injectif. L'énoncé de la conjecture de Hilbert-Smith est le suivant :

Conjecture 0.1. — *Soient M une variété topologique connexe de dimension n et G un groupe topologique localement compact qui agit fidèlement sur M. Alors G est isomorphe à un groupe de Lie.*

L'hypothèse de locale compacité sur G ne peut être supprimée. Par exemple, le groupe Homeo(S^1) n'est pas un groupe de Lie (il n'est pas localement compact.) De même, l'énoncé devient faux si l'on omet l'hypothèse de connexité sur M : le groupe compact $\mathbf{T}^\infty = (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$ agit fidèlement sur la variété $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ selon la formule

$$(g_n)_{n\in\mathbf{N}} \cdot (\theta, p) = (\theta + g_p, p).$$

Le sujet principal de cet exposé est le théorème suivant :

Théorème 0.2 (J. Pardon [Par13]). — *La conjecture 0.1 est vraie pour $n = 3$.*

On renvoie à l'introduction de l'article de Pardon [Par13] pour une liste de résultats connus antérieurement. Il s'agit principalement de résultats partiels valables en toute dimension sous des hypothèses supplémentaires de régularité sur l'action. Par ailleurs la conjecture était connue en dimensions ≤ 2 ; le résultat de Pardon redémontre ceci puisque si l'on démontre la conjecture en dimension n, on la démontre aussi en toute dimension inférieure à n (faire le produit de M avec un espace euclidien).

La conjecture de Hilbert-Smith est issue du « 5-ième problème de Hilbert », dont l'interprétation moderne consiste à explorer les liens entre la notion de groupe topologique et celle de groupe de Lie. Ces questions ont beaucoup été étudiées dans la première moitié du XXème siècle ; une série de développements que nous ne détaillerons pas ici trouvent leur aboutissement au début des années 1950 dans les travaux de Gleason [Gle51, Gle52], Montgomery-Zippin [MZ55] et Yamabe [Yam53b, Yam53a]. Nous renvoyons au livre de T. Tao [Tao14] pour un exposé moderne de cette théorie. Citons simplement un résultat majeur de cette période :

Théorème 0.3 (Montgomery-Zippin). — *Soit n un entier naturel. Tout groupe topologique localement homéomorphe à $\mathbf{R}^n$ est isomorphe à un groupe de Lie.*

Ce texte est structuré comme suit : dans la section 1, nous donnons quelques éléments de topologie des variétés de dimension 3 ; certains résultats sont utilisés dans la preuve du théorème 0.2 ; d'autres permettent de mieux apprécier le contexte dans lequel cette preuve se déroule. Dans la section 2, nous reformulons la conjecture de Hilbert-Smith en termes du groupe topologique $\mathbf{Z}_p$ des entiers p-adiques. Dans la section 3 nous expliquons comment la preuve du théorème 0.2 se décompose en trois étapes. Par souci de simplification, l'exposition est informelle et les constructions quelque peu simplifiées. Enfin, la section 4 est consacrée à la notion de quasi-cylindre, laquelle est au cœur de la deuxième étape de la preuve.

Par convention, dans ce texte, l'homologie et la cohomologie sont toujours à coefficients dans $\mathbf{Z}$.

Remerciements — En préparant cet exposé j'ai bénéficié de remarques utiles de Christophe Bavard et Samuel Tapie. Je remercie également John Pardon pour sa relecture attentive de ce texte et ses commentaires.

1. VARIÉTÉS DE DIMENSION 3

1.1. TOP, PL et DIFF

En topologie des variétés, on distingue classiquement trois catégories : la catégorie TOP des variétés topologiques considérées à homéomorphisme près, la catégorie PL des variétés définies par des cartes affines par morceaux, considérées à homéomorphisme PL près, et la catégorie DIFF des variétés différentielles de classe $\mathcal{C}^\infty$, considérées à $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme près. Toute variété DIFF admet une structure PL compatible, unique au sens où deux variétés DIFF qui sont difféomorphes sont aussi PL-homéomorphes ; de même (et c'est immédiat à partir des définitions), toute variété PL admet une unique structure TOP.

En général, les réciproques ne sont pas vraies, ni pour l'existence, ni pour l'unicité. C'est cependant le cas en dimension $n \leq 3$. En particulier on a le résultat suivant (voir par exemple Hempel [Hem76] pour des références) [1] :

1. La partie la plus difficile est l'existence de structures PL sur les variétés topologiques de dimension 3, qui est due à E. Moise.

Théorème 1.1. — *En dimension 3, toute variété* TOP *admet une structure* PL *compatible et toute variété* PL *admet une structure* DIFF *compatible. De plus, on a unicité au sens où deux variétés* PL *sont homéomorphes si et seulement si elles sont* PL*-homéomorphes, et deux variétés* DIFF *sont homéomorphes si et seulement si elles sont difféomorphes.*

Ce théorème pourrait laisser croire que toute variété topologique de dimension 3 munie d'une action de groupe admet une structure PL (resp. DIFF) invariante. Or cet énoncé est faux : Bing [Bin52] a construit une *involution sauvage* de la sphère de dimension 3 : il s'agit d'un homéomorphisme $\tau : S^3 \to S^3$ tel que $\tau^2 = \mathrm{Id}$ et τ n'est conjuguée à aucun difféomorphisme de S^3. L'ensemble des points fixes de τ est une sous-variété topologique de S^3 homéomorphe à S^2, mais qui n'est équivalente (2) à aucune sous-variété différentielle. Une telle sous-variété est dite *sauvage*.

Bien entendu, τ n'est pas l'identité. On a donc affaire à une action fidèle du groupe $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ sur S^3. Cet exemple illustre une difficulté de la conjecture de Hilbert-Smith. On ne peut espérer montrer que le groupe G est sage en prouvant que son action sur M est sage : même le groupe en apparence inoffensif $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ peut agir de façon sauvage sur la variété compacte de dimension 3 la plus simple qui soit.

Dans la suite de ce texte, toutes les surfaces plongées dans une variété de dimension 3 seront supposées connexes, orientables et PL. Le dernier point implique l'existence d'un voisinage tubulaire et exclut les surfaces sauvages.

Notons que nos variétés de dimension 3 et surfaces seront par défaut supposées *sans bord*, contrairement aux conventions habituelles en topologie. Les sous-variétés de dimension 3 sont en revanche en général à bord.

1.2. Variétés compactes et non compactes

La structure des variétés compactes de dimension 3 est aujourd'hui relativement bien connue, en particulier grâce à la preuve par Perelman [Pera, Perb, Perc] de la conjecture de géométrisation de Thurston. Cela permet de décomposer toute variété M compacte de dimension 3 en variétés dites géométriques. En revanche, pour les variétés non compactes, on ne dispose pas d'énoncé plausible même conjecturel de quoi que ce soit qui ressemblerait à un théorème de structure, toutes les tentatives butant sur une série de contre-exemples. Historiquement, le premier de ceux-ci est la variété de Whitehead [Whi35], qui est une variété de dimension 3 non compacte contractile qui n'est pas homéomorphe à $\mathbf{R}^3$. Pour d'autres exemples exotiques de variétés de dimension 3 non compactes, voir [Sco77, ST89, Mai08, Mai].

2. Deux surfaces F_1, F_2 plongées dans S^3 sont *équivalentes* si les couples (S^3, F_1) et (S^3, F_2) sont homéomorphes.

2. GROUPE TOPOLOGIQUE DES ENTIERS p-ADIQUES

2.1. Définition et propriétés

Le prototype de groupe topologique localement compact, de dimension topologique finie et qui pourtant n'est pas un groupe de Lie est le *groupe topologique des entiers p-adiques* $\mathbf{Z}_p$ dont nous rappelons maintenant la définition.

Soit p un nombre premier. On définit $\mathbf{Z}_p$ comme la limite projective du système $(\{\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}\}_{k\in\mathbf{N}}, \{f_k\}_{k\in\mathbf{N}})$ où pour tout k le morphisme $f_k : \mathbf{Z}/p^{k+1}\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$ est celui qui à la classe d'un entier modulo p^{k+1} associe la classe du même entier modulo p^k.

Pour tout $k \in \mathbf{N}$ on munit $\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$ de la topologie discrète, qui est une topologie de groupe. De cette façon on obtient sur $\mathbf{Z}_p$ une structure de groupe topologique. Ce groupe est compact, donc localement compact. Plus précisément, il est homéomorphe à l'ensemble de Cantor. En particulier, il est de dimension topologique 0, mais infini. Ce n'est donc pas un groupe de Lie. (3)

Pour tout $k \in \mathbf{N}$ notons $G_{p,k}$ le sous-groupe $p^k\mathbf{Z}_p$ de $\mathbf{Z}_p$. Il est d'indice fini et isomorphe (en tant que groupe topologique) à $\mathbf{Z}_p$ lui-même. Il est facile de voir que l'intersection des $G_{p,k}$ est réduite à l'élément neutre. Ces sous-groupes forment donc une base de voisinages de l'élément neutre dans $\mathbf{Z}_p$. L'existence d'une telle famille est la négation de la *propriété (NSS)* (pour « No Small Subgroups ».) C'est une obstruction bien connue au fait qu'un groupe topologique soit un groupe de Lie. (Pour approfondir ce sujet, lire la discussion du théorème de Gleason-Yamabe dans l'introduction de [Tao14].)

2.2. Une réduction de la conjecture de Hilbert-Smith

Une conséquence des travaux de Gleason, Montgomery-Zippin et Yamabe sur la structure des groupes topologiques localement compacts (cf. [Tao14, Tao]) est que la conjecture de Hilbert-Smith est équivalente à l'énoncé suivant :

Conjecture 2.1. — *Soit M une variété topologique connexe. Alors pour tout nombre premier p, le groupe topologique $\mathbf{Z}_p$ n'admet pas d'action fidèle sur M.*

C'est cette version de la conjecture que Pardon démontre quand $\dim M = 3$. La démonstration est par l'absurde. Quitte à remplacer $\mathbf{Z}_p$ par $G_{p,k}$ pour k suffisamment grand, on peut supposer que l'image du groupe est contenue dans un voisinage arbitrairement petit de l'identité de Homeo(M). Cela va permettre de se ramener au cas où M est un ouvert de $\mathbf{R}^3$, de sorte que la topologie globale de la variété de départ ne joue aucun rôle dans la preuve.

3. Il existe d'autres groupes ayant les mêmes propriétés topologiques, comme $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$, ou encore le produit de tous les $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ où p parcourt l'ensemble des nombres premiers. La présence de petits sous-groupes cycliques permet de voir que ces groupes ne peuvent agir fidèlement sur une variété connexe en utilisant les théorèmes de Newman [New31].

3. PLAN DE LA PREUVE

Nous allons décomposer la preuve du théorème 0.2 en trois étapes principales. L'exposition est informelle et donc parfois imprécise. Nous renvoyons à l'article de Pardon [Par13] pour une exposition rigoureuse et détaillée.

Raisonnant par l'absurde, nous partons d'une action fidèle de $\mathbf{Z}_p$ sur une variété connexe M de dimension 3. Nous commençons par quelques considérations préliminaires qui permettent de se ramener au cas où M est un ouvert de $\mathbf{R}^3$ et où l'action du groupe « bouge très peu les points ».

Définition 3.1. — *Soit X un espace topologique muni d'une action d'un groupe G. On dit que l'action est* localement d'ordre fini *en un point $x \in X$ s'il existe un sous-groupe d'indice fini de G qui fixe un voisinage de x.*

Dans notre situation, il resulte d'un théorème de Newman [New31] que M admet au moins un point où l'action n'est pas localement d'ordre fini. Soit x_0 un tel point.

Notons d_{eucl} la distance euclidienne sur $\mathbf{R}^3$ et pour tout $r \geq 0$, notons $B(r)$ la boule ouverte centrée en l'origine et de rayon r pour cette distance. Fixons un homéomorphisme entre $B(3)$ et un voisinage ouvert de x_0 dans M et identifions chaque point à son image. On suppose que l'origine de $\mathbf{R}^3$ est identifiée à x_0.

Posons $\eta = 2^{-10}$. Par continuité de l'action, on observe que pour k suffisamment grand on a $G_{p,k}B(2) \subset B(3)$ et pour tout $\alpha \in G_{p,k}$ et tout $x \in B(2)$ on a $d_{\text{eucl}}(x, \alpha \cdot x) \leq \eta$. Quitte à remplacer $\mathbf{Z}_p$ par $G_{p,k}$ et M par $G_{p,k}B(1)$, on peut donc se ramener au cas où M est un ouvert de $\mathbf{R}^3$ satisfaisant les hypothèses suivantes :

1. $B(1) \subset M \subset B(1+\eta)$;
2. Pour tout $(\alpha, x) \in \mathbf{Z}_p \times M$ on a $d_{\text{eucl}}(x, \alpha \cdot x) \leq \eta$;
3. Aucun sous-groupe d'indice fini de $\mathbf{Z}_p$ ne fixe un voisinage de l'origine.

Nous abordons maintenant la preuve proprement dite.

Etape 1 : Construction d'un quasi-cylindre invariant.

Soit μ_{Haar} la mesure de Haar de $\mathbf{Z}_p$. Munissons M de la métrique

$$d_{\text{inv}}(x, y) = \int_{\mathbf{Z}_p} d_{\text{eucl}}(\alpha \cdot x, \alpha \cdot y)\, d\mu_{\text{Haar}}(\alpha).$$

Pour $A \subset M$ notons $N_\varepsilon^{\text{inv}}(A)$ l'ensemble des points dont la distance à A est strictement inférieure à ε.

Soit $K_0 \subset M$ un corps à anses de genre 2. Posons $K = \mathbf{Z}_p \cdot K_0$. On construit un compact invariant Z en prenant la réunion de K et d'un ensemble $L = \mathbf{Z}_p \cdot L_0$, où L_0 est un petit arc reliant deux points de la frontière de K par l'extérieur. [4] Vu de loin, Z ressemble à un corps à anses de genre 2. L'idée maîtresse de la suite est de construire une sorte de « bord approximatif » de Z.

4. Il faut en réalité (pour des raisons techniques) poser $K = (\mathbf{Z}_p \cdot K_0)^+$ et $L = (\mathbf{Z}_p \cdot L_0)^+$, où X^+ désigne l'intersection des ouverts bornés contenant X et dont le H_2 est nul.

Du fait que Z n'appartient pas *a priori* à une catégorie d'espaces pour lesquels la cohomologie singulière se comporte bien, on travaille avec la cohomologie de Čech. Une propriété cruciale de l'ensemble invariant Z est que l'action induite de $\mathbf{Z}_p$ sur $\check{H}^1(Z)$ est non triviale.

On définit ensuite un ouvert invariant U, qui est essentiellement $N_\varepsilon^{\mathrm{inv}}(Z) \setminus Z$ pour ε convenable. [(5)] On montre que U est ce que Pardon appelle un *quasi-cylindre* (nous définirons cette notion dans la section suivante.)

Etape 2 : construction d'une surface invariante à homotopie près.

Dans cette étape, qui est au cœur de la preuve, on démontre l'existence d'une surface incompressible $F \subset U$ invariante *à homotopie près*, c'est-à-dire telle que, pour tout $\alpha \in \mathbf{Z}_p$, la surface $\alpha \cdot F$ est homotope à F. Noter qu'on ne contrôle pas le genre de F.

Etape 3 : la contradiction finale.

Grâce à l'étape précédente, on obtient un morphisme de $\mathbf{Z}_p$ dans le groupe $\mathrm{MCG}(F)$ des difféotopies de F. (La preuve de ce point est un peu plus délicate que la simple existence de F, voir [Par13, Lemma 4.12].) On montre que le noyau de ce morphisme est un sous-groupe distingué ouvert de $\mathbf{Z}_p$; l'image est donc finie. Les propriétés géométriques et homologiques de l'action de $\mathbf{Z}_p$ sur Z permettent de montrer les deux assertions suivantes :

1. Il existe un sous-module de $H_1(F)$ fixé par $\mathbf{Z}_p$ sur lequel la forme d'intersection a dans une base convenable la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. L'action de $\mathbf{Z}_p$ sur $H_1(F)$ est non triviale.

On obtient enfin une contradiction grâce à un théorème de J. Nielsen [Nie43] qui classifie les sous-groupes finis cycliques de $\mathrm{MCG}(F)$.

4. QUASI-CYLINDRES

Le but de cette section est de détailler la partie de la preuve qui se déroule dans le cadre des variétés de dimension 3. Pour simplifier, nous ne préciserons pas toujours la catégorie (TOP, PL ou DIFF) dans laquelle on se place. Pour les raisons expliquées plus haut (le contre-exemple de Bing) il est en fait nécessaire de jongler avec les catégories. La difficulté vient du fait que l'on s'intéresse à une action de $\mathbf{Z}_p$ sur une variété M de

---

5. Là encore, il faut en réalité prendre la composante connexe contenant Z de l'ensemble $(N_\varepsilon^{\mathrm{inv}}(Z))^+$ et retrancher Z.

dimension 3 par homéomorphismes, sans aucune hypothèse de régularité supplémentaire. D'après le théorème 1.1, on peut munir M d'une structure PL (ou DIFF,) mais il n'y a aucune raison *a priori* qu'il en existe une qui soit invariante sous l'action de $\mathbf{Z}_p$. Ces structures ne peuvent donc jouer qu'un rôle auxiliaire. (6)

Comme indiqué à la section 1, chaque fois que nous considérons un plongement d'une surface dans M, nous nous plaçons dans la catégorie PL ou DIFF de façon à éviter les surfaces sauvages. De plus toutes nos surfaces sont *connexes et orientables.*

4.1. Définitions et exemples

Commençons par rappeler quelques définitions classiques de topologie. Soit M une variété connexe de dimension 3. On dit que M est *irréductible* si tout plongement de la sphère de dimension 2 dans M se prolonge en un plongement de la boule de dimension 3. Le *nombre de bouts* de M est la borne supérieure dans $\mathbf{N}\cup\infty$, prise sur toutes les parties compactes de M, du nombre de composantes connexes non relativement compactes.

Quand M est orientable (ce que nous supposerons toujours dans ce texte), une surface F plongée dans M est *incompressible* si le morphisme de $\pi_1(F)$ dans $\pi_1(M)$ induit par l'inclusion est injectif. Si M a deux bouts, on dit que F *sépare les bouts* si $M \setminus F$ admet deux composantes connexes dont aucune n'est relativement compacte.

Définition 4.1. — *Soit M une variété connexe orientable de dimension 3. On dit que M est un* quasi-cylindre *si M a les trois propriétés suivantes :*

1. *M est irréductible ;*
2. *M a deux bouts (en particulier M n'est pas compacte) ;*
3. *$H_2(M) = \mathbf{Z}$.*

Exemple 4.2. — Soit F une surface compacte de genre au moins 1. Alors $F \times \mathbf{R}$ est un quasi-cylindre.

Exemple 4.3. — Soit $\mathcal{O}$ un orbifold de dimension 2 dont l'espace sous-jacent $|\mathcal{O}|$ est homéomorphe à $S^1 \times \mathbf{R}$. Alors tout fibré de Seifert de base $\mathcal{O}$ est un quasi-cylindre. (Voir par exemple [BMP03] pour les définitions.)

4.2. Le treillis des surfaces incompressibles

Dans toute la suite on fixe un quasi-cylindre M et une bijection ϵ entre l'espace des bouts de M et l'ensemble $\{+,-\}$. (Le couple (M,ϵ) est ce que Pardon appelle « directed quasicylinder ».) Nous allons nous intéresser aux surfaces incompressibles dans M séparant les deux bouts. Commençons par noter le lemme général suivant :

Lemme 4.4. — *Soit F une surface compacte plongée dans M. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

6. De même, l'existence d'une structure DIFF permet de munir M d'une métrique riemannienne, mais on ne peut affirmer à ce stade qu'il en existe une invariante...

1. *F sépare les deux bouts de M ;*
2. *F représente un élément non nul de $H_2(M)$;*
3. *La classe de F engendre $H_2(M)$.*

Si F est une telle surface, on notera $M_+(F)$ et $M_-(F)$ les composantes connexes de $M \setminus F$, le signe étant déterminé par le signe du bout correspondant.

Soit $\mathcal{S}(M)$ l'ensemble des classes d'homotopie de surfaces compactes plongées incompressibles dans M séparant les deux bouts. La première observation est le lemme suivant, qui découle d'un argument classique de topologie tridimensionnelle basée sur le Théorème du Lacet.

Lemme 4.5 (cf. [Hat07], Lemma 3.6). — *L'ensemble $\mathcal{S}(M)$ est non vide.*

On définit ensuite une relation $\leq$ sur $\mathcal{S}(M)$ de la façon suivante : si $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ sont des éléments de $\mathcal{S}(M)$, on déclare que $\mathfrak{F}_1 \leq \mathfrak{F}_2$ s'il existe des représentants $F_1 \in \mathfrak{F}_1$ et $F_2 \in \mathfrak{F}_2$ tels que $F_1 \subset M_-(F_2)$.

Lemme 4.6. — *La relation $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{S}(M)$.*

Preuve (esquisse) — La réflexivité et la transitivité sont faciles. Pour l'antisymétrie, on peut raisonner comme suit : si $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ sont des éléments de $\mathcal{S}(M)$ tels que l'on ait à la fois $\mathfrak{F}_1 \leq \mathfrak{F}_2$ et $\mathfrak{F}_2 \leq \mathfrak{F}_1$, alors il existe des représentants F_1, F_1' de $\mathfrak{F}_1$ et un représentant F_2 de $\mathfrak{F}_2$ tels que $F_1 \subset M_-(F_2)$ et $F_1' \subset M_+(F_2)$. (Ceci utilise le fait que pour les surfaces que nous considérons, la relation d'homotopie est équivalente à celle d'isotopie ambiante.) En utilisant un théorème de Waldhausen [Wal68], on en déduit que la sous-variété compacte bordée par $F_1 \cup F_1'$ est homéomorphe à $F_1 \times [0, 1]$. Cela implique que F_2 est homotope à F_1.

Rappelons qu'un ensemble ordonné $(X, \leq)$ est un *treillis* si toute partie finie non vide de X admet une borne supérieure et une borne inférieure. Le résultat principal de cette section est la proposition suivante, issue d'un échange fructueux entre J. Pardon et I. Agol sur le site de questions/réponses MathOverflow (cf. `mathoverflow.net/questions/74799/`).

Proposition 4.7. — *L'ensemble ordonné $(\mathcal{S}(M), \leq)$ est un treillis.*

Remarque 4.8. — La démonstration donnée dans [Par13] de la proposition 4.7 utilise la théorie des surfaces minimales via un résultat de M. Freedmann, J. Hass et P. Scott [FHS83]. Ceci nécessite un bref passage par la catégorie DIFF. Alternativement (cf. [Par13, Remark 2.21]) on peut rester dans la catégorie PL en utilisant à la place des surfaces minimales les surfaces dites PL-minimales. Cette dernière notion a été développée par W. Jaco et H. Rubinstein [JR88], qui ont montré que des résultats analogues à ceux de [FHS83] sont valables dans leur théorie (la preuve étant essentiellement identique). Cela permet également de simplifier un peu la preuve de la proposition 4.7, puisque l'on dispose d'un théorème plus général d'existence valable dans un cadre non compact (cf. [Mai03, Appendix A].)

Dans l'exemple 4.2, l'ensemble $\mathcal{S}(M)$ est un singleton. L'exemple 4.3 est plus intéressant quand l'orbifold $\mathcal{O}$ a un ensemble singulier $\Sigma_{\mathcal{O}}$ non vide. L'ensemble $\mathcal{S}(M)$ est alors en bijection avec l'ensemble des classes d'homotopie de courbes fermées simples dans $|\mathcal{O}| \setminus \Sigma_{\mathcal{O}}$ séparant les deux bouts de $|\mathcal{O}|$. Si $\Sigma_{\mathcal{O}}$ est fini, $\mathcal{S}(M)$ est borné. S'il y a une suite infinie de points singuliers tendant vers le bout $+$, mais que la même chose n'est pas vraie pour le bout $-$, alors $\mathcal{S}(M)$ est minoré mais pas majoré. De même, $\mathcal{S}(M)$ peut être majoré mais pas minoré, ou ni majoré ni minoré.

Nous concluons avec le théorème de point fixe suivant :

Théorème 4.9. — *Pour toute action de $\mathbf{Z}_p$ sur un quasi-cylindre M fixant chaque bout, l'action induite sur $\mathcal{S}(M)$ admet un point fixe.*

Preuve (esquisse) — D'après le lemme 4.5, on a $\mathcal{S}(M) \neq \emptyset$. Soit $\mathfrak{F}$ un élément quelconque de $\mathcal{S}(M)$, F un représentant de $\mathfrak{F}$ et U un voisinage tubulaire de F. Pour tout $\alpha \in G_{p,k}$ avec k suffisamment grand, on a $\alpha \cdot F \subset U$, ce qui implique que $\alpha \cdot F$ est homotope à F. Ceci entraîne que l'action induite de $\mathbf{Z}_p$ sur $\mathcal{S}(M)$ a des orbites finies. Comme l'action fixe chaque bout, elle préserve l'ordre sur $\mathcal{S}(M)$. La borne supérieure d'une orbite quelconque est donc un point fixe.

RÉFÉRENCES

[BMP03] M. BOILEAU, S. MAILLOT, J. PORTI – *Three-dimensional orbifolds and their geometric structures*, Panoramas et Synthèses 15, Société Mathématique de France, Paris, 2003.

[Bin52] R. H. BING – A homeomorphism between the 3-sphere and the sum of two solid horned spheres, *Ann. of Math. (2)* **56** (1952), 354–362.

[FHS83] M. FREEDMAN, J. HASS, P. SCOTT – Least area incompressible surfaces in 3-manifolds, *Invent. Math.* **71** (1983), 609–642.

[Gle51] A. M. GLEASON – The structure of locally compact groups, *Duke Math. J.* **18** (1951), 85–104.

[Gle52] A. M. GLEASON – Groups without small subgroups, *Ann. of Math. (2)* **56** (1952), 193–212.

[Hat07] A. HATCHER – Notes on basic 3-manifold topology, 2007.

`http://www.math.cornell.edu/~hatcher/3M/3Mdownloads.html`

[Hem76] J. HEMPEL – *3-manifolds*, volume 86 de *Ann. of Math. Studies*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1976.

[JR88] W. JACO, J. H. RUBINSTEIN – PL minimal surfaces in 3-manifolds, *J. Differential Geom.* **27** (1988), 493–524.

[Mai] S. MAILLOT – One-ended 3-manifolds without locally finite toric decompositions. En préparation.

[Mai03] S. MAILLOT – Open 3-manifolds whose fundamental groups have infinite center, and a torus theorem for 3-orbifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* **355** (2003), 4595–4638.

[Mai08] S. MAILLOT – Some open 3-manifolds and 3-orbifolds without locally finite canonical decompositions, *Algebr. Geom. Topol.* **8** (2008), 1795–1810.

[MZ55] D. MONTGOMERY, L. ZIPPIN – *Topological transformation groups*, Interscience Publishers, New York-London, 1955.

[New31] M. H. A. NEWMAN – A theorem on periodic transformations of spaces, *Quart. J. Math.* **2** (1931), 1–8.

[Nie43] J. NIELSEN – Abbildungsklassen endlicher Ordnung, *Acta Math.* **75** (1943), 23–115.

[Par13] J. PARDON – The Hilbert-Smith conjecture for three-manifolds, *J. Amer. Math. Soc.* **26** (2013), 879–899.

[Pera] G. PERELMAN – The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, arXiv :math.DG/0211159.

[Perb] G. PERELMAN – Ricci flow with surgery on three-manifolds, arXiv :math.DG/0303109.

[Perc] G. PERELMAN – Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds, arXiv :math.DG/0307245.

[Sco77] P. SCOTT – Fundamental groups of non-compact 3-manifolds, *Proc. London Math. Soc. (3)* **34** (1977), 303–326.

[ST89] P. SCOTT, T. TUCKER – Some examples of exotic noncompact 3-manifolds, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **40** (1989), 481–499.

[Tao] T. TAO – Article de blog. https ://terrytao.wordpress.com/2011/08/13/the-hilbert-smith-conjecture/.

[Tao14] T. TAO – *Hilbert's fifth problem and related topics*, volume 153 de *Graduate Studies in Math.*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014.

[Wal68] F. WALDHAUSEN – On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, *Annals of Math.* **87** (1968), 56–88.

[Whi35] J. H. C. WHITEHEAD – A certain open manifold whose group is unity, *Quart. J. Math.* **6** (1935), 268–279.

[Yam53a] H. YAMABE – A generalization of a theorem of Gleason, *Ann. of Math. (2)* **58** (1953), 351–365.

[Yam53b] H. YAMABE – On the conjecture of Iwasawa and Gleason, *Ann. of Math. (2)* **58** (1953), 48–54.

Sylvain MAILLOT

Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck
(UMR CNRS 5149)
Université de Montpellier
Case Courrier 051
Place Eugène Bataillon
F–34095 Montpellier Cedex 5
E-mail : sylvain.maillot@umontpellier.fr