Séminaire BOURBAKI Janvier 2015
67ème année, 2014-2015, n$^{\text{o}}$ 1095

MÉTRIQUES DE KÄHLER-EINSTEIN SUR LES VARIÉTÉS DE FANO [d'après Chen-Donaldson-Sun et Tian]

par **Philippe EYSSIDIEUX**

INTRODUCTION

Une *variété kählérienne* (X,ω) est une variété complexe de dimension finie $n = \dim_{\mathbb{C}}(X)$ munie d'une 2-forme réelle fermée ω s'exprimant dans un système de coordonnées holomorphes locales $(z^i)_{1\leq i\leq n}$ sous la forme :

$$\omega = \sqrt{-1} \sum_{1\leq i,j\leq n} g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j,$$

où $(g_{i\bar{j}})_{1\leq i,j\leq n}$ est une matrice hermitienne définie positive à coefficients C^∞ de sorte que ω est de type $(1,1)$ pour la bigraduation naturelle des tenseurs induite par la structure complexe de X. La *courbure de Ricci* de (X,ω) est la $(1,1)$-forme Ric donnée en coordonnées locales par :

$$\mathrm{Ric} = \mathrm{Ric}(\omega) := -\sqrt{-1}\partial\bar{\partial} \log \det(g_{i\bar{j}}). \tag{1}$$

On notera que Ric ne dépend que de la forme volume ω^n. Moyennant l'identification entre formes volume et métriques hermitiennes sur le fibré anticanonique, $\mathrm{Ric}(\omega)$ n'est autre que la première forme de Chern-Weil de la métrique hermitienne sur le fibré en droites holomorphe anticanonique $\Lambda^n T_X$ attachée à ω^n multipliée par 2π.

On dit que (X,ω) est *Kähler-Einstein* si $\mathrm{Ric}(\omega) = \lambda\omega$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dans le cas $\lambda \leq 0$, les conditions nécessaires et suffisantes d'existence de métriques de Kähler-Einstein sur une variété X compacte ont été élucidées par Aubin (pour $\lambda < 0$) et Yau [AUB, YAU], voir [BOU1]. Le cas $\lambda > 0$ est plus compliqué. Il est nécessaire que X soit projective-algébrique et même *Fano* (c. à. d. que le fibré anticanonique est ample) et que la classe de cohomologie de De Rham $\{\omega\}$ soit $\frac{2\pi}{\lambda} c_1(X)$. Par un théorème de Matsushima, l'algèbre de Lie des champs de vecteurs holomorphes d'une variété de Kähler-Einstein doit aussi être réductive mais bien d'autres obstructions ont été découvertes, voir [BOU2].

On définira plus loin la notion de K-stabilité pour une variété de Fano. Il suffit de dire ici que cette condition est purement algébro-géométrique et ressemble à une condition de stabilité au sens de la théorie géométrique des invariants, comme prédit originellement par Yau.

Théorème 0.1 ([CDS3], voir aussi [TIA3]). — *Une variété de Fano admet une métrique de Kähler-Einstein si et seulement si elle est K-stable.*

On donnera les grandes lignes de la preuve en suivant la référence publiée [CDS1, CDS2, CDS3].

Notations : Dans ce qui suit, (X, ω) désigne une variété de Fano munie d'une métrique kählérienne dans $2\pi c_1(X)$ (on pose donc $\lambda = 1$). On note $V = (2\pi)^n c_1(X)^n$ son volume.

Pour L un fibré en droites holomorphe sur X et $\theta \in 2\pi c_1(L)$ un courant positif (ou même s'écrivant localement comme la somme d'un courant positif fermé et d'une forme régulière) de bidegré $(1,1)$ fermé, on note $| \quad |_\theta$ la métrique hermitienne.

Pour D un diviseur de Cartier sur X (ou une variété à singularités arbitraires) on note $O(D) := O_X(D)$ le fibré en droites holomorphe attaché au faisceau inversible $\mathcal{O}_X(D)$. En particulier $\Lambda^n T_X = O(-K_X)$.

1. LA MÉTHODE DE CONTINUITÉ CONIQUE DE DONALDSON

1.1. Méthode de continuité d'Aubin-Yau

On rappelle l'approche classique à l'existence de métriques de Kähler-Einstein. Toute métrique kählérienne dans la classe $\{\omega\}$ se laisse représenter sous la forme $\omega_\phi := \omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\phi$ où

$$\phi \in P(X, \omega) := \{\phi \in C^\infty(X, \mathbb{R}),\ \omega_\phi > 0\}.$$

Le *potentiel de Ricci* de ω est l'unique fonction $h \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ telle que

$$\mathrm{Ric}(\omega) - \omega = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}h, \qquad \int_X (e^h - 1)\omega^n = 0.$$

La méthode de continuité d'Aubin-Yau consiste à établir l'existence pour tout $t \in [0,1]$ d'une solution de l'équation de Monge-Ampère complexe

$$(\omega_{\phi_t})^n = e^{h - t\phi_t}\omega^n,\ \phi_t \in P(X, \omega), \tag{2}$$

ce qui équivaut à la relation $\mathrm{Ric}(\omega_{\phi_t}) = t\omega_{\phi_t} + (1-t)\omega$. On introduit I^{AY} l'ensemble des t pour lesquels (2) est compatible. I^{AY} est alors non vide (il contient $t = 0$ par [YAU]) ouvert [AUB2] et le problème est de montrer qu'il est fermé (auquel cas $1 \in I^{AY}$). Ce problème a été réduit classiquement à *l'estimée* C^0

$$\|\phi_t\|_{C^0} \leq K, \quad K \text{ uniforme en } t \in I^{AY}$$

qu'on doit déduire de la K-stabilité de X.

1.2. Métriques kählériennes coniques : définitions et exemples

1.2.1. — Soit $D = \sum_{j=1}^{r} D_j$ un diviseur à croisements normaux simples de X, de sorte que D_j est une hypersurface lisse et les D_j se coupent transversalement. Tout point de X a un système de coordonnées locales (z^i) dans lequel l'équation de D s'écrit $z^1 \dots z^k = 0$ pour un entier $0 \leq k \leq n$. Dans un tel système de coordonnées, pour chaque $1 \leq i \leq k$, $z^i = 0$ est la trace de D_{j_i} où $1 \leq j_i \leq k$ est uniquement défini. Soit $0 < \beta_1, \dots, \beta_r \leq 1$ des entiers. On considère la paire $(X, \Delta) := (X, \sum_j (1 - \beta_j) D_j)$ qui est log-lisse au sens du Programme des Modèles Minimaux.

La notion métrique adaptée à la géométrie de ces paires est :

Définition 1.1. — *Une métrique kählérienne conique sur la paire (X, Δ) est une métrique kählérienne ω_Δ sur $X \setminus D$ qui, localement près de D, est bilipschitz équivalente à la métrique modèle*

$$\omega_\beta^0 = \sqrt{-1}\Big(\sum_{i=1}^{k} \frac{dz^i \wedge d\bar{z}^i}{|z^i|^{2-2\beta_{j_i}}} + \sum_{i=k+1}^{n} dz^i \wedge d\bar{z}^i\Big),$$

et telle que les potentiels locaux Φ du courant positif fermé ω_X défini en prolongeant ω_Δ par zéro à X tout entier vérifient $\Phi \in C^{2,a,\beta}$ pour un certain $a \in]0,1[$.

Remarque 1.2. — Une métrique conique ayant masse $M = \int_{X \setminus D} \omega_\Delta \wedge \omega^{n-1}$ finie sur $X \setminus D$, le prolongement par zéro est un courant positif fermé $\omega_{X,\Delta}$ et admet bien des potentiels locaux. Il n'est pas utile ici de donner précisément la définition de $C^{2,a,\beta}$ [DON2, CDS1]. Il s'agit d'une condition de Hölder sur les coefficients de $\omega_{X,\Delta}$ dans une base adaptée à la géométrie conique.

Exemple 1.3. — Cette définition revient essentiellement à demander que la métrique devienne régulière après un changement de coordonnées multivaluées $\zeta^i = (z^i)^{\beta_i}$. En particulier, si $\beta_i = \frac{1}{n_i}$, $n_i \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ une métrique kählérienne sur l'orbifold(e) sous-jacent à (X, Δ) est kählérienne conique.

On suivra la terminologie des travaux recensés en disant qu'une métrique kählérienne conique sur la paire (X, Δ) présente une singularité conique le long de D_j, l'angle du cône étant égal à $2\pi\beta_j$.

1.2.2. — On note S_j la section tautologique du fibré en droites $O_X(D_j)$ s'annulant exactement sur D_j et par $|\ \ |$ une métrique hermitienne sur $O_X(D_j)$. La forme volume v d'une métrique kählérienne conique ω_Δ sur la paire (X, Δ) prend la forme $v = \prod_j |S_j|^{2\beta_j - 2} e^f \omega^n$ où $f \in C^0$. Utilisant la formule de Poincaré-Lelong, l'équation (1) permet de prolonger la courbure de Ricci de $\omega_\Delta|_{X \setminus D}$ à un courant représentant $2\pi c_1(X) + \{\Delta\}$:

$$\mathrm{Ric}(\omega_\Delta) = 2\pi \sum_j (1 - \beta_j)[D_j] + \theta + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi$$

avec $\psi \in C^0(X)$ et θ une $(1,1)$-forme fermée lisse.

Les résultats de [YAU] sur l'existence des métriques KE de courbure scalaire ≤ 0 sont généralisés aux métriques kählériennes coniques avec des développements asymptotiques plus précis dans [JMR] (voir [TRO] en dimension 1).

On se placera désormais uniquement dans le cas $r = 1$.

1.3. Principe de la méthode de continuité conique

Soit $\lambda \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ un entier et D un diviseur lisse dans la série linéaire $|-\lambda.K_X|$ – ce qui existe puisque $O(-K_X)$ est ample. Pour $\beta \in]1-\lambda^{-1}, 1]$, une métrique kählérienne conique ω_β d'angle $2\pi\beta$ le long de D est dite *KE* si

$$\mathrm{Ric}(\omega_\beta) = \mu\omega_\beta + 2\pi(1-\beta)[D], \tag{3}$$

où $\mu = 1-(1-\beta)\lambda^{-1}$. Soit $I^{CO} \subset]1-\lambda^{-1}, 1]$ l'ensemble des β tels qu'il existe une métrique KE d'angle $2\pi\beta$ le long de D. Alors :

– $I^{CO} \neq \emptyset$ car les β proches de $1-\lambda^{-1}$ conviennent [BER1].

– Les asymptotiques du noyau de Green des métriques kählériennes coniques de [DON2] donnent un bonne théorie elliptique permettant de voir que I^{CO} est ouvert.

Pour montrer que I^{CO} est fermé, sous l'hypothèse de K-stabilité, les travaux recensés ici commencent par établir que la limite, quand $\beta \in I^{CO}$ tend en croissant vers $\beta_\infty \leq 1$, de la variété kählérienne conique (X, ω_β) est une solution faible de l'équation KE conique. Limites et solutions faibles sont à entendre en un sens adéquat explicité plus loin.

1.4. Équations de KE tordues et formulation variationnelle

Les équations (2) et (3) se ramènent à la forme générale des *équations KE tordues*. Soit $\mu \in [0,1]$ et $T \in 2\pi c_1(X)$ un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$. L'équation KE tordue $(KE)_{X,\mu,T}$ est l'équation :

$$\mathrm{Ric}(\omega_\phi) = \mu\omega_\phi + (1-\mu)T.$$

Si T est lisse – ce qu'on suppose dans ce paragraphe seulement – il fait sens de chercher des solutions $\phi \in P(X,\omega)$. La plus utile des formulations variationnelles de ce problème s'exprime en termes d'une énergie de Mabuchi généralisée qu'on notera $E_{\mu,T}$. Pour la définir, on introduit d'abord quelques fonctionnelles classiques sur $P(X,\omega)$:

$$\begin{aligned}
J^0(\phi) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\int_X \phi\omega_\phi^k \wedge \omega^{n-k}\\
J^0_{T'}(\phi) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_X \phi\omega_\phi^k \wedge T' \wedge \omega^{n-k-1}\\
S_\omega(\phi) = &= \frac{1}{n}\int_X \log(\frac{\omega_\phi^n}{\omega^n})\omega_\phi^n,
\end{aligned}$$

où T' désigne un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ arbitraire. La fonctionnelle $n.S_\omega$ s'identifie à l'entropie relative de la mesure de probabilité $V^{-1}\omega_\phi^n$ par rapport à $V^{-1}\omega^n$. Un calcul d'intégration par parties standard fournit alors le :

LEMME 1.4. — *Pour toute $\psi \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ vue comme un vecteur tangent au cône convexe ouvert $P(X, \omega)$, on a :*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} J^0(\phi + t\psi)|_{t=0} &= \int_X \psi\ \omega_\phi^n \\
\frac{d}{dt} J^0_{T'}(\phi + t\psi)|_{t=0} &= \int_X \psi\ T' \wedge \omega_\phi^{n-1} \\
\frac{d}{dt} S_\omega(\phi + t\psi)|_{t=0} &= \int_X \psi\ (\mathrm{Ric}(\omega) - \mathrm{Ric}(\omega_\phi)) \wedge \omega_\phi^{n-1}.
\end{aligned}$$

Exemple 1.5 ([CHE2]). — La combinaison $E = -n(S_\omega + J^0 - J^0_{\mathrm{Ric}(\omega)})$ vérifie :

$$\frac{d}{dt} E(\phi + t\psi)|_{t=0} = n \int_X \psi\ (\mathrm{Ric}(\omega_\phi) - \omega_\phi) \wedge \omega_\phi^{n-1},$$

et s'identifie à l'énergie de Mabuchi [MAB] dont les extrémales sont les métriques de Kähler-Einstein.

Plus généralement :

COROLLAIRE 1.6. — *Les solutions lisses de $(KE)_{X,\mu,T}$ sont les extrémales de*

$$E_{\mu,T} := E + (1 - \mu)(J^0_\omega - J^0_T).$$

On désigne suivant [CDS1] par $E_{(1-\beta)D} = E + (1-\beta) J_D$ la fonctionnelle correspondant au cas conique avec $J_D = \lambda^{-1}(J^0_\omega - J^0_{2\pi[D]/\lambda})$.

Les points évoqués ici sont de nature formelle, mais servent de base à des conditions nécessaires et suffisantes commodes [AUB2, TIA2, PSSW] comme dans le résultat suivant. On supposera que X n'a pas de champ de vecteurs holomorphe tangent à D, ce qui est loisible.

THÉORÈME 1.7 ([LS]). — *Soit $\beta \in [0, 1[$. Alors X porte une métrique KE conique d'angle $2\pi\beta$ le long de D si et seulement si il existe deux constantes positives C_1, C_2 telles que :*

$$\forall \phi \in P(X, \omega) \qquad E_{(1-\beta)D}(\phi) \geq C_1 . J_0(\phi) - C_2$$

avec $J_0(\phi) = \int_X \phi \omega^n - J^0(\phi)$.

Remarque 1.8. — La fonctionnelle J_0 joue le rôle d'une énergie de Dirichlet non-linéaire dans la théorie du pluripotentiel sur (X, ω) [BBGZ]. Les métriques KE coniques construites sont en fait des minimiseurs de l'énergie de Mabuchi.

Remarque 1.9. — Il existe une autre formulation variationnelle utile en termes de fonctionnelles de Ding. Par exemple, les métriques KE sont les extrémales de :

$$\mathcal{D}(\phi) := V^{-1} J^0(\phi) + \log\Big(\int_X e^{-\phi} e^h V^{-1} \omega^n\Big).$$

2. MÉTRIQUES KE CONIQUES AU SENS FAIBLE

Une partie importante de l'argument de [CDS2, CDS3] consiste à comparer divers types de métriques KE coniques au sens faible introduits dans cette section.

2.1. Solutions pluripotentialistes

Lorsque le courant T n'est pas régulier, il est commode de reformuler $(KE)_{X,\mu,T}$ en une équation de Monge-Ampère $(MA)_{X,\mu,T}$ puis de chercher des solutions généralisées à l'équation $(MA)_{X,\mu,T}$ avec

$$\phi \in PSH(X,\omega) := \{\phi \in USC(X, \mathbb{R} \cup \{-\infty\}),\ \omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\phi \geq 0\}$$

telle que la mesure de Monge-Ampère ω_ϕ^n est bien définie et absolument continue (par exemple si ϕ est bornée, voir [BT]).

La formulation de $(MA)_{X,\mu,T}$ est très simple. Pour $|\quad|_h$ une métrique hermitienne sur $O(-K_X)$, on note $v(|\quad|_h)$ la forme volume attachée à $|\quad|_{h^{-1}}$, c'est-à-dire que pour toute base holomorphe locale σ de K_X on a :

$$v(|\quad|_h) = \sqrt{-1}^{n^2} \frac{\sigma \wedge \bar{\sigma}}{|\sigma|^2_{h^{-1}}}.$$

Lemme 2.1. — *ω_ϕ est solution de $(KE)_{X,\mu,T}$ si et seulement si l'équation $(MA)_{X,\mu,T}$ suivante est vérifiée :*

$$\omega_\phi^n = c.e^{-\mu\phi} v(|\quad|_T^{1-\mu} |\quad|_\omega^\mu),$$

avec $c > 0$ une constante de normalisation.

Exemple 2.2. — Soit $D \in |-\lambda K_X|$ un diviseur lisse et ω_β une métrique KE d'angle $2\pi\beta$ le long de D. On a, S désignant la section tautologique de $O_X(D)$:

$$\omega_\beta^n = c_\beta.|S|_{\lambda\omega}^{2-2\mu} e^{h-\beta\phi}\omega^n.$$

Comme observé dans [EGZ], cette formulation s'étend telle quelle au cas où on remplace X par W admettant des singularités modérées au sens du Programme des Modèles Minimaux. Plus précisément, soit W une variété projective algébrique normale (le lieu singulier W^{sing} est donc de codimension au moins 2 et $W^{reg} = W \setminus W^{sing}$ est connexe) :

Définition 2.3. — *On dit que W est $\mathbb{Q}$-Fano si*

1. *Il existe $m_0 \in \mathbb{N}_{>0}$ tel que $K_{W^{reg}}^{\otimes m_0}$ s'étend à un fibré en droites sur W, noté $O(m_0K_W)$ - on dit aussi que W est $\mathbb{Q}$-Gorenstein.*
2. *$O(m_0K_W)$ est ample.*
3. *Pour toute métrique hermitienne $|\quad|$ sur $O(m_0K_W)$, la forme volume $v(|\quad|^{1/m_0})$ sur W^{reg} est de volume fini - on dit aussi que W est klt (= Kawamata log terminal).*

Pour les notions, dues à Grauert, de métrique hermitienne singulière sur un fibré en droites, de courant positif fermé et de métrique kählérienne qui font sens sur les variétés normales, voir [EGZ].

Soit donc (W, ω) une variété $\mathbb{Q}$-Fano munie d'une métrique kählérienne ω représentant $-2\pi \frac{c_1(O(m_0 K_W))}{m_0} = -2\pi c_1(K_W)$ dans $H^{1,1}_{BC}(W)$. Si $\phi \in C^0 \cap PSH(W, \omega)$, on peut définir la mesure de Monge-Ampère ω_ϕ^n comme dans [BT] et :

Définition 2.4. — *Soit $T \in 2\pi c_1(K_W)$ un courant positif fermé et $\mu \in [0,1]$, ω_ϕ est solution faible de $(MA)_{W,\mu,T}$ si et seulement si $\phi \in C^0 \cap PSH(W, \omega)$ et on a une égalité au sens des mesures :*

$$\omega_\phi^n = c.e^{-\mu\phi} v(| \quad |_T^{1-\mu} | \quad |_\omega^{\mu}),$$

avec $c > 0$ une constante de normalisation.

Les mesures en question étant les images directes de leur restriction à W^{reg}, la relation précédente peut seulement être testée sur W^{reg}.

Définition 2.5. — *Soit $D \subset W$ un diviseur de Weil dont la trace sur W^{reg} est définie par une section de $O(\lambda K_{W^{reg}})$ et tel que $(W, (1-\beta)D)$ est une paire klt.*

On appelle métrique de Kähler-Einstein conique d'angle β le long de D au sens faible une solution faible de $(MA)_{W,\mu,T}$ où l'on a posé $T = 2\pi\lambda^{-1}[D]$ et $\mu = 1 - (1-\beta)\lambda^{-1}$.

Une telle métrique est de classe C^∞ sur $W^{reg} \setminus D$ et définit une métrique Kähler-Einstein d'angle β le long de D au sens faible sur $W^{reg} \setminus D^{sing}$. Inversement, Berman a montré que, si W et normale, un tel objet défini sur $W^{reg} \setminus D^{sing}$ dont le volume est V définit bien une métrique KE conique au sens faible (en particulier W est klt). D'autre part, dans le cas où W est lisse et D un diviseur à croisements normaux simples, il résulte de [GP, JMR] qu'une métrique KE conique au sens faible est une métrique KE conique au sens de la définition 1.1.

2.2. Limites de Gromov-Hausdorff

2.2.1. — La métrique riemannienne attachée à une variété kählérienne (U, ω) se laisse définir en coordonnées locales par le tenseur symétrique réel défini positif :

$$ds^2_\omega := 2. \sum_{i,j} g_{i\bar{j}} dz^i d\bar{z}^j \quad \text{si } \omega = \sqrt{-1} \sum_{i,j} g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j,$$

et on peut construire la distance géodésique d_ω attachée à ds^2_ω. On note $(\bar{U}, \bar{d}_\omega)$ la complétion métrique de (U, d_ω). Dans le cas où ω' est une métrique conique sur X, on peut poser $U = X \setminus D$ et il est aisé de voir que $\bar{U}$ est naturellement homéomorphe à X. On note alors $d_{\omega'}$ la fonction distance $\bar{d}_{\omega'}$ transportée sur X.

2.2.2. — Pour deux espaces métriques compacts $\mathbf{Z}_1 = (Z_1, d_1)$ et $\mathbf{Z}_2 = (Z_2, d_2)$, on définit, suivant Gromov [GRO]

$$d_{GH}(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2) := \inf_{\mathbf{Z}} d_H(Z_1, Z_2)$$

où $\mathbf{Z} = (Z, d_Z)$ est un espace métrique contenant des copies isométriques de $\mathbf{Z}_1$ et $\mathbf{Z}_2$ (on peut supposer $Z = Z_1 \amalg Z_2$) et $d_H(Z_1, Z_2) = \inf_{z_1 \in Z_1, z_2 \in Z_2} d_Z(z_1, z_2)$. L'ensemble des classes d'isométries d'espaces métriques compacts forme un espace métrique complet contractile. Le théorème de compacité de Gromov, simple mais fondamental, résulte de cette définition et de l'estimée de volume de Bishop-Gromov :

Proposition 2.6. — *Pour tout $m \in \mathbb{N}_{>0}$ et tous $\delta > 0$, la collection des variétés riemanniennes compactes m dimensionnelles (M, ds_M^2) telles que* $\mathrm{Ric} \geq -(m-1)$ *et* $\mathrm{diam}(M) \leq \delta$ *est précompacte en topologie de Gromov-Hausdorff.*

2.2.3. — L'ensemble CO des (X, d_β) avec $I^{CO} \ni \beta \geq \beta_0 > 1 - \lambda$ est précompact en topologie de Gromov-Hausdorff grâce au :

Théorème 2.7 ([CDS1]). — *Soit ω_β une métrique KE conique sur X d'angle $2\pi\beta$ le long de D lisse. Il existe une suite $(\omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de métriques kählériennes lisses telles que :*

$$\mathrm{Ric}(\omega_i) \geq \mu\omega_i$$

telles que (X, d_{ω_i}) converge au sens de Gromov-Hausdorff vers $(X, d_\beta) := (X, d_{\omega_\beta})$.

Preuve (esquisse) — Pour $\epsilon > 0$ on introduit la régularisation classique de $T = 2\pi[D]/\lambda$:

$$T_\epsilon = \omega + \frac{1}{\lambda}\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log(|S|^2_{\lambda\omega} + \epsilon^2) \geq 0.$$

Une première observation est que $E_{\mu,T_\epsilon} \geq E_{(1-\beta)D} - C_3$, C_3 indépendant de $\epsilon > 0$ et un argument basé sur le théorème 1.7 permet trouver ω_ϵ telle que $\mathrm{Ric}(\omega_\epsilon) = \mu\omega_\epsilon + (1-\mu)T_\epsilon$. Des arguments classiques permettent alors de montrer que ω_ϵ tend vers ω en topologie C^∞ sur $X \setminus D$. La convergence Gromov-Hausdorff s'obtient en majorant ω_ϵ près de D par la technique de l'estimée du second ordre de [YAU] mais nécessite un petit argument supplémentaire de théorie de Cheeger-Colding (voir plus bas). □

Les espaces métriques dans l'adhérence de CO peuvent être considérés comme des variétés de Fano KE coniques en un sens particulièrement faible.

3. ESPACES LIMITE POLARISÉS

Les espaces métriques dans l'adhérence de Gromov-Hausdorff de la collection de la proposition 2.6 sont loin d'être arbitraires. On dispose pour eux d'une théorie structurelle très riche, appelée théorie de Cheeger-Colding, développée par Anderson, Cheeger, Colding, Gromoll, Naber, Tian, ...

Cette théorie sert de fondement aux articles recensés ici qui utilisent à de nombreuses reprises des résultats issus de la formidable série d'articles [CC1, CC2, CC3, CCT]. De même, on verra ici la théorie de Cheeger-Colding comme une boîte noire en n'en formulant que les résultats indispensables sans esquisser de preuve.

3.1. Cône tangent

Il existe une variante de la convergence de Gromov-Hausdorff pour les espaces métriques localement compacts pointés. On dit que $(Z_i, d_i, p_i) \xrightarrow{GH} (Z_\infty, d_\infty, p_\infty)$ si pour tout $r > 0$, on a convergence Gromov-Hausdorff des boules métriques de rayon r centrées au point marqué $B_{d_i}(p_i, r) \xrightarrow{GH} B_{d_\infty}(p_\infty, r)$.

Définition 3.1. — *Soit (Z, d, p) un espace métrique localement compact pointé. Un cône tangent en p est un espace métrique pointé $(C_p(Z), d, p)$ apparaissant comme limite de Gromov-Hausdorff pointée d'une suite $(Z, r_i.d, p)$ avec $r_i \to 0$.*

Exemple 3.2. — Si (Z, d) est l'espace métrique sous-jacent à une métrique conique sur X, tout cone tangent en un point de $X \setminus D$ est isométrique à $\mathbb{C}^n$ tandis que tout cone tangent en un point conique est isométrique au produit métrique $\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}_\beta$ avec $\mathbb{C}_\beta := (\mathbb{C}, \sqrt{-1}\frac{dz\wedge d\bar{z}}{|z|^{2-2\beta}})$.

3.2. Ensemble régulier d'une limite de Gromov-Hausdorff

Deux classes de variétés kählériennes jouent un rôle important dans ce qui suit :

Définition 3.3. — *Pour $\bar{V}, \delta, \kappa > 0$, on désigne par $\mathcal{K}^+(n, \delta, \bar{V}, \kappa)$ (resp. $\mathcal{K}(n, \delta, \bar{V}, \kappa)$) la classe des variétés kählériennes n-dimensionnelles polarisées $(\bar{X}, L, |\ \ |_\omega, \omega)$ telles que :*

1. $\mathrm{Ric}(\omega) \geq -\frac{\omega}{2}$ *(resp. $\omega \geq \mathrm{Ric}(\omega) \geq -\frac{\omega}{2}$),*
2. $\int_{\bar{X}} \omega^n \leq \bar{V}$,
3. $\mathrm{diam}(\bar{X}, d_\omega) \leq \delta$,
4. *il existe une constante $\kappa > 0$ (constante de non-effondrement) telle que*
$$Vol(B(x, r) \geq \kappa \frac{\pi^n}{n!} r^{2n}.$$

Exemple 3.4. — Si $L = O(-K_{\bar{X}})$ et $\mathrm{Ric}(\omega) \geq \epsilon\omega$ avec $\epsilon > 0$, les deux premières hypothèses permettent grâce au théorème de Myers de borner le diamètre et grâce au théorème de comparaison de Bishop-Gromov de trouver une constante de non-effondrement dépendant de ϵ et $\bar{V}$.

Théorème 3.5 ([CCT]). — *Soit $(X_i, L_i, |\ \ |_i := |\ \ |_{\omega_i}, \omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variétés kählériennes n-dimensionnelles polarisées dans la classe $\mathcal{K}^+(n, \delta, V, \kappa)$.*

Soit (X_∞, d_∞) une limite de Gromov-Hausdorff de $(X_i, d_{\omega_i})_{i\in\mathbb{N}}$. Soit $\mathcal{R} = X_\infty^{reg} \subset X_\infty$ l'ensemble des points où tout cône tangent est isométrique à $\mathbb{C}^n$. Alors

1. *X_∞ est un espace de longueur.*

2. *L'ensemble singulier $\mathcal{S} = X_\infty \setminus \mathcal{R}$ admet une stratification*
$$\ldots \subset \mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}_1 = \mathcal{S}$$
avec $\mathcal{S}_j$ l'ensemble des points où aucun cône tangent ne se scinde métriquement sous la forme $(\mathbb{C}^{n-j+1}, 0) \times (C', p')$.
3. *$\mathcal{S}_j$ a dimension de Hausdorff inférieure ou égale à $2(n-j)$.*

La convergence de Gromov-Hausdorff permet d'introduire une distance compatible aux d_{ω_i} et à d_∞ sur $Z = X_\infty \amalg (\amalg_{i\in\mathbb{N}} X_i)$ telle que, notant $\mathbf{Z}$ l'espace métrique correspondant, $d_{\mathbf{Z}}(X_i, X_\infty) \to 0$.

Définition 3.6. — *Sous les hypothèses du théorème 3.5, on dit que (X_∞, d_∞) est un espace limite polarisé si de plus :*

1. *X^∞_{reg} est ouvert,*
2. *X^∞_{reg} porte une structure complexe, de structure presque complexe sous-jacente J_∞, un fibré en droites holomorphe L_∞ avec une métrique hermitienne h_∞ de classe $C^{2,a}$ dont la courbure est une métrique kählérienne ω_∞ de classe $C^{1,a}$,*
3. *ω_∞ est compatible à d_∞ au sens de* [DS, p. 66]*,*
4. *pour tout $\epsilon > 0$ tout compact $K \Subset X^{reg}_\infty$ a un voisinage ouvert $K \Subset U \subset X^{reg}_\infty$ muni de plongements ouverts $(\chi_i : U \to X_i)$ pour $i \gg 1$ tels que :*
   - *pour tout $x \in K$, $d_{\mathbf{Z}}(x, \chi_j(x)) \leq \epsilon$,*
   - *$\chi_j^*(L_j, |\quad|_j, \omega_j)$ converge vers $(L_\infty, |\quad|_\infty, \omega_\infty)$ en topologie $C^{2,a}$ pour $(L, |\quad|)$ et $C^{1,a}$ pour ω_∞.*

pour tout $a \in]0,1[$.

La condition 3 implique que les structures de longueur sur X^∞_{reg} induites par d_∞ et D_{ω_∞} coïncident. D'autre part X_∞ hérite de la mesure de Radon obtenue en prolongeant par zéro ω^n_∞.

Exemple 3.7. — Considérons sur une paire $(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \sum_{k=1}^l (1-\beta_k)p_k)$ une métrique plate conique, ce pour quoi il suffit de supposer $\sum_{k=1}^l (1-\beta_k) = 2$. Faisons tendre k vers l'infini de sorte que la relation $\sum_{k=1}^l (1-\beta_k) = 2$ reste satisfaite en prenant pour points singuliers les k premiers points d'un ensemble dénombrable dense. La limite de Gromov-Hausdorff correspondante aura ensemble singulier dense. La condition 1 est donc non-triviale.

Dans cet exemple, la courbure de Ricci n'est pas bornée supérieurement. Avec une telle borne, la situation est bien meilleure :

Théorème 3.8 ([CCT]). — *Si on renforce les hypothèses du théorème 3.5 en demandant que les $(X_i, L_i, |\quad|_i := |\quad|_{\omega_i}, \omega_i)$ soient de plus dans la classe $\mathcal{K}(n, \delta, \bar{V}, \kappa)$, (X_∞, d_∞) est un espace limite polarisé. De plus $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$.*

4. ALGÉBRICITÉ DE LA LIMITE DE GROMOV-HAUSDORFF

4.1. Énoncés d'algébricité

Les limites de Gromov-Hausdorff de métriques Kähler-Einstein coniques sont des métriques Kähler-Einstein coniques en un sens beaucoup plus faible que leurs analogues pluripotentialistes. La principale différence entre les deux est qu'une limite de Gromov-Hausdorff n'est pas a priori un espace $\mathbb{C}$-analytique et encore moins une variété algébrique. Le résultat clé est donc :

Théorème 4.1 ([CDS2], [CDS3]). — *Soit $(X_i, D_i, \omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variétés de Fano X_i de dimension n munies d'un diviseur lisse $D_i \in |-\lambda K_X|$ et ω_i une métrique KE conique d'angle $2\pi\beta_i$ le long de D_i avec $\lambda \in \mathbb{N}_{>0}$ et K_X^n fixés.*

Supposons que $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers β_∞ vérifiant $1-\lambda^{-1} < \beta_\infty < 1$ (resp. $\beta_\infty = 1$).

Alors, quitte à passer à une sous-suite, il existe

– *W une variété $\mathbb{Q}$-Fano,*
– *D un diviseur de Weil de W (resp. $D = \emptyset$),*
– *ω_{β_∞} une métrique KE conique d'angle $2\pi\beta_\infty$ le long de D (resp. une métrique KE) au sens faible,*
– *une suite de plongements $T_i : X_i \to \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ et $T_\infty : W \to \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ définis par un système plurianticanonique complet $|-mK_{X_i}|$ pour un certain entier positif $m = m(n, \lambda, \inf(\beta_i) - (1-\lambda^{-1}))$*

tels que le point défini par $T_i(X)$ dans le schéma de Hilbert converge vers celui défini par $T_\infty(W)$ et le point défini par $T_i(D)$ dans l'espace des cycles de Barlet (ou variété de Chow) converge vers celui défini par $T_\infty(\Delta)$.

On rappelle que le schéma de Hilbert [GRO] paramétrise les sous-schémas de $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ à polynôme de Hilbert fixé tandis que l'espace de Barlet [BAR] paramétrise les cycles de dimension et degré donnés.

Preuve (esquisse) —Par [KMM], il n'y a qu'un nombre fini de types de déformation de variétés de Fano lisses de dimension n. La famille des X_i est donc limitée et donc on peut trouver un entier positif m_0 de sorte que l'application rationnelle associée au système m_0-pluricanonique est un plongement et vérifie $H^i(O(-m_1K_{X_i})) = 0$ pour $i > 0$ et $m_0|m_1$ de sorte que $h^0(O(-m_1K_{X_i})) = N_{m_1} + 1$ est indépendant de i. Le m de l'énoncé vérifie $m_0|m$.

Les T_i sont construits de façon très simple. Il s'agit de la composition du plongement de Kodaira $X_i \to \mathbb{P}(H^0(X_i, O(-mK_{X_i})^\vee)$ avec une identification induite par l'isomorphisme $\mathbb{C}^N \to H^0(X_i, O(-mK_{X_i}))$ donné par une base orthonormale de cet espace pour la métrique L^2 attachée à ω_i. Aussi est-il tout à fait crucial d'établir que la famille de T_i est uniformément Lipschitz quand on munit $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ de la métrique de Fubini-Study.

La propreté du schéma de Hilbert implique que $T_i(X_i)$ converge vers un sous-schéma W' de $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ et l'énoncé correspondant en théorie de Barlet que $T_i(D_i)$ converge vers un cycle et définit donc un diviseur de Weil de W'.

La construction de W utilise crucialement la limite de Gromov-Hausdorff $(X_\infty, d_\infty) = \lim(X_i, d_{\omega_{\beta_i}})$ qui est un espace limite polarisé. Utilisant un argument basé sur le théorème de division de Skoda issu de la thèse de Chi Li et l'estimée C^0 partielle que nous décrirons plus loin, on peut voir que l'algèbre graduée des tenseurs plurianticanoniques holomorphes bornés sur X_∞^{reg} :

$$R = \oplus_{l\in\mathbb{N}} H^0_{L^\infty}(X_\infty^{reg}, O(-l.K_{X_\infty^{reg}}))$$

est de type fini et on peut définir une variété projective normale $W = \mathrm{Proj}(R)$. Dans la preuve du théorème, on établit que $W \simeq W'$ et on construit un homéomorphisme de X_∞ sur W. Enfin (X_∞, d_∞) s'identifie à la complétion métrique de la variété kählérienne $((W \setminus D)^{reg}, d_{\omega_{\beta_\infty}})$. □

Ce résultat est accompagné d'un théorème de régularité qui découle des mêmes techniques :

Théorème 4.2 ([CDS2], [CDS3]). — *Sous les hypothèses du théorème 4.1, si W et D sont lisses (resp. si W est lisse), alors ω_∞ est une métrique KE conique (resp. une métrique KE).*

4.2. Discussion des techniques de preuve

4.2.1. *L'estimée C^0 partielle conjecturale de Tian.* — Suite aux travaux de Tian résolvant le cas $n = 2$ du théorème 0.1 [TIA1], celui-ci a dégagé une conjecture d'estimée C^0 partielle comme outil pour attaquer le cas de dimension supérieure.

Considérons $(\bar{X}, L, |\ \ |_\omega, \omega)$ une variété kählérienne compacte n-dimensionnelle polarisée. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on peut définir une métrique L^2 sur l'espace des sections holomorphes $\mathcal{H}_k := H^0(\bar{X}, L^{\otimes k})$. Pour (s_α) une base orthonormée de $\mathcal{H}_k$ on définit la fonction de densité des états :

$$\rho_{\bar{X},k}(x) = \sum_\alpha |s_\alpha(x)|^2.$$

Définition 4.3. — *Soit $\mathcal{K}$ une classe variétés kählériennes n-dimensionnelles polarisée. On dit que $\mathcal{K}$ vérifie l'estimée C^0 partielle s'il existe une constante $b = b(\mathcal{K}) > 0$ et $k_0 = k_0(\mathcal{K})$ telle que, si $(\bar{X}, L, |\ \ |_\omega, \omega)$ est dans la classe $\mathcal{K}$ et $x \in \bar{X}$, on a :*

$$\rho_{\bar{X},k_0}(x) \geq b^2.$$

Exemple 4.4. — Si $\mathcal{K}$ est un singleton, l'estimée C^0 partielle, conséquence du théorème de plongement de Kodaira, est l'énoncé qu'une puissance tensorielle adéquate d'un fibré positif est sans point base.

Remarque 4.5. — Si dans le cadre de la méthode de continuité d'Aubin-Yau, l'estimée C^0 a lieu, l'estimée C^0 partielle suit grâce à l'estimée du second ordre de [YAU]. L'estimée C^0 partielle dans ce cadre est annoncée dans [SZE] et une preuve du théorème 0.1 utilisant cette approche est attendue comme conséquence.

Il suit de la finitude du nombre de type de déformations des variétés de Fano que le volume d'une variété de Fano n-dimensionnelle lisse est majoré par $\bar{V}(n) < +\infty$. La conjecture originelle de Tian est la suivante :

Conjecture 4.6. — *Soit $\epsilon > 0$ et $\mathcal{F}_\epsilon(n) \subset \mathcal{K}^+(n, \delta(n), \bar{V}(n), \kappa(n, \bar{V}(n)))$ la sous-classe formée des variétés de Fano $\bar{X}$, avec $L = O(-K_X)$ et $\mathrm{Ric}(\omega) \geq \epsilon\omega$, alors $\mathcal{F}_\epsilon(n)$ vérifie l'estimée C^0 partielle.*

Des résultats classiques donnent des estimées elliptiques uniformes dans la classe $\mathcal{K}^+(n, \delta, \bar{V}, \kappa)$:

Proposition 4.7. — *Il existe des constantes $C_i = C_i(n, \delta, \bar{V}, \kappa)$ telles que, si $(\bar{X}, L, |\ \ |_\omega, \omega)$ est dans la classe $\mathcal{K}^+(n, \delta, \bar{V}, \kappa)$, on a :*

1. [CRO] *Si $f \in C^\infty(\bar{X})$, $\|f\|_{\frac{2n}{n-1}} \leq C_1 \|\nabla f\|_2 + C_2 \|f\|_2$.*
2. *Pour tout $k \in \mathbb{N}_{>0}$, $H^1(\bar{X}, L^{\otimes k}) = 0$ et la norme L^2 de l'opérateur de Green $\Delta_{\bar{\partial}}^{-1}$ sur $\Omega^{0,1}(L^{\otimes k})$ est ≤ 2.*
3. *Si on désigne par $\|\ \ \|_{p,\#}$ les normes attachées à la métrique $k\omega$, pour tout $s \in H^0(\bar{X}, L^{\otimes k})$, on a $\|s\|_\infty \leq C_2 \|s\|_{2,\#}$ et $\|\nabla s\|_{\infty,\#} \leq C_2 \|s\|_{2,\#}$.*

En particulier, si on se trouve dans une classe $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}^+(n, \delta, \bar{V}, \kappa)$ formant une famille limitée et où l'estimée C^0 partielle est satisfaite, pour tout $k_0 | k$, les applications de Kodaira $\Phi_{L^{\otimes k}} : \bar{X} \to \mathbb{P}(\mathcal{H}_k)$ sont Lipschitz uniformément sur $\mathcal{K}$ pour la métrique de Fubini-Study sur $\mathbb{P}(\mathcal{H}_k)$ attachée à la métrique L^2.

4.2.2. *Le théorème de Donaldson-Sun.* — La percée majeure en direction du théorème 0.1 a été le :

Théorème 4.8 ([DS]). — *La classe $\mathcal{K}(n, \delta, \bar{V}, \kappa)$ vérifie l'estimée C^0 partielle.*

Remarque 4.9. — Le grand théorème de Matsusaka [MAT] implique que $\mathcal{K}(n, \delta, \bar{V}, \kappa)$ forme une famille limitée.

Preuve (esquisse) — Un argument de compacité ramène à démontrer cette estimation pour une suite $(\bar{X}_i, x_i)$ de variétés polarisées pointées convergeant vers un espace limite polarisé (X_∞, p).

Le théorème 3.8 admet une variante en terme des cônes tangents $(C_\infty, 0)$ de (X_∞, p). Comme l'ensemble des points singuliers de X_∞ (resp. de Y_∞ où Y_∞ désigne la sphère unité centrée en l'origine du cône C_∞) est de codimension de Hausdorff < 2, pour tout $\eta > 0$, il existe χ lipschitzienne sur X_∞ (resp. Y_∞) nulle près de l'ensemble singulier et égale à 1 telle que $\int |\nabla \chi|^2 \leq \eta$.

On peut transplanter une section holomorphe σ_∞ de L_∞^k sur X_∞^{reg} vers les X_j en transplantant à l'aide des χ_j du théorème 3.6 la section presque holomorphe $\chi.\sigma_\infty$ puis en prenant la projection L^2 sur l'espace des sections holomorphes. La technique des estimées L^2 de Hörmander donne des contrôles quantitatifs sur ce procédé qui définit une application linéaire :

$$Q_j : H^0_{L^\infty}(X_\infty^{reg}, L_{reg}^{\otimes k}) \to H^0(X_j, L_j^{\otimes k}).$$

Si on négligeait le problème que le fibré limite sur C_∞^{reg}, qui est plat, peut avoir une holonomie non triviale, une méthode similaire permettrait de transplanter une fonction holomorphe sur C_∞^{reg} sur X_j en une section presque holomorphe puis holomorphe de $L_j^{\otimes k}$. Pour régler ce problème d'holonomie, il faut se restreindre à des entiers k tels que l'holonomie de L_∞^k est proche de 1, ce qui existe car l'espace des fibrés $U(1)$ plats sur C_∞ est une limite projective de tores réels compacts.

La mise au point est plutôt technique et nécessite une variante quantitative de l'argument usuel d'estimées L_2 de Hörmander pour déduire qu'un fibré positif est sans point base. □

La technique de transplantation de sections de X_∞ sur X_j introduite dans ce schéma de preuve n'y est pas vraiment utilisée. En revanche, elle permet pour η assez petit de montrer que les Q_j sont des isomorphismes. Une fois ce point établi, les points de Hilbert $T_j(X)$ convergent vers $T_\infty(W)$ avec les notations introduites dans l'esquisse de preuve du théorème 4.1.

Ceci permet de montrer un prototype non-conique du théorème 4.1 obtenu en substituant $\beta_i = \beta_\infty = 1$ dans l'énoncé.

4.2.3. $\beta_\infty < 1$. — La première difficulté supplémentaire dans [CDS2] est que $\mathcal{S}_1 \neq \mathcal{S}_2$. La construction de fonctions de cut-off χ du paragraphe précédent n'est donc possible que pour la seconde strate $\mathcal{S}_2$ de l'ensemble singulier. Il est donc nécessaire de construire en tout point p de $\mathcal{S}_1 \setminus \mathcal{S}_2$ un système de coordonnées locales holomorphes (z^i) sur X_∞ réalisant la trace de $\mathcal{S}_1$ comme $\{z^1 = 0\}$.

L'information fournie ici par la théorie de Cheeger-Colding est que $\mathcal{R}$ est ouvert et que tout cône tangent en p est isométrique à $\mathbb{C}^{n-1} \times (\mathbb{C}_\gamma, 0)$ pour un certain $0 < \gamma = \gamma(p) < 1$ bien déterminé et $\inf_{p\in\mathcal{S}_1\setminus\mathcal{S}_2} \gamma(p) > 0$. L'ensemble singulier d'un tel cône est une sphère riemannienne comme on le voit en faisant un changement de coordonnées polaires $(r, \theta) = (\rho^\gamma, \theta)$ sur le second facteur.

Cette information est cruciale pour appliquer une technique de transplantation de fonctions holomorphes du cône en p en des sections holomorphes de L_j qui par passage à la limite permettront de construire les systèmes de coordonnées locales cherchés.

L'autre difficulté majeure qui apparaît est qu'on ne peut pas espérer que D soit réduit et irréductible et qu'il faut contrôler les multiplicités qui apparaissent.

4.2.4. $\beta_\infty = 1$. — Dans ce cas, la théorie de Cheeger-Colding n'est pas suffisante pour affirmer que $\mathcal{R}$ est ouvert. Cette difficulté apparaitrait si l'adhérence de $\bigcup_i D_i$ dans $\mathbf{Z}$ recouvrait X_∞. Cette recension n'abordera pas les nouveaux raffinements de la méthode de [DS] mis en œuvre par [CDS3] pour la résoudre.

5. CONFIGURATIONS TEST ET INVARIANTS DE FUTAKI GÉNÉRALISÉS

5.1. L'obstruction de Futaki et ses généralisations

5.1.1. — Le groupe ($\mathbb{C}$-algébrique) $G = \mathrm{Aut}(X, D)$ des automorphismes de X préservant D agit naturellement sur l'espace des métriques kählériennes de classe $\{\omega\}$

$$K(X,\omega) = P(X,\omega)/\mathbb{R}$$

où $c \in (\mathbb{R},+)$ agit sur $P(X,\omega)$ par $\phi \mapsto \phi + c$. La fonctionnelle $E_{(1-\beta)D}$ descend à $K(X,\omega)$ mais n'est pas invariante par l'action de G. C'est seulement sa différentielle $dE_{(1-\beta)D}$ qui est G-invariante. À tout $v \in \mathrm{Lie}(G) = H^0(X, \Theta_X(\log D))$ et $\omega_\phi \in K(X,\omega)$ on peut associer $u_v := u_v(\omega_\phi) \in C^\infty(X,\mathbb{R})$ un relevé via l'isomorphisme $C^\infty(X,\mathbb{R})/\mathbb{R} = T_{\omega_\phi}K(X,\omega)$ du vecteur tangent à $K(X,\omega)$ correspondant à v par cette action différentiable de G pris en ω_ϕ. Un argument élémentaire utilisant la formule de Cartan établit que $< (dE_{(1-\beta)D})_\phi(u_v(\omega_\phi)) >$ est indépendant de ω_ϕ.

Définition 5.1. — *L'invariant de Futaki de v est le nombre réel :*

$$\mathrm{Fut}_\beta(X,v) = \frac{d}{dt}E_{(1-\beta)D}(\phi + tu_v)|_{t=0}.$$

Lemme 5.2. — *Si X a une métrique KE conique d'angle $2\pi\beta$ le long de D, on a $\mathrm{Fut}_\beta(X,v) = 0$.*

Remarque 5.3. — Historiquement, la découverte de cette obstruction par Futaki [FUT] a précédé l'introduction de la fonctionnelle de Mabuchi [MAB] et la simplification de formulation donnée ici résulte de l'exemple 1.5.

Lemme 5.4. — *$u_v(\omega_\phi) = \mathrm{Re}(\theta_v(\omega_\phi))$ où $\theta_v = \theta_v(\omega_\phi)$ vérifie $\sqrt{-1}\bar\partial\theta_v = i_v\omega_\phi$.*

Preuve — On note que $\bar\partial i_v\omega_\phi = (di_v\omega_\phi)^{0,2} = (L_v\omega_\phi)^{0,2} = 0$. Comme X est Fano, le théorème d'annulation de Kodaira implique que $H^{0,1}(X) = 0$. D'où l'existence de θ_v. La formule de Cartan implique aussi que $\sqrt{-1}\partial\bar\partial\theta_v(\omega_\phi) = L_v\omega_\phi$. Or, par définition, $u_v(\omega_\phi)$ est la $\sqrt{-1}\partial\bar\partial$ primitive de $L_{\mathrm{Re}(v)}\omega_\phi$. □

Exemple 5.5. — Si v est le générateur infinitésimal d'un groupe à un paramètre $\mathbb{C}^* \subset G$ de sorte que le sous-groupe $\mathbb{S}^1$ opère par isométries de ω_ϕ, la relation $d\theta_v = i_{2\mathrm{Im}(v)}\omega_\phi$ implique que θ_v s'identifie au hamiltonien H de l'action de $\mathbb{S}^1$ sur la variété symplectique sous-jacente à (X,ω_ϕ) et l'invariant de Futaki admet l'expression analytique :

$$\mathrm{Fut}_\beta(X,v) = \int_X H.(\mathrm{Ric}(\omega) - \omega)\omega^{n-1} - (1-\beta)(2\pi\int_D H\omega^{n-1} - \lambda\int_X H\omega^{n-1}).$$

5.1.2. — Cette formulation a permis à Ding et Tian de donner la généralisation suivante :

Définition 5.6 ([DT]). — *Soit $W \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ une sous-variété normale $\mathbb{Q}$-Fano plongée par $|-mK_W|$ et $D \subset W$ un diviseur de Weil dans $|-\lambda.K_W|$. On suppose que W et D sont stables par un sous-groupe à un paramètre $\sigma : \mathbb{C}^* \subset G$ de sorte que le sous-groupe $\mathbb{S}^1$ opère par isométries de la métrique de Fubini-Study ω_{FS} (prise dans la classe $\frac{1}{m}c_1(O_{\mathbb{P}^N(\mathbb{C})}(1))$) avec hamiltionien H. On pose :*

$$\mathrm{Fut}_\beta(W, D, \sigma) := \int_W H.(\mathrm{Ric}(\omega_{FS}) - \omega_{FS})\omega^{n-1} - (1-\beta)(2\pi \int_D H\omega_{FS}^{n-1} - \lambda \int_W H\omega_{FS}^{n-1}).$$

On peut remplacer ω_{FS} par une métrique kählérienne quelconque ω_W. Le fait que l'expression est bien définie et indépendante de ω_W est établi dans [DT].

5.1.3. — Donaldson a à la fois généralisé et interprété la construction précédente dans le langage de la géométrie algébrique dans [DON1], voir [BIQ].

Définition 5.7. — *Une configuration test, d'ordre r un entier positif, est une donnée $\Xi = (\pi : \mathcal{X} \to \mathbb{C}, \mathcal{L}, i)$, où*
- *Ξ est une variété quasiprojective normale,*
- *π, équivariant par une action du groupe algébrique $\mathbb{C}^*$, est un morphisme projectif plat,*
- *$\mathcal{L}$ est un faisceau inversible π-ample linéarisé par cette action,*
- *i est un isomorphisme $i : (X, \mathcal{O}(-rK_X)) \to (\mathcal{X}_1 := \pi^{-1}(\{1\}), \mathcal{L}|_{\mathcal{X}_1})$.*

Posant $d_k = \dim H^0(X, O(-rkK_X)) = \dim H^0(\mathcal{X}_0, \mathcal{L}^{\otimes k}|_{\mathcal{X}_0})$ et notant par w_k l'entier tel que $\mathbb{C}^*$ agit par le caractère $(t \to t^{w_k})$ sur $\det H^0(\mathcal{X}_0, \mathcal{L}^{\otimes k}|_{\mathcal{X}_0})$, w_k et kd_k sont, quand $k \to \infty$, des polynômes de degrés $n+1$. On définit alors un nombre réel $DF(\Xi)$ par le développement :

$$\frac{w_k}{kd_k} = F_0(\Xi) - \frac{DF(\Xi)}{k} + O(k^{-2}).$$

C'est un invariant de la fibre centrale et de l'action induite σ et, quand $\mathcal{X}_0$ est lisse, une application du théorème de Riemann-Roch équivariant permet de montrer que $DF(\Xi) = \mathrm{Fut}_1(W, \sigma)$ [DON1]. Le diviseur D se prolonge en un diviseur équivariant $\mathcal{D}$ sur $\pi^{-1}(\mathbb{C}^*)$ equivariant qui à son tour définit une configuration test Ξ_D pour $(D, \mathcal{L}_D)$ (en un sens trivialement généralisé, la polarisation de D n'étant pas plurianticanonique). On pose :

$$\mathrm{Fut}_\beta(\Xi) := DF(\Xi) - (1-\beta)\frac{n\lambda}{2r}(F_0(\Xi) - F_0(\Xi_D)).$$

L'argument évoqué ci-dessus peut s'adapter pour montrer que :

Proposition 5.8. — *Si $\mathcal{X}_0$ est normale, posant $D_0 = \mathcal{D}_0$, on a $\mathrm{Fut}_\beta(\Xi) = \mathrm{Fut}_\beta(\mathcal{X}_0, D_0, \sigma)$.*

5.2. Conclusion de la preuve du théorème 0.1

5.2.1. *Définition de la K-stabilité.* —

DÉFINITION 5.9. — *X est K-stable si et seulement si pour toute configuration test Ξ non triviale (c'est-à-dire dont la fibre centrale n'est pas isomorphe à X), on a* $\mathrm{Fut}(\Xi) > 0$.

Il est connu qu'on peut se limiter aux tests configurations à fibre centrale normale [LX].

5.2.2. — La K-stabilité des variétés de Fano est un phénomène qui a d'abord été mis en évidence par Tian [TIA2] puis complètement établi dans le cas lisse par [STO]. Une forme particulièrement perfectionnée est le :

THÉORÈME 5.10 ([BER2]). — *Si W est une variété $\mathbb{Q}$-Fano portant une métrique KE d'angle $2\pi\beta$ au sens faible, elle est K-stable.*

PREUVE (esquisse) — Le problème des métriques KE faibles admet une formulation variationnelle en terme d'une fonctionnelle de Mabuchi généralisée mais aussi en termes d'une fonctionnelle de Ding comme dans l'exemple 1.9 [BBGZ, BBEGZ]. On définit d'abord pour $\phi \in PSH(W,\omega)$ des analogues des fonctionnelles $E, J_0, \ldots$ en demandant que ces fonctionnelles soient continues par limites décroissantes. Pour $\phi \in L^\infty \cap PSH(W,\omega)$, les valeurs de ces fonctionnelles sont finies. Ceci permet de définir une fonctionnelle de Ding :

$$\mathcal{D}_{(1-\beta)D}(\phi) = -(1-\mu)V^{-1}J^0(\phi) - \log \int_W |S|_{\lambda\omega}^{2-2\beta} e^{h-\beta\phi}\omega^n.$$

Les métriques KE coniques faibles sont les minimisateurs de $\mathcal{D}_{(1-\beta)D}$.

On peut également généraliser l'étude des géodésiques faibles de l'espace des métriques de Kähler effectuée dans le cas lisse par [CHE1]. Suivant Donaldson et Semmes, un segment géodésique faible $PSH(W,\omega)$ est une application continue $([a,b] \to PSH(W,\omega), t \mapsto \phi_t)$ telle que sur $X \times \{z \in \mathbb{C},\ e^a < |z| < e^b\}$ la fonction $\Phi(x,z) = \phi_{\log|z|}(x)$ vérifie

$$(\omega + \sqrt{-1}\partial\bar\partial\Phi)^{n+1} = 0. \tag{4}$$

Pour tous ϕ_0, ϕ_1 un tel segment s'obtient en prenant une enveloppe convenable car la fonction Φ est maximale parmi les fonctions ω-plurisousharmoniques avec ces valeurs au bord.

Généralisant un résultat de Berndtsson [BERN], on peut voir que la fonctionnelle de Ding est finie et convexe le long des géodésiques faibles. Un tel résultat de convexité est attendu pour la fonctionnelle de Mabuchi mais les théorèmes de régularité nécessaires ne sont pas disponibles.

Chaque test configuration Ξ et chaque $\phi \in PSH(W,\omega)$ donnent lieu à un segment géodésique $\psi_t :]-\infty, 0] \to PSH(W,\omega)$ en résolvant le problème de Dirichlet sur $\pi^{-1}(\{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\})$ pour l'équation de Monge-Ampère complexe homogène (4) de valeur au bord ϕ et Berman montre que

$$\mathrm{Fut}_\beta(\Xi) \geq -\frac{1}{n} \lim_{t\to 0} \frac{d}{dt}\mathcal{D}_{(1-\beta)D}(\psi_t).$$

La semipositivité de l'invariant de Futaki résulte alors du fait qu'une métrique de KE conique faible minimise la fonctionnelle de Ding qui est convexe au sens des géodésiques faibles. Sa positivité résulte d'une analyse soigneuse du cas où $\mathcal{D}_{(1-\beta)D}(\psi_t) = cste$. □

5.2.3. — Soit β_i une suite croissante d'éléments de I^{CO} convergeant vers $\beta_\infty \in]1-\mu, 1]$. En appliquant le théorème 4.1, on trouve une métrique KE au sens faible sur une paire $(W, (1-\beta_\infty)D)$ avec W une variété $\mathbb{Q}$-Fano, en particulier normale.

Proposition 5.11. — *W apparaît comme la fibre centrale d'une configuration test Ξ telle que* $\mathrm{Fut}_\beta(\Xi) = 0$.

Preuve (esquisse) — Le premier ingrédient est un théorème de Matsushima pour les métriques de KE coniques au sens faible, à l'aide des techniques pluripotentialistes ci-dessus, d'où il ressort que $\mathrm{Aut}(W, D)$ (resp. $\mathrm{Aut}(W)$ si $\beta_\infty = 1$) est réductif.

Le lemme suivant est une conséquence observée par Donaldson d'un théorème de tranche différentielle de type Luna et du critère de Hilbert-Mumford :

Lemme 5.12. — *Soit $G \subset PGL(M+1)$ un groupe réductif agissant sur $\mathbb{P}^M(\mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{P}^M(\mathbb{C})$. Soit $x' \in \overline{G.x} \setminus Gx$. Alors il existe $g \in G$ et $\sigma : \mathbb{C}^* \to G$ un sous-groupe à un paramètre tel que $x' = \lim_{t\to 0} \sigma(t).g.x$ si le stabilisateur de x' dans G est un sous-groupe réductif de G.*

Ceci s'applique naturellement dès qu'on a une action sur une variété projective polarisée donc avec le point. Notons que les $(T_i(X), T_i(D))$ sont dans l'orbite sous $G = PGL(N+1)$ de la paire (X, D) vue comme un point x du produit du schéma de Hilbert par la variété de Chow. Posant $x' = (W, D)$ (resp. $x' = W$ si $\beta_\infty = 1$)), on conclut de la réductivité de $\mathrm{Aut}(W, D)$ que, si $x' \notin G.x$, (W, D) (resp. W) est la limite plate d'un groupe à un paramètre σ appliqué à x, c'est-à-dire qu'il existe une configuration test de fibre centrale W.

Or, les méthodes pluripotentialistes permettent d'établir une généralisation de l'obstruction de Futaki aux métriques KE coniques au sens faible, de sorte que $\mathrm{Fut}_\beta(W, D, \sigma) = 0$ pour $\beta = \beta_\infty$.

En effet, chaque sous-groupe à un paramètre $\sigma : \mathbb{C}^* \to \mathrm{Aut}(W, D)$ induit, dont le sous-groupe $\mathbb{S}^1$ opère par isométries, donne lieu à une géodésique $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ en posant $\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\phi_t = \sigma(e^t)^*\omega$.

Or un calcul assez simple donne que $\mathrm{Fut}_\beta(W, \frac{d}{dt}\sigma) = -\frac{1}{n}\frac{d}{dt}\mathcal{D}_{(1-\beta)D}(\phi_t)$ donc $\mathrm{Fut}_\beta = 0$. □

Si $\beta_\infty < 1$ comme $\mathrm{Fut}_\beta(\Xi)$ est linéaire en β par définition et positif pour β petit par le théorème 5.10, on obtient $\mathrm{Fut}(\Xi) < 0$. Si $\beta_\infty = 1$, on obtient par convexité et du fait que les métriques KE coniques minimisent Fut_β que $\mathrm{Fut}_\beta(\Xi) = 0$.

La définition de K-stabilité force alors la configuration test à vérifier $W \simeq X$, et par le théorème 4.2, il suit bien que $\beta_\infty \in I^{CO}$.

RÉFÉRENCES

[AUB] T. AUBIN – *Équations du type Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes*, Bull. Sci. Math. 102 (2) no. 1(1978), 63–95.

[AUB2] T. AUBIN – *Réduction du cas positif de l'équation de Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes à la démonstration d'une inégalité*, J. Funct. Anal., Vol. 57 (1984), 143–153.

[BAR] D. BARLET – *Familles analytiques de cycles paramétrées par un espace analytique réduit*, Sém. Norguet, Vol. II, Lect. Notes in Math., Vol. 482 (1975), 1-158.

[BT] E. BEDFORD, B.-A.TAYLOR – *A new capacity for plurisubharmonic functions.* Acta Math. Vol. 149 no. 1-2 (1982), 1–40.

[BER1] R. BERMAN – *A thermodynamical formalism for Monge-Ampère equations, Moser-Trudinger inequalities and Kähler-Einstein metrics*, Adv. in Math., Vol. 248 (2013), 1254–1297.

[BER2] R. BERMAN – *K-polystability of* $\mathbb{Q}$*-Fano varieties admitting Kähler-Einstein metrics*, Preprint arxiv : 1205.6214.

[BBGZ] R. BERMAN, S. BOUCKSOM, V. GUEDJ, A. ZERIAHI – *A Variational approach to complex Monge-Ampère equations*, Pub. Math. IHES Vol. 117 (2013), 179–245.

[BBEGZ] R. BERMAN, S. BOUCKSOM, P. EYSSIDIEUX, V. GUEDJ, A. ZERIAHI – *Kähler-Ricci flow and Ricci iteration on log-Fano varieties*, Preprint, arXiv :1111.7158.

[BERN] B. BERNDTSSON – *A Brunn-Minkowski type inequality for Fano manifolds and some uniqueness theorems in Kähler geometry*, Inv. Math. (2014), published online DOI :10.1007/s00222-014-0532-1.

[BOU1] J.-P. BOURGUIGNON – *Premières formes de Chern des variétés kählériennes compactes*, Sém. Bourbaki 1977/78, Exp. n° 507, Lect. Notes in Math. Vol. 710 (1979), 1–21.

[BOU2] J.-P. BOURGUIGNON – *Métriques d'Einstein-Kähler sur les variétés de Fano : obstructions et existence*, Sém. Bourbaki 1996/97, Exp. n° 830, Astérisque Vol. 245 (1997), 277–305.

[BIQ] O. BIQUARD – *Métriques kählériennes extrémales sur les surfaces toriques d'après Donaldson*, Sém. Bourbaki 2009/2010, Exp. n° 1018, Astérisque Vol. 339 (2011), 181–201.

[CC1] J. CHEEGER, T. COLDING – *Lower bounds on Ricci curvature and the almost rigidity of warped products*, Ann. of Math. Vol. 144 (1996), 189-237.

[CC2] J. CHEEGER, T. COLDING – *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below, I*, J. Diff. Geom. Vol.46 n. 3 (1997), 406–430.

[CC3] J. CHEEGER, T. COLDING – *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below, II*, J. Diff. Geom. Vol. 54 n. 1 (2000), 13–35.

[CCT] J. CHEEGER, T. COLDING, G. TIAN – *On the singularities of spaces with bounded Ricci curvature*, Geom. Funct. Anal., Vol. 12 (2002), 873–914.

[CHE1] X.-X. CHEN – *The space of Kähler metrics*, J. Diff. Geom. Vol. 56 n. 2 (2000), 189–234.

[CHE2] X.-X. CHEN – *On the lower bound of the Mabuchi energy and its application*, Int. Math. Res. Notices, Vol. 12 (2000), 607–623.

[CDS1] X.-X. CHEN, S. DONALDSON, S. SUN – *Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds I*, J. Amer. Math. Soc., Vol. 28 n. 1 (2015), 183–197.

[CDS2] X.-X. CHEN, S. DONALDSON, S. SUN – *Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds II*, J. Amer. Math. Soc., Vol. 28 n. 1 (2015), 199–234.

[CDS3] X.-X. CHEN, S. DONALDSON, S. SUN – *Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds III*, J. Amer. Math. Soc., Vol. 28 n. 1 (2015), 235–278.

[CRO] C. CROKE – *Some isoperimetric inequalities and eigenvalue estimates*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. (4) Vol. 113 n. 4 (1980), 419–435.

[DT] W. DING, G. TIAN – *Kähler-Einstein metrics and the generalized Futaki invariants*, Inv. Math. Vol. 110 (1992), 315–335.

[DON1] S. DONALDSON – *Scalar curvature and stability of toric manifolds*, J. Diff. Geom. Vol. 62 n. 2 (2002), 289–349.

[DON2] S. DONALDSON – *Kähler metrics with cone singularities along a divisor*, Essays in mathematics and its applications, Springer (2012), 49–79.

[DS] S. DONALDSON, S. SUN – *Gromov-Hausdorff limits of Kähler manifolds and Algebraic Geometry*, Acta Math. Vol. 213 n.1 (2014), 63–106..

[EGZ] P. EYSSIDIEUX, V. GUEDJ, A. ZERIAHI – *Singular Kähler-Einstein metrics*, J. Amer. Math. Soc., Vol. 22 n. 3 (2009), 607–639.

[FUT] A. FUTAKI – *An obstruction to the existence of Einstein-Kähler metrics*, Invent. Math. Vol. 73 (1983), 437–443.

[GRO] M. GROMOV – *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces* Progress in Math. n. 152 3rd. edition (2006), Birkhäuser Basel, 589p.

[GRO] A. GROTHENDIECK – *Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique IV : les schémas de Hilbert.* Sém Bourbaki 1960/961, Exp. n° 221, réédition S.M.F. Vol. 6 (1995), 99–118.

[GP] H. GUÉNANCIA, M. PĂUN – *Conic singularities metrics with prescribed Ricci curvature : the case of general cone angles along normal crossing divisors*, Preprint arxiv : 1307.6375.

[KMM] J. KOLLÁR, Y. MIYAOKA, S. MORI – *Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds*, J. Diff. Geom Vol. 36 (1992), 765–769.

[JMR] L. JEFFRES, R. MAZZEO, Y. RUBINSTEIN – *Kähler-Einstein metrics with edge singularities*, Preprint arxiv : 1105.5216.

[LS] C. LI, S. SUN – *Conical metrics revisited*, Preprint arxiv : 1207.5011.

[LX] C. LI, C. XU – *Special test configurations and stability of Fano manifolds*, Annals of Math. Vol. 180 n. 1 (2014), 197–232.

[MAB] T. MABUCHI – *A functional integrating Futaki's invariant*, Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences 61 (1985), no. 4, 119–120.

[MAT] T. MATSUSAKA – *Polarized varieties with a given Hilbert polynomial*, Amer. J. Math. Vol. 105 (1972), 283–292.

[PSSW] D.-H. PHONG, J. SONG, J. STURM, B. WEINKOVE, – *The Moser-Trudinger inequality on Kähler-Einstein manifolds*, Amer. J. Math. Vol. 130 n. 4 (2008), 1067–1085,

[STO] J. STOPPA – *K-stability of constant scalar curvature Kähler manifolds*, Adv. in Math. Vol. 221 n. 4 (2009), 1397–1408.

[SZE] G. SZÉKELYHIDI – *The partial C^0-estimate along the continuity method*, Preprint arxiv : 1310.8471.

[TRO] M. TROYANOV – *Prescribing curvature on compact surfaces with conical singularities*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 324 (1991), 793–821.

[TIA1] G. TIAN – *On Calabi's conjecture for complex surfaces with positive first Chern class*, Inv. Math. Vol. 101 (1990), 101–172.

[TIA2] G. TIAN – *Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature*, Inv. Math. Vol 130 n. 1 (1997), 1–37.

[TIA3] G. TIAN – *K-stability and Kähler-Einstein metrics*, Preprint arxiv :1211.4699.

[YAU] S.-T. YAU – *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation*, Comm. Pure Appl. Math. Vol. 31 (1978), 339–441.

Philippe EYSSIDIEUX

Université de Grenoble
Institut Fourier
UMR 5582 du CNRS
100, rue des Maths
B.P. 74
F–38402 Saint Martin D'Hères
E-mail : philippe.eyssidieux@ujf-grenoble.fr