Séminaire BOURBAKI Janvier 2015
67ème année, 2014-15, n$^{\text{o}}$ 1094

DE NOUVELLES UTILISATIONS DU PRINCIPE DU MAXIMUM EN GÉOMÉTRIE

[d'après B. Andrews, S. Brendle, J. Clutterbuck]

par **Gilles CARRON**

INTRODUCTION

Le principe du maximum est un outil simple mais puissant pour étudier des problèmes géométriques qui se formulent à l'aide d'une équation aux dérivées partielles elliptique ou parabolique. Cet outil avait par exemple été utilisé par S.-T. Yau et T. Aubin dans la résolution du problème de Calabi pour obtenir des estimées a priori des solutions d'une équation de Monge-Ampère. Récemment, les techniques de doublement de variables conjuguée avec une application d'un principe du maximum ont permis de démontrer des résultats majeurs en théorie spectrale, dans l'étude des hypersurfaces de l'espace euclidien ou concernant la classification des tores à courbure moyenne constante de la sphère $\mathbb{S}^3$. B. Andrews et S. Brendle ont rédigé de très bons survols sur l'application de ces techniques en géométrie et sur leurs travaux [4, 5, 24, 27], aussi il sera préférable de se référer à ces textes pour avoir un aperçu plus complet et se rendre compte de la fécondité de ces idées.

Nous voulons ici illustrer l'efficacité et l'élégance de ces méthodes et nous avons choisi pour cela de présenter de façon relativement complète la résolution de deux problèmes célèbres : le premier, résolu par B. Andrews et J. Clutterbuck [8], fournit une minoration optimale de l'écart entre les deux premières valeurs propres du laplacien d'un domaine convexe (pour les conditions de Dirichlet), le second, résolu par S. Brendle [22], est la conjecture de H. B. Lawson suivant laquelle les tores plongés minimalement dans la sphère $\mathbb{S}^3$ sont les tores de Clifford.

Nous omettrons cependant deux ou trois calculs assez longs qui sont très bien menés et expliqués dans les articles originaux et parfois l'argumentation proposée ici emprunte des idées apparues postérieurement. Par exemple, nous finaliserons la preuve du résultat de B. Andrews et J. Clutterbuck à l'aide d'une idée de L. Ni [52] et pour exposer la démonstration de la conjecture de H. B. Lawson, l'utilisation du principe du maximum pour les équations elliptiques dégénérées de J.-M. Bony [20] sera remplacée par le principe du maximum pour les sous-solutions de viscosité ; cette formulation en terme de sous-solutions de viscosité s'est imposée par la suite dans les travaux de B. Andrews,

M. Langford et J. McCoy [10] et de S. Brendle [26] à propos du mouvement par courbure moyenne des hypersurfaces de l'espace euclidien.

Les techniques présentées ici ont été largement utilisées ailleurs, elles sont par exemple incontournables lorsqu'il s'agit de démontrer un principe du maximum pour les sous-solutions de viscosité d'une EDP elliptique d'ordre 1 ou 2 [29]. On attribue à S. N. Kružkov la première utilisation de ces techniques qu'il utilisait pour estimer le module de continuité de la dérivée d'une solution d'EDP parabolique non linéaire en une dimension d'espace [45]. Cette technique a aussi été largement utilisée pour démontrer des estimations de convexité pour des solutions de certaines EDP, on pourra à ce propos consulter la seconde partie du mémoire de B. Kawohl qui est consacrée à ces questions [42]. C'est d'ailleurs cette technique qui a permis à N. Korevaar [43] de fournir une preuve particulièrement élégante du résultat suivant de H. J. Brascamp et E. H. Lieb [21] :

Théorème 0.1. — *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine convexe et $V\colon \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, alors l'état fondamental de la réalisation de Dirichlet de l'opérateur*

$$-\Delta + V = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \ + V$$

est log-concave.

Afin d'illustrer les potentialités de cette méthode, nous esquissons ici la preuve fournie par N. Korevaar :

Démonstration. — Par approximation et continuité de l'état fondamental par rapport aux déformations du potentiel et du domaine, nous supposerons que $\partial\Omega$ et V sont lisses et strictement convexes. On considère alors l'état fondamental de la réalisation de Dirichlet de l'opérateur $-\Delta+V = -\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \ +V$, c'est-à-dire la fonction lisse $f_1\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ strictement positive dans Ω, nulle sur $\partial\Omega$, L^2-unitaire et vérifiant l'équation :

$$-\Delta f_1 + V f_1 = \lambda_1 f_1.$$

On pose alors $u := \ln f_1$ et on veut démontrer que la fonction

$$Z(x,y) = u(x) + u(y) - 2u\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

est négative sur $\Omega \times \Omega$. On peut démontrer que nos hypothèses impliquent que

$$\limsup_{(x,y)\to\partial(\Omega\times\Omega)} Z(x,y) = 0\,.$$

Pour conclure, il suffit maintenant de vérifier que, si Z atteint son maximum en un point $(x,y) \in \Omega \times \Omega$, alors $Z(x,y) = 0$.

Considérons un tel maximum global $(x,y) \in \Omega \times \Omega$ et posons $m = (x+y)/2$. L'annulation des dérivées premières de Z en (x,y) mène facilement aux équations :

$$du(x) = du(m) = du(y)\,. \tag{1}$$

La fonction $v \mapsto u(x+v) + u(y+v) - 2u(m+v)$ admet un maximum local en $v = 0$, ainsi son laplacien en $v = 0$ est négatif :

$$\Delta u(x) + \Delta u(y) - 2\Delta u(m) \leq 0\,.$$

Mais en se servant de l'équation vérifiée par f_1, nous obtenons :

$$\Delta u = -\lambda_1 + V - |du|^2\ ;$$

et en injectant cette formule dans l'inégalité précédente et en se servant des identités (1), nous obtenons l'inégalité :

$$V(x) + V(y) - 2V\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq 0\,;$$

or V est supposé strictement convexe donc $x = y$ et $Z(x,y) = 0$. □

Dans une première partie, nous prendrons le temps de comparer la méthode classique à la *Li-Yau* [50] pour obtenir des estimations spectrales à celle utilisant les techniques de doublements de variables ; nous espérons ainsi convaincre le lecteur de l'efficacité de cette méthode. Dans une deuxième partie, nous présenterons les arguments clés et les idées de la preuve du résultat de B. Andrews et J. Clutterbuck [8] :

Théorème 0.2. — *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine convexe de diamètre D et $V\colon \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et notons*

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \ldots$$

le spectre de la réalisation de Dirichlet de l'opérateur $-\Delta + V$; alors l'écart fondamental $\lambda_2 - \lambda_1$ de l'opérateur $-\Delta + V$ est minoré par celui du laplacien sur un segment de diamètre D :

$$\lambda_2 - \lambda_1 \geq 3\,\frac{\pi^2}{D^2}.$$

Un des points clés de la preuve de B. Andrews et J. Clutterbuck est justement une amélioration subtile du résultat de Brascamp-Lieb sur la log-concavité de l'état fondamental. L'écart fondamental permet de préciser le comportement en grand temps des solutions positives de l'équation de la chaleur : si $u\colon \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ est une solution positive non nulle de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \Delta u(t,x) - V(x)u(t,x) \text{ si } (t,x) \in [0,+\infty[\times\Omega$$
$$\text{et } u(t,x) = 0 \text{ si } x \in \partial\Omega\,,$$

alors lorsque t tend vers l'infini :

$$u(t,x) = ce^{-\lambda_1 t} f_1(x)\left(1 + \mathcal{O}\left(e^{-(\lambda_2-\lambda_1)t}\right)\right),$$

où on rappelle que l'on a noté f_1 l'état fondamental de la réalisation de Dirichlet de l'opérateur $-\Delta + V$.

Dans [56], en étudiant le comportement des fonctions spectrales de grands domaines convexes (pour la modélisation du phénomène de condensation de Bose-Einstein), M. van den Berg remarque que, pour le laplacien libre ($V = 0$), de nombreux domaines convexes vérifient l'inégalité $\lambda_2 - \lambda_1 \geq 3\pi^2/D^2$. Puis dans [55], I. M. Singer, B. Wong, S.-T. Yau et S. S.-T. Yau démontrent la minoration $\lambda_2 - \lambda_1 \geq \frac{1}{4}\pi^2/D^2$, ce résultat est ensuite amélioré d'un facteur 4 par Q. H. Yu et J. Q. Zhong [62]. Ces travaux ont amené S.-T. Yau [61] ainsi que M. Ashbaugh et R. Benguria [15] à conjecturer que l'inégalité optimale $\lambda_2 - \lambda_1 \geq 3\pi^2/D^2$ était toujours vérifiée. À la suite des travaux de M. Ashbaugh et R. Benguria [15] et de M. Horvàth [36], cette conjecture a été démontrée en dimension 1 par R. Lavine [46] ; en dimension supérieure elle a été démontrée en présence de symétries supplémentaires (axiales ou de révolution) [16, 18, 30]. Pour en savoir plus sur cette conjecture, on pourra lire le petit survol de M. Ashbaugh qui est complété par une bibliographie exhaustive [14]. Nous verrons aussi que le résultat de B. Andrews et J. Clutterbuck est plus général, il permet par exemple de donner une minoration de l'écart fondamental de l'opérateur $-\Delta + V$ sur un domaine convexe de diamètre D lorsque $V(x) = -\|x\|^2 + b\|x\|^4 + W(x)$, où W est une fonction convexe, par celui de l'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2} - x^2 + bx^4$ sur l'intervalle $[-D/2, D/2]$.

On doit à G. Huisken la première utilisation des techniques de doublement de variables en géométrie ; dans [38], il obtient avec celles-ci un raccourci élégant des preuves de M. Grayson, de M. Gage et de R. Hamilton [33, 31, 32] sur le comportement d'une courbe fermée simple déformée par le flot de la courbure. Dans une troisième partie, on évoquera l'utilisation de ces techniques de doublement de variables au mouvement par courbure moyenne des hypersurfaces de l'espace euclidien. Notre but n'est pas ici d'exposer les développements récents et fascinants sur ce sujet mais uniquement d'illustrer la variété des applications possibles de ces idées de doublement de variables ; on exposera donc un résultat de B. Andrews qui fournit un contrôle des rayons des sphères qui roulent à l'intérieur de l'hypersurface [3] en fonction de la courbure moyenne et qui donne ainsi une preuve géométrique séduisante et directe du non effondrement des hypersurfaces à courbure moyenne positive le long du flot de la courbure moyenne [58, 54].

Une application spectaculaire des techniques de doublement de variables a permis à S. Brendle [22] de résoudre la célèbre conjecture de H. B. Lawson :

Théorème 0.3. — *Soit $\Sigma \subset \mathbb{S}^3$ un tore minimal, alors Σ est isométrique au tore de Clifford :*

$$\mathbb{T} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,;\, x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2 = 1/2\}\,.$$

Nous présenterons les idées et points clés de la preuve de S. Brendle dans une troisième partie. Nous essayerons d'expliquer les défis analytiques et géométriques rencontrés ; évidemment cette preuve partage certaines similarités avec les travaux de G. Huisken et de B. Andrews ; cependant on verra que la preuve repose sur des choix géométriques astucieux et ingénieux qui permettent à la suite d'un long calcul l'apparition de termes négatifs en le gradient de la norme de la seconde forme fondementale ; ces termes n'apparaissent pas dans les travaux précédents mais sont ici cruciaux pour pouvoir conclure.

La théorie des surfaces minimales dans l'espace $\mathbb{R}^3$ est bien étudiée et on sait qu'il n'existe pas de surface minimale compacte immergée dans $\mathbb{R}^3$. En utilisant la résolution du problème de Plateau et le principe de réflexion de Schwarz-Alexandrov, H. B. Lawson a construit de nombreux exemples de surfaces minimalement immergées dans la sphère $\mathbb{S}^3$. Sa construction fournit, pour toute surface compacte orientable un plongement minimal dans la sphère $\mathbb{S}^3$; mieux, toute surface de genre non premier admet au moins deux tels plongements minimaux non isométriques [48]. Cependant, pour le tore, la construction ne fournit pas d'autres exemples que des copies isométriques du tore de Clifford. De plus, en étudiant la topologie de ces surfaces, il montre que si $\Sigma \subset \mathbb{S}^3$ est un tore minimal alors il existe un difféomorphisme $F \colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ tel que $F(\Sigma) = \mathbb{T}$ et cette étude l'amène à conjecturer qu'à isométrie près le tore de Clifford est le seul tore minimalement plongé dans $\mathbb{S}^3$ [49].

Il existe de nombreuses immersions à courbure moyenne constante de tores dans $\mathbb{S}^3$ et grâce aux travaux de A.I. Bobenko, N. Hitchin, U. Pinkall et I. Sterling, on dispose d'une description de l'espace des modules de ces tores à l'aide d'un système intégrable [19, 35, 53]. Cette étude a amené U. Pinkall et I. Sterling à conjecturer que les tores à courbure moyenne constante de la sphère $\mathbb{S}^3$ devaient être de révolution. Dans [11], B. Andrews et H. Li ont réussi à utiliser des idées similaires à celles de S. Brendle pour démontrer cette conjecture ; enfin S. Brendle a étendu son résultat pour classifier certains tores de Weingarten ou immergés au sens d'Alexandrov ([25, 23]). D'autres approches pour démontrer ces conjectures sont depuis apparues : une première est due à L. Hauswirth, M. Kilian, M.U. Schmidt qui proposent d'étudier finement les courbes spectrales associées aux systèmes intégrales classifiant les tores à courbure moyenne constante immergés dans $\mathbb{S}^3$ [34] et une seconde a été récemment postée sur Arxiv par M. Anderson [2].

Remerciements .– Je tiens à remercier Simon Brendle, Laurent Hauswirth, Laurent Mazet, Vincent Minerbe et Pascal Romon dont les remarques et conseils m'ont permis d'améliorer cet exposé.

1. APPLICATION AUX ESTIMÉES SPECTRALES

1.1. L'écart fondamental pour des variétés à courbure de Ricci positive.

1.1.1. *Le résultat de P. Li et S.-T. Yau.* — On sait que si u est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ présentant un maximum local en x_0, alors en ce point la différentielle de u s'annule et le Hessien de u est négatif :

$$du(x_0) = 0 \ \text{ et } \ \operatorname{Hess} u(x_0) \leq 0 \ .$$

Ce principe élémentaire du maximum est la base de nombreuses estimations a priori de solutions d'EDP elliptique et parabolique ; il a par exemple été utilisé par P. Li et S.-T. Yau [50] pour obtenir le

THÉORÈME 1.1. — *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte sans bord dont la courbure de Ricci est positive* [1]*, alors la première valeur propre non nulle de son laplacien, notée λ_1, vérifie :*

$$\lambda_1 \geq \frac{\pi^2}{4\,\mathrm{diam}^2(M,g)}\,.$$

Avant de présenter rapidement la preuve de ce résultat, nous précisons les conventions et notations qui sont utilisées ici. On notera ∇ la connexion de Levi-Civita associée à la métrique g ; ainsi lorsque u est une fonction $\mathcal{C}^2$ sur M, alors $\mathrm{Hess}\, u = \nabla du$. Le laplacien utilisé ici [2] est défini par

$$\Delta u(x) = \mathrm{tr}(\mathrm{Hess}\, u)(x) = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{Hess}\, u)(x)(e_i, e_i),$$

où $\{e_i\}_i$ est une base orthonormée de (T_xM, g_x).

On sait que l'équation aux valeurs propres :

$$\Delta f + \lambda f = 0$$

n'a de solutions non triviales que lorsque λ prend ses valeurs dans une suite croissante non majorée :

$$\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

L'écart entre les deux premières valeurs propres $\lambda_1 = \lambda_1 - \lambda_0$ est appelé *écart fondamental.*

Démonstration. — On considère une solution, f, non triviale de l'équation

$$\Delta f + \lambda_1 f = 0\,;$$

on sait que f est de moyenne nulle, on peut donc normaliser f afin que

$$-1 \leq -a = \min f \;\text{ et }\; 1 = \max f.$$

Pour $\tau > 1$, on considère alors

$$\mu_\tau = \max_M \frac{|df|^2}{\tau^2 - f^2}$$

et $x_0 \in M$ un point où ce maximum est atteint. Pour la fonction $u := |df|^2 - \mu_\tau(\tau^2 - f^2)$, on a donc en x_0 :

$$du = 0 \;\text{ soit }\; \nabla_{\nabla f}\, df = \mu_\tau\, f\, df.$$

Ainsi $\mu_\tau f(x_0)$ est une valeur propre de $\nabla df(x_0)$ et par conséquent [3] :

$$\|\nabla df(x_0)\|^2 \geq \mu_\tau^2 f^2(x_0)\,. \tag{2}$$

1. Au sens français : $\mathrm{Ricci}_g \geq 0$.
2. En suivant les conventions utilisées par la plupart des références citées ici.
3. La norme choisie ici est la norme de Hilbert-Schmidt, c'est-à-dire la racine carrée de la somme des carrés des valeurs propres.

Nous avons également

$$\Delta u(x_0) \leq 0, \tag{3}$$

ce qui avec la formule de Bochner

$$\lambda_1 |df|^2 = -\langle \Delta df, df\rangle = \|\nabla df\|^2 - \frac{1}{2}\Delta |df|^2 + \mathrm{Ricci}(df, df)$$

et l'inégalité (2) mène à :

$$-\lambda_1 |df|^2(x_0) + \mu_\tau^2 f^2(x_0) + \mu_\tau \lambda_1 f^2(x_0) + \mu_\tau |df|^2(x_0) \leq 0\ ;$$

en injectant l'égalité $|df|^2(x_0) = \mu_\tau(\tau^2 - f^2(x_0))$, nous obtenons alors

$$(\mu_\tau - \lambda_1)\mu_\tau \tau^2 \leq 0\,.$$

Ce qui implique que

$$\mu_\tau \leq \lambda_1\,,$$

ceci étant valide pour tout $\tau > 1$, nous obtenons la majoration

$$\frac{|df|}{\sqrt{1-f^2}} = |\mathrm{d}\arcsin(f)| \leq \sqrt{\lambda_1}\ ,$$

et en intégrant cette inégalité le long d'une géodésique minimisante γ joignant les points $\underline{x}$ et $\overline{x}$ où f atteint son minimum et son maximum, nous obtenons

$$\arcsin(a) + \arcsin(1) = \arcsin f(\overline{x}) - \arcsin f(\underline{x}) = \int_\gamma \mathrm{d}\arcsin(f) \leq \sqrt{\lambda_1}\ \mathrm{diam}(M, g).$$

Puisque $a \in (0, 1]$, nous obtenons bien l'inégalité voulue. □

1.1.2. *Minoration optimale.* — La preuve nous apprend que la minoration obtenue est en fait stricte ; lorsque $\min f = -1$ la minoration est alors $\mathrm{diam}^2(M, g)\,\lambda_1 \geq \pi^2$, ce qui est optimal puisque pour un cercle de diamètre D nous avons $D^2\lambda_1 = \pi^2$. La non optimalité de la preuve est donc causée par l'asymétrie éventuelle de la fonction f. Ce résultat a été amélioré par J.Q. Zhong et H.C. Yang [63] ; P. Kröger a fourni une autre preuve de cette amélioration [44] et D. Bakry et Z. Qian, avec des idées similaires à celle de P. Kröger, ont étendu cette minoration optimale aux opérateurs de diffusion dont la courbure de Bakry-Emery est minorée [17] :

Théorème 1.2. — *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte sans bord dont la courbure de Ricci est positive, alors la première valeur propre non nulle de son laplacien, notée λ_1, vérifie :*

$$\lambda_1 \geq \frac{\pi^2}{\mathrm{diam}^2(M, g)}\,.$$

La preuve de P. Kröger, comme celle de D. Bakry et Z. Qian part du raffinement suivant de la minoration du Hessien (2) : $\|\nabla df(x_0)\|^2 \geq \mu_\tau^2 f^2(x_0) + \|A\|^2$ où A est la restriction du Hessien de f à l'hyperplan $\ker(df(x_0))$; de plus nous avons :

$$(n-1)\|A\|^2 \geq (\mathrm{tr}\, A)^2 = \left(-\lambda f(x_0) + \mu_\tau f(x_0)\right)^2\ .$$

Ce raffinement permet de comparer f aux solutions de l'équation

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{n-1}{R+r}\frac{dv}{dr} + \lambda_1 v = 0$$

sur un intervalle $[-d/2, d/2]$ où v est croissante et $v'(\pm d/2) = 0$. Une telle fonction v est reliée à une fonction propre radiale du laplacien (pour la valeur propre λ_1) sur un anneau $\mathbb{B}(R+d/2) \setminus \mathbb{B}(R-d/2)$ et pour les conditions de Neumann sur le bord.

Si $[-a, 1] = f(M) \subset v([-d/2, d/2])$, alors, avec les mêmes arguments que précédemment, on montre que

$$\left|d(v^{-1} \circ f)\right| \leq 1\,.$$

On dispose maintenant d'une famille à un paramètre de fonctions de comparaison qui ne sont pas symétriques et on peut ainsi tenir compte de l'asymétrie de f et dans le cadre et avec les notations de la preuve du théorème (1.1), ceci permet d'obtenir :

$$\operatorname{diam}^2(M,g)\,\lambda_1 \geq \pi^2 + \log^2 a\,.$$

1.1.3. *Une autre preuve.* — Afin d'illustrer l'utilisation de la technique de doublement de variables, nous décrivons maintenant une preuve de cette minoration optimale faite dans cet esprit. On se sert ici de l'exposition de Lei Ni [52].

L'idée est de comparer les oscillations de f (i.e. $f(x) - f(y)$) à celles du modèle unidimensionnel, c'est-à-dire au cercle de diamètre D. On remarque que la fonction $v(x) = \cos(\pi x/D)$ est une fonction $2D$-périodique propre pour le laplacien sur le cercle de diamètre D et de plus

$$|v(x) - v(y)| \leq 2\sin\left(\frac{\pi|x-y|}{2D}\right).$$

Pour $D = \operatorname{diam}(M,g)$ et $\alpha < \pi/D$, on étudie le maximum de la fonction

$$\mathcal{C}(x,y) = \frac{f(x) - f(y)}{2\sin\left(\frac{1}{2}\alpha d(x,y)\right)}$$

sur $M \times M \setminus \operatorname{Diag}$ où on a noté Diag la diagonale de $M \times M$. Cette fonction n'est pas lisse sur la diagonale. Pour contourner ce problème, on éclate la diagonale à l'aide de l'application

$$\Phi\colon \{(x,v) \in TM, |v| = 1\} \times]0, \varepsilon[\to M \times M \setminus \operatorname{Diag}\,,$$

définie par $\Phi(x,v,r) = (x, \exp_x(rv))$. Φ est un difféomorphisme sur le $\epsilon-$voisinage de la diagonale dans $M \times M \setminus \operatorname{Diag}$. Ainsi on peut voir $M \times M \setminus \operatorname{Diag}$ comme l'intérieur d'une variété compacte à bord $\widehat{M \times M}$ dont le bord s'identifie au fibré unitaire tangent à (M,g). La fonction $\mathcal{C}$ a une extension lisse à $\widehat{M \times M}$ et

$$\mathcal{C}(\Phi(x,v,0)) = \frac{df(x)(v)}{\alpha}.$$

On étudie alors $\mu = \max_{\widehat{M \times M}} \mathcal{C}$. Nous avons alors deux cas : soit ce maximum est atteint sur le bord de $\widehat{M \times M}$, soit il est atteint à l'intérieur.

Dans le premier cas, il est atteint en un point (x, v) avec $\nabla f(x) = |df(x)|v$ et $|df|^2$ présente un maximum local en x et

$$|df|^2(x) = \alpha^2\mu^2.$$

Le gradient de $|df|^2$ s'annule donc en x et

$$\Delta|df|^2(x) \leq 0\,. \tag{4}$$

Cependant cette dernière estimation utilise uniquement le fait que la fonction $|df|^2$ atteint son maximum en x. On peut obtenir un peu mieux : en effet, si $\gamma(t) = \exp_x(tv)$, nous avons alors

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathcal{C}(\gamma(t), \gamma(-t)) = 0 \text{ et } \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \mathcal{C}(\gamma(t), \gamma(-t)) \leq 0.$$

Ce qui implique que

$$\nabla^2 df(x)(v, v, v) + \alpha^2|df|(x) \leq 0 \text{ et } \operatorname{Hess}|df|^2(x)(v, v) + 2\alpha^2|df|^2(x) \leq 0$$

et ainsi la majoration par 0 du laplacien de $|df|^2$ s'améliore en

$$\frac{1}{2}\Delta|df|^2(x) \leq -\alpha^2|df|^2(x).$$

C'est ici que l'on découvre l'amélioration des estimations (3) et (4) induite par le doublement de variables.

En reprenant la formule de Bochner et les calculs précédents, nous obtenons l'inégalité

$$-\lambda_1\mu^2 \leq -\alpha^2\mu^2\,.$$

La fonction f étant non constante, on a $\mu \neq 0$ et donc pour tout $\alpha < \pi/D$: $\lambda_1 \geq \alpha^2$.
Dans le second cas, le maximum de $\mathcal{C}$ est atteint en un couple de points distincts (x, y), $x \neq y$. Pour contourner le problème posé par le fait que la fonction distance n'est pas lisse, on utilise l'identité [4]

$$\mu = \max_\gamma \frac{\int_\gamma df}{2\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\sqrt{E(\gamma)}\ \right)}\,,$$

où γ parcourt les courbes lisses d'énergie inférieure à π^2/α^2.
Nous considérons $\gamma\colon [0, 1] \mapsto M$ une géodésique minimisante joignant x à y et nous notons $r = d(x, y) = \sqrt{E(\gamma)}$. En faisant varier les extrémités de γ, on obtient facilement :

$$df(x) = -\frac{M}{r}\alpha\cos\left(\frac{1}{2}\alpha r\right)\dot\gamma(0) \text{ et } df(y) = \frac{M}{r}\alpha\cos\left(\frac{1}{2}\alpha r\right)\dot\gamma(1)\ .$$

Soit $E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}, \dot\gamma(0)$ une base orthonormée de (T_xM, g) que nous transportons parallèlement le long de γ. Cela nous permet de bâtir les variations suivantes de γ :

$$\text{pour } i = 0, \ldots, n-1\ :\ \gamma_{i,\varepsilon}(t) = \exp_{\gamma(t)}(\varepsilon E_i(t))\,,$$

4. On rappelle que l'énergie d'une courbe est $E(\gamma) = \int |\dot\gamma|^2(s)ds$.

puis une dernière variation qui étire la géodésique γ :

$$\gamma_{n,\varepsilon}(t) = \exp_x\left((-\varepsilon + t(r+2\varepsilon))\frac{\dot\gamma(0)}{r}\right).$$

Le fait que $\varepsilon \mapsto \frac{\partial \gamma_{i,\varepsilon}(t)}{\partial t}$ soit un champ de Jacobi le long de la géodésique $\varepsilon \mapsto \gamma_{i,\varepsilon}(t)$ implique que

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{d^2}{d\varepsilon^2}\bigg|_{\varepsilon=0} E(\gamma_{i,\varepsilon}) = -2\int_0^1 \mathrm{Ricci}(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))dt \le 0\,. \tag{5}$$

De plus, la fonction $c \mapsto f(c(0)) - f(c(1)) - \mu\, 2\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\sqrt{E(c)}\,\right)$ atteint son maximum en γ ; nous savons donc que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d^2}{d\varepsilon^2}\bigg|_{\varepsilon=0} \left[f(\gamma_{i,\varepsilon}(0)) - f(\gamma_{i,\varepsilon}(1)) - \mu 2\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\sqrt{E(\gamma_{i,\varepsilon})}\,\right)\right] \le 0\,.$$

Compte tenu de l'inégalité (5) et du fait que la longueur de la géodésique $\gamma_{n,\varepsilon}$ varie linéairement, nous obtenons :

$$\Delta f(x) - \Delta f(y) + 2\mu\alpha^2 \sin\left(\frac{1}{2}\alpha r\right) \le 0\,.$$

Avec $\Delta f(x) - \Delta f(y) = -\lambda_1(f(x) - f(y)) = -\lambda_1\mu 2\sin\left(\frac{1}{2}\alpha r\right)$, on déduit la minoration $\lambda_1 \ge \alpha^2$.

1.2. L'écart fondamental des ouverts convexes

1.2.1. *L'état fondamental.* — Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné connexe et $V \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega},\mathbb{R})$, on sait que le problème aux valeurs propres

$$\Delta f - Vf + \lambda f = 0 \ \text{ et } \ f = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

n'a de solutions que si λ prend ses valeurs dans une suite croissante non bornée

$$\lambda_1 < \lambda_2 \le \ldots\,.$$

De plus les solutions de ce problème pour la première valeur propre gardent un signe constant ; l'*état fondamental* de l'opérateur $\Delta - V$ pour les conditions de Dirichlet sur $\partial\Omega$, que nous notons f_1, est la solution positive de

$$\Delta f - Vf + \lambda_1 f = 0 \ \text{ et } \ f = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

de norme L^2 unitaire :

$$\int_\Omega f_1^2 = 1.$$

1.2.2. *Première minoration.* — Pour un domaine convexe et pour un potentiel convexe, nous avons une minoration à la *Li-Yau* de la différence entre les deux premières valeurs propres ; Q. H. Yu et J. Q. Zhong améliorent dans [62] un résultat de I. M. Singer, B. Wong, S.-T. Yau et S. S.-T. Yau [55] :

THÉORÈME 1.3. — *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe borné de diamètre D et V une fonction convexe sur Ω, alors l'écart fondamental de l'opérateur $-\Delta + V$ sur Ω pour les conditions de Dirichlet vérifie :*

$$\lambda_2 - \lambda_1 \geq \frac{\pi^2}{D^2} \,. \tag{6}$$

On dispose d'une caractérisation variationnelle de la seconde valeur propre :

$$\lambda_2 = \inf \left\{ \int_\Omega [|d\varphi|^2 + V\varphi^2] \ \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega), \int_\Omega \varphi^2 = 1, \int_\Omega \varphi f_1 = 0 \right\} \,.$$

Si on pose $\varphi = v f_1$, nous avons alors

$$\int_\Omega [|d\varphi|^2 + V\varphi^2] - \lambda_1 \int_\Omega \varphi^2 = \int_\Omega |dv|^2 f_1^2 \,.$$

Ceci montre que si on définit la mesure $d\mu = f_1^2 dx$, alors

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \inf \left\{ \int_\Omega |dv|^2 d\mu \,,\ v \in \mathcal{C}^1(\Omega), \int_\Omega v^2 d\mu = 1, \int_\Omega v d\mu = 0 \right\} \,.$$

L'idée sous-jacente à cette technique est aussi appelée *$h-$transformée de Doob* en probabilité. Supposons que le bord de Ω soit lisse et introduisons l'opérateur

$$Lv = \Delta v + 2\langle \nabla \log f_1, \nabla v \ \rangle \,;$$

alors, pour tout $v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ vérifiant les conditions de Neumann sur le bord de Ω, nous avons :

$$\langle -Lv, v \rangle_{L^2(\Omega, d\mu)} = \int_\Omega |dv|^2 d\mu \,.$$

Ainsi l'écart fondamental $\lambda_2 - \lambda_1$ est la première valeur propre non nulle de l'opérateur L pour les conditions de Neumann.

De plus lorsque Ω et V sont lisses et si f_2 est une solution non nulle de l'équation

$$\Delta f - Vf + \lambda_2 f = 0 \ \text{ et } \ f = 0 \text{ sur } \partial\Omega \,,$$

alors la fonction $u = f_2/f_1$ est lisse sur $\overline{\Omega}$ et vérifie

$$Lu + (\lambda_2 - \lambda_1)u = 0 \ \text{ et } \ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \,,$$

où on a noté ν le champ normal unitaire sortant le long de $\partial\Omega$.

Les travaux de I. M. Singer, B. Wong, S.-T. Yau et S. S.-T. Yau et de Q. H. Yu et J. Q. Zhong sont des adaptations des arguments de P. Li et S.-T. Yau appliquées à la fonction u et ils utilisent le fait que dans ce cadre l'état fondamental est log-concave (cf. Théorème 0.1) : il s'agit d'un résultat de H. J. Brascamp et E. H. Lieb [21], on peut encore en trouver une autre preuve dans l'appendice de l'article de I. M. Singer, B. Wong, S.-T. Yau et S. S.-T. Yau [55].

Cependant ce résultat n'est pas optimal pour le segment de longueur D ; en effet pour l'intervalle $]-D/2, D/2[$, nous avons $\lambda_1 = \pi^2/D^2$ et $\Phi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{D}}\cos(\pi x/D)$ et $\lambda_2 = 4\pi^2/D^2$, ainsi l'écart fondamental d'un segment de longueur D est égal à $3\pi^2/D^2$; il avait été conjecturé par M. Van den Berg, S.-T. Yau, M.S. Asbaugh et R. Benguria que la minoration (6) devait s'améliorer par un facteur 3 et être ainsi optimale. Cette conjecture a été démontrée par B. Andrews et J. Clutterbuck [8]. Avant d'exposer les contributions de B. Andrews et J. Clutterbuck, nous examinons rapidement comment adapter les idées de L. Ni exposées précédemment pour démontrer le théorème 1.3. Par continuité des valeurs propres par déformations continues du domaine et du potentiel, nous supposerons désormais que le bord de Ω est lisse strictement convexe et que V est lisse sur l'adhérence de Ω. Pour $\alpha < \pi/D$, on étudie alors le maximum de la fonction

$$\mathcal{C}(x,y) = \frac{u(x) - u(y)}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}|x-y|\right)}$$

sur $\Omega \times \Omega \setminus \mathrm{Diag}$:

$$\mu := \sup_{(x,y)\in\Omega\times\Omega\setminus\mathrm{Diag}} \mathcal{C}(x,y)\,.$$

En utilisant la stricte convexité du bord et le fait que la dérivée normale de u est nulle le long du bord de Ω, on démontre que ce maximum est atteint à l'intérieur de $\Omega\times\Omega\setminus\mathrm{Diag}$ ou sur la diagonale de $\Omega \times \Omega$.

Dans le cas où ce maximum est atteint en (x,x), nous avons que $|du|(x) = \mu\alpha$ et $\nabla_{\nabla u(x)} du(x) = 0$ et en x nous avons l'inégalité

$$\langle \nabla\Delta u, \nabla u\rangle \leq -\alpha^2 |du|^2\,.$$

En se servant de l'équation

$$Lu + (\lambda_2 - \lambda_1)u = \Delta u + 2\langle \nabla \log f_1, \nabla u\ \rangle + (\lambda_2 - \lambda_1)u = 0$$

vérifiée par u, nous obtenons l'inégalité :

$$-(\lambda_2 - \lambda_1)|du|^2 - 2\,\mathrm{Hess}\log f_1\,(\nabla u(x), \nabla u(x)) \leq -\alpha^2|du|^2\,. \tag{7}$$

Compte tenu que u n'est pas constante et que la fonction $\log f_1$ est concave, nous obtenons dans ce cas la minoration $\lambda_2 - \lambda_1 \geq \alpha^2$.

Dans le cas où ce maximum est atteint en (x,y) avec $x \neq y$, nous savons que

$$\nabla u(x) = \nabla u(y) = \alpha\mu\cos\left(\frac{\alpha}{2}|x-y|\right)\,\frac{x-y}{|x-y|}\,,$$

de plus comme précédemment :

$$\Delta u(x) - \Delta u(y) + 2\mu\alpha^2 \sin\left(\frac{1}{2}\alpha|x-y|\right) \leq 0$$

et en utilisant encore l'équation vérifiée par u, nous obtenons

$$-(\lambda_2-\lambda_1)\,(u(x)-u(y)) - 2\langle \nabla \log f_1(x), \nabla u(x)\rangle + 2\langle \nabla \log f_1(y), \nabla u(y)\rangle \\ + 2\mu\alpha^2 \sin\left(\frac{1}{2}\alpha|x-y|\right) \leq 0.$$

En tenant compte des conditions d'ordre 1, nous arrivons à l'inégalité

(8)

$$-(\lambda_2-\lambda_1)\mu 2\sin\left(\frac{1}{2}\alpha|x-y|\right) - 2\alpha\mu\cos\left(\frac{\alpha}{2}|x-y|\right)\langle \nabla\log f_1(x) - \nabla \log f_1(y), \frac{x-y}{|x-y|}\rangle$$

(9)

$$+ 2\mu\alpha^2\sin\left(\frac{1}{2}\alpha|x-y|\right) \leq 0\ .$$

La log concavité de l'état fondamental implique que le terme $\langle \nabla \log f_1(x) - \nabla \log f_1(y), x-y\rangle$ est négatif et, puisque $\alpha < \pi/D$, nous avons également $-(\lambda_2-\lambda_1)+\alpha^2 \leq 0$.

2. LA PREUVE DE LA CONJECTURE SUR L'ÉCART FONDAMENTAL

2.1. Amélioration de la log-concavité de l'état fondamental

Pour améliorer, avec la preuve précédente, la minoration obtenue ici de l'écart fondamental, il suffit d'améliorer le contrôle de la log-concavité de l'état fondamental. Si nous revenons au cas unidimensionnel, où l'état fondamental est

$$\Phi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{D}}\ \cos(\pi x/D)\,,$$

alors

$$(\log \Phi_1)''(x) = -\frac{\pi^2}{D^2}\left(1+\tan^2(\pi x/D)\right).$$

Cependant un contrôle de la log-concavité de l'état fondamental en

$$\operatorname{Hess}\log f_1 \leq -\frac{\pi^2}{D^2}$$

ne permet pas d'améliorer la minoration obtenue. Aussi le résultat clé de B. Andrews et J. Clutterbuck est le raffinement suivant du résultat de H. J. Brascamp et E. H. Lieb :

THÉORÈME 2.1. — *Si Ω est un domaine strictement convexe lisse et si V est une fonction lisse convexe sur $\overline{\Omega}$, alors l'état fondamental de l'opérateur $\Delta - V$ vérifie*

$$\left\langle \nabla \log f_1(x) - \nabla \log f_1(y), \frac{x-y}{|x-y|}\right\rangle \leq \frac{\Phi_1'}{\Phi_1}\left(\frac{|x-y|}{2}\right) = -\frac{\pi}{D}\tan\left(\frac{\pi|x-y|}{2D}\right).$$

Si dans la preuve précédente, on utilise ce raffinement, alors la preuve de la conjecture sur l'écart fondamental est immédiate :

THÉORÈME 2.2. — *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe borné de diamètre D et V une fonction convexe sur Ω, alors l'écart fondamental de l'opérateur $-\Delta + V$ sur Ω pour les conditions de Dirichlet vérifie :*

$$\lambda_2 - \lambda_1 \geq 3\frac{\pi^2}{D^2} \; .$$

Signalons que L. Ni a obtenu une comparaison similaire à celle du théorème 2.1 concernant non plus l'état fondamental, mais le noyau de la chaleur [52].

2.2. Un principe de comparaison des modules de log-concavité

Le résultat de B. Andrews et J. Clutterbuck repose sur un théorème de comparaison de module de concavité et fournit en fait un résultat plus général très intéressant . Pour cela on introduit quelques définitions.

Définitions : *Soit $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs défini sur un ouvert convexe Ω de diamètre D. On dit que $\omega\colon [0, D/2] \to \mathbb{R}$ est un module d'expansion pour X si pour tout $x \neq y \in \Omega$, nous avons*

$$\left\langle X(x) - X(y), \frac{x-y}{|x-y|} \right\rangle \geq 2\omega(|x-y|/2) \; .$$

On dira que ω est un module de contraction pour X si $-\omega$ est un module d'expansion pour le champ $-X$.

La terminologie provient du fait que la fonction nulle est un module d'expansion pour X si et seulement si le flot de X dilate les distances dans le futur.

Si V est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, alors un module de convexité pour V est un module d'expansion pour ∇V et un module de concavité pour V est un module de contraction pour le champ de vecteurs ∇V.

Le théorème 2.1 de B. Andrews et J. Clutterbuck repose sur un résultat de comparaison du module de log-convavité d'une solution de l'équation de la chaleur :

THÉORÈME 2.3. — *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert à bord lisse strictement convexe de diamètre D et V une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\overline{\Omega}$ de module de convexité $p\colon [0, D/2] \to \mathbb{R}$. On considère $u\colon \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ une solution de l'équation de la chaleur :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + Vu = 0 \;\text{ et }\; u = 0 \;\text{ sur }\; \partial\Omega$$

telle que la fonction $u(0, .)$ soit lisse strictement positive sur Ω et de dérivée normale ne s'annulant pas le long de $\partial\Omega$.

Si $\Psi\colon \mathbb{R}_+ \times [0, D/2] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, +\infty[\times[0, D/2]$ vérifiant

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \geq \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + 2\Psi\frac{\partial \Psi}{\partial r} - p \\ \Psi(t, 0) = 0 \\ \Psi(0, .) \text{ est un module de log}-\text{concavité pour la fonction } u(0, .) \, , \end{cases}$$

alors, pour tout réel t, $\Psi(t, .)$ est un module de log-concavité pour la fonction $u(t, .)$.

Avant d'esquisser la preuve de ce résultat, nous expliquons en quoi il s'agit d'un théorème de comparaison avec un modèle unidimensionnel. On notera $'$ la dérivation par rapport à la variable spatiale r.

Soit $q\colon [-D/2, D/2] \to \mathbb{R}$ la fonction paire définie par

$$q(x) = \int_0^{|x|} p(\xi) d\xi \,.$$

Si $\Phi\colon \mathbb{R}_+ \times [0, D/2] \to \mathbb{R}_+^*$ est une solution strictement positive de l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \Phi'' + q\Phi = 0 \,, \tag{10}$$

alors la fonction $\Psi = (\log \Phi)' = \Phi'/\Phi$ est solution de l'équation :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \Psi'' + 2\Psi'\Psi - p \,. \tag{11}$$

Et vice versa, soit $\Psi\colon \mathbb{R}_+ \times [0, D/2] \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation (11) ; si, pour $t \geq 0$, nous posons

$$\alpha(t) = \int_0^t \Big(\Psi'(\tau, 0) + \Psi^2(\tau, 0) \Big) \, d\tau \,,$$

alors la fonction

$$\Phi(t, x) = \exp \left(\int_0^x \Psi(t, \xi) d\xi + \alpha(t) \right)$$

vérifie l'équation (10).

La preuve du théorème 2.3 repose sur l'étude de la fonction

$$Z(t, x, y) = \left\langle \nabla \log(u(t, x)) - \nabla \log(u(t, y)), \frac{x - y}{|x - y|} \right\rangle - 2\Psi \left(t, \frac{|x - y|}{2} \right) \,.$$

Par hypothèse $Z(0, x, y) \leq 0$, donc s'il s'avère que Z devient strictement positif en (T, x, y), alors pour tout $C > 0$ il y a un $\varepsilon > 0$ tel que $Z_\varepsilon(t, x, y) = Z(t, x, y) - \varepsilon e^{Ct}$ change de signe sur $[0, T] \times \Omega \times \Omega$. On considère

$$C := 2 \sup_{[0,T] \times [0, D/2]} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + 1$$

et on choisit $\varepsilon > 0$ tel qu'il existe un premier $t_0 > 0$ tel que

$$\sup_{\Omega \times \Omega} Z_\varepsilon(t_0, x, y) = 0$$

et donc $Z_\varepsilon \leq 0$ sur $[0, t_0] \times \Omega \times \Omega$.

Dans une première étape délicate et difficile, B. Andrews et J. Clutterbuck démontrent qu'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ du bord de $\widetilde{\Omega} := \Omega \times \Omega \setminus \mathrm{Diag}$ tel que

$$Z_\varepsilon < 0 \ \text{ sur } \ [0, t_0] \times \mathcal{U}.$$

Ceci assure alors l'existence de $x_0, y_0 \in \Omega, x_0 \neq y_0$ tels que

$$Z_\varepsilon(t_0, x_0, y_0) = 0.$$

On introduit l'opérateur $\Box\colon \mathcal{C}^\infty(\widetilde{\Omega}) \to \mathcal{C}^\infty(\widetilde{\Omega})$ défini par

$$\Box f = \sum_i \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_i^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_i} \right).$$

C'est un opérateur elliptique dégénéré. Nous avons pour la fonction $r = |x-y|$, $\Box r = 0$ et $\Box\,(u \circ r) = 4u''(r)$. Un *très long* calcul montre que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Z}{\partial t} - \Box Z\right)(t,x,y) = &- \left\langle \nabla V(x) - \nabla V(y), \frac{x-y}{|x-y|} \right\rangle \\ &- 2\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - 2\Psi\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) \\ &+ \langle A(t,x,y), \nabla Z\rangle \\ &+ 2\frac{\partial \Psi}{\partial r} Z(t,x,y)\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Nous ne détaillerons pas ce calcul, celui-ci étant très bien développé et détaillé dans le papier de B. Andrews et J. Clutterbuck ; aussi préconisons-nous au lecteur désireux de reprendre ce calcul de se reporter à cet article [8, pages 910-911].

Or en $(t_0; x_0, y_0)$ nous avons $\nabla Z = 0$ et $\Box Z = \Box Z_\varepsilon \leq 0$ et de plus

$$0 \leq \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial t} - C\varepsilon e^{Ct_0} = \frac{\partial Z}{\partial t} - CZ\,.$$

En tenant compte du module de convexité de V et de l'inéquation vérifiée par Ψ, nous savons que la somme des deux premiers termes du membre de droite de (12) est négative, on obtient donc pour $r_0 = |x_0 - y_0|$:

$$CZ(t_0,x_0,y_0) \leq 2\frac{\partial \Psi}{\partial r}(t_0, r_0/2)\, Z(t_0,x_0,y_0)\,,$$

soit

$$C \leq 2\frac{\partial \Psi}{\partial r}(t_0, r_0/2)\,,$$

ce qui est contradictoire avec le choix de la constante C.

2.3. Comparaison sur la log-concavité de l'état fondamental

Nous étudions maintenant les conséquences de ce résultat de comparaison. On considère donc f_1 l'état fondamental de l'ouvert Ω pour l'opérateur $-\Delta + V$ pour les conditions de Dirichlet. On veut utiliser ce théorème pour la solution

$$u(t,x) = e^{-\lambda_1 t} f_1(x)$$

de l'équation de la chaleur correspondante. Nous définissons

$$\omega_\infty(r) = \frac{1}{2} \sup_{x,y\in\Omega, |x-y|=2r} \left\langle \nabla \log f_1(x) - \nabla \log f_1(y), \frac{x-y}{|x-y|} \right\rangle,$$

le module de log-concavité de l'état fondamental, on sait aussi que c'est un module de log-concavité pour $u(t,\,.\,)$.

Soit $\rho\colon \Omega \to \mathbb{R}_+$ une fonction lisse qui est égale à la distance au bord de Ω près du bord de Ω. Le principe du maximum fort de Hopf nous dit que la dérivée normale de f_1 sur le bord ne s'annule pas et il y a donc une fonction lisse strictement positive $g_1 \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ telle que

$$f_1 = \rho g_1 \;\text{ et }\; \log f_1 = \log\rho + \log g_1.$$

En utilisant la stricte convexité du bord de Ω, on sait qu'il y a une constante strictement positive C telle que

$$\operatorname{Hess}\log\rho \le -\frac{C}{\rho} + C.$$

Il est alors facile d'en déduire que, pour des constantes positives C et $\delta \in]0, D/2[$, nous avons les estimations :

$$\begin{cases} \omega_\infty(r) \le Cr \\ \omega_\infty(r) \le -\frac{C}{D/2-r} \qquad \text{sur } [D/2-\delta, D/2[\;. \end{cases}$$

Ceci démontre que si on pose

$$\phi_\infty(x) = \exp\left(\int_0^{|x|} \omega_\infty(\xi)d\xi\right),$$

alors ϕ_∞ est une fonction paire qui s'annule en $D/2$; faisons évoluer ϕ_∞ par l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial\varphi_\infty}{\partial t} - \varphi_\infty'' + q\varphi_\infty = 0,$$

pour les conditions aux bords :

$$\varphi_\infty(t, \pm D/2) = 0 \;\text{ et }\; \varphi_\infty(0,x) = \phi_\infty(x).$$

Alors $\omega_\infty = \frac{\varphi_\infty'}{\varphi_\infty}$ vérifie l'équation (11) sur $\mathbb{R}_+^* \times [0, D/2[$ et s'annule en $r=0$. Notons Φ_1 l'état fondamental de l'opérateur $-\frac{d^2}{dr^2}+q$ sur l'intervalle $[-D/2, D/2]$ pour les conditions de Dirichlet ; alors en utilisant la décomposition spectrale de l'opérateur $-\frac{d^2}{dr^2}+q$ sur l'intervalle $[-D/2, D/2]$ pour les conditions de Dirichlet, nous obtenons la convergence :

$$\lim_{t\to+\infty} \omega_\infty(t,x) = \frac{\Phi_1'}{\Phi_1}(t,x).$$

Cependant nous ne pouvons pas utiliser le théorème de comparaison 2.3 car ω_∞ tend vers $-\infty$ en $D/2$. Pour y remédier, pour $k>0$ nous considérons $\omega_k(x) = \max\{\omega_\infty(x), -k\}$; c'est aussi un module de concavité pour la fonction $\log f_1$ et si on définit $\phi_k(x) = \exp\left(\int_0^{|x|}\omega_k(\xi)d\xi\right)$, alors ϕ_k est une fonction paire qui vérifie en $\pm D/2$ les conditions de Robin

$$\phi_k'(\pm D/2) = \mp k\phi_k(\pm D/2).$$

On peut alors faire évoluer ϕ_k par l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial\varphi_k}{\partial t} - \varphi_k'' + q\varphi_k = 0,$$

pour les conditions de Robin :

$$\varphi_k'(t, \pm D/2) = \mp k\varphi_k(t, \pm D/2) \text{ et } \varphi_k(0, x) = \phi_k(x).$$

Le théorème de comparaison 2.3 permet d'en déduire que $\omega_k(t,x) = \frac{\varphi_k'}{\varphi_k}(t,x)$ est un module de concavité pour la fonction $\log f_1$:

$$\forall t \geq 0, \ \forall x \in [0, D/2] \colon \omega_\infty(x) \leq \omega_k(t,x)\,.$$

Si on note $\Phi_{1,k}$ l'état fondamental de l'opérateur $-\frac{d^2}{dr^2} + q$ sur l'intervalle $[-D/2, D/2]$ pour les conditions de Robin $u'(\pm D/2) = \mp k u(\pm D/2)$, alors de la même façon :

$$\lim_{t \to +\infty} \omega_k(t,x) = \frac{\Phi_{1,k}'}{\Phi_{1,k}}(t,x)$$

est un module de concavité de la fonction $\log f_1$, puisque

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\Phi_{1,k}'}{\Phi_{1,k}} = \frac{\Phi_1'}{\Phi_1}\,;$$

ce raisonnement permet à B. Andrews et J. Clutterbuck d'obtenir le résultat suivant :

Théorème 2.4. — *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert à bord lisse strictement convexe de diamètre D et V une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overline{\Omega}$ de module de convexité $p \colon [0, D/2] \to \mathbb{R}$. Définissons $q(x) = \int_0^{|x|} p(\xi) d\xi$ et notons Φ_1 l'état fondamental de l'opérateur $-\frac{d^2}{dr^2} + q$ sur l'intervalle $[-D/2, D/2]$ pour les conditions de Dirichlet et f_1 l'état fondamental de l'opérateur $-\Delta + V$ pour les conditions de Dirichlet ; alors $\frac{1}{\Phi_1}\frac{d\Phi_1}{dr}$ est un module de concavité pour la fonction* $\log f_1$.

Remarquons que, lorsque V est convexe, alors 0 est un module de convexité pour V et ainsi le théorème 2.4 est une généralisation du théorème 2.1, il fournit aussi une extension du résultat de Brascamp-Lieb lorsque le potentiel n'est pas convexe. Et ainsi ce principe de comparaison permet de démontrer le résultat suivant :

Théorème 2.5. — *Dans le cadre du théorème (2.4), l'écart fondamental de l'opérateur $-\Delta + V$ sur Ω pour les conditions de Dirichlet est minoré par l'écart fondamental de l'opérateur $-\frac{d^2}{dr^2} + q$ sur l'intervalle $[-D/2, D/2]$ pour les conditions de Dirichlet.*

Autrement dit, si $\lambda_1 \leq \lambda_2$ sont les deux premières valeurs propres du spectre de $-\Delta + V$ sur Ω pour les conditions de Dirichlet et si $\mu_1 < \mu_2$ sont les deux premières valeurs propres du spectre de l'opérateur $-\frac{d^2}{dr^2} + q$ sur l'intervalle $[-D/2, D/2]$ pour les conditions de Dirichlet, alors

$$\mu_2 - \mu_1 \leq \lambda_2 - \lambda_1.$$

La preuve se déroule exactement de la même façon en considérant la fonction

$$\frac{u(x) - u(y)}{2w\left(\frac{|x-y|}{2}\right)}\,,$$

où, si on note Φ_1 l'état fondamental unidimensionnel et Φ_2 une fonction propre du modèle unidimensionnel pour la seconde valeur propre (c'est une fonction impaire), alors $w(r) = \Phi_2/\Phi_1$.

2.4

La preuve proposée par B. Andrews et J. Clutterbuck est un peu différente, elle passe par une comparaison des modules de continuité entre solutions d'équations paraboliques :

THÉORÈME 2.6. — *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert à bord lisse strictement convexe de diamètre D et $X\colon \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs dépendant du temps. On considère $v\colon \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation de la chaleur :*

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v + X \cdot \nabla v \ \textit{dans}\ \mathbb{R}_+ \times \Omega \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \ \textit{sur}\ \ \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega.$$

On suppose que $\omega\colon \mathbb{R}_+ \times [0, D/2] \to \mathbb{R}$ est une fonction lisse telle que pour tout $t \geq 0$, le champ de vecteurs $X(t, \,.\,)$ ait pour module de contraction $\omega(t, \,.\,)$.
Soit $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \times [0, D/2] \to \mathbb{R}_+$ une fonction lisse telle que :

i) $\varphi(0, \,.\,)$ est un module de continuité pour la fonction $v(0, \,.\,)$:

$$\forall x, y \in \Omega \ :\ |v(0, x) - v(0, y)| \leq 2\, \varphi(0, |x - y|/2)\,;$$

ii) pour tout $t \geq 0$, $r \mapsto \varphi(t, r)$ est une fonction à dérivée strictement positive s'annulant en $r = 0$;

iii) sur $\mathbb{R}_+ \times [0, D/2]$: $\frac{\partial \varphi}{\partial t} \geq \varphi'' + \omega\varphi'$.

Alors, pour tout $t \geq 0$, la fonction $\varphi(t, \,.\,)$ est un module de continuité pour $v(t, \,.\,)$.

Pour démontrer, avec ce résultat, le théorème 2.5, on considère le champ de vecteurs $X = \nabla \ln f_1$ et $v(t, x) = e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)t} f_2(x)/f_1(x)$ qui est une solution de l'équation :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v + X \cdot \nabla v\,.$$

Avec le résultat (2.4), nous savons que $\omega = \frac{\Phi_1'}{\Phi_1}$ est un module de contraction pour le champ X. Par ailleurs, la fonction $w := \Phi_2/\Phi_1$ est une fonction lisse sur $[-D/2, D/2]$ impaire et strictement positive sur $]0, D/2]$; ainsi on peut trouver une constante assez grande $\Lambda \gg 1$, afin que Λw soit un module de continuité pour la fonction $v(0, \,.\,)$. La fonction $\varphi(t, r) = \Lambda e^{-(\mu_2 - \mu_1)t} \Phi_2(r)/\Phi_1(r)$ vérifie l'équation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi'' + \omega\varphi',$$

mais uniquement sur $\mathbb{R}_+ \times [0, D/2[$, on ne peut donc pas appliquer directement le théorème 2.6 pour conclure que $\varphi(t, \,.\,)$ est un module de continuité de $v(t, \,.\,)$; néanmoins, B. Andrews et J. Clutterbuck arrivent à contourner cet écueil et ils obtiennent :

$$\forall t \geq 0, \forall x, y \in \Omega\colon e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)t} \left(\frac{f_2(x)}{f_1(x)} - \frac{f_2(y)}{f_1(y)} \right) \leq \Lambda e^{-(\mu_2 - \mu_1)t} \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \left(\frac{|x - y|}{2} \right).$$

Le comportement en $t \to +\infty$ fournit alors la minoration souhaitée : $\lambda_2 - \lambda_1 \geq \mu_2 - \mu_1$.

Ce résultat de comparaison a un intérêt qui va au-delà de son application pour la preuve de la conjecture de l'écart fondamental. Il fait partie d'une série de résultats de B. Andrews et J. Clutterbuck [6, 7, 9] permettant de contrôler les modules de continuité de solutions d'EDP paraboliques dans la veine du travail pionnier de S. N. Kružkov [45]. On peut aussi mentionner le papier [12] où B. Andrews et L. Ni redémontrent avec cette technique le résultat de D. Bakry et Z. Qian [17].

3. APPLICATIONS POUR LE FLOT PAR COURBURE MOYENNE

3.1. Flot par courbure moyenne

Soit Σ^n une variété compacte et $\{F_t\}_{|t|<\varepsilon}$ une famille $\mathcal{C}^1$ d'immersions $F_t \colon \Sigma \to \mathbb{R}^{n+1}$; la variation infinitésimale du volume de ces immersions s'exprime à l'aide de la courbure moyenne :

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \operatorname{vol}\left(F_t(\Sigma)\right) = -\int_\Sigma \left\langle \frac{\partial F_0(x)}{\partial t}, \vec{H}_0(x) \right\rangle \mathrm{dv}_{\mathbf{g}}$$

où $\mathrm{dv}_{\mathbf{g}}$ est la mesure riemannienne associée à $g = F_0^*(\mathrm{eucl})$, la première fondamentale de l'immersion F_0 et $\vec{H}_0 \colon \Sigma \to \mathbb{R}^{n+1}$ est le vecteur courbure moyenne associée à l'immersion F_0 ; on sait que

$$\vec{H}_0 = \Delta F_0$$

où Δ est le laplacien associé à g.

Ainsi lorsqu'on cherche à déformer une immersion $F_0 \colon \Sigma \to \mathbb{R}^{n+1}$ suivant la ligne de plus grande pente de la fonctionnelle $F \mapsto \operatorname{vol}(F(\Sigma))$, nous sommes amenés à trouver une famille d'immersions $F \colon [0, T[\times\Sigma \to \mathbb{R}^{n+1}$ telle que $F(0, x) = F_0(x)$ pour tout $x \in \Sigma$ et vérifiant l'équation

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = \vec{H}_t(x)\,,$$

où on a noté $\vec{H}_t \colon \Sigma \to \mathbb{R}^{n+1}$ le vecteur courbure moyenne associé à l'immersion $F_t = F(t, \,.\,)$.

Il s'agit d'un problème parabolique non linéaire dégénéré, néanmoins si nous choisissons de paramétrer $\Sigma_t = F_t(\Sigma)$ en utilisant les coordonnées normales à F_0 :

$$\Sigma_t = \{F_0(x) + u(t, x)\vec{\nu}_0(x), x \in \Sigma\}\ ,$$

où $\vec{\nu}_0 \colon \Sigma \to \mathbb{R}^{n+1}$ est un champ de vecteurs unitaire normal à Σ_0, alors cette équation d'évolution se retranscrit en une EDP parabolique quasilinéaire en la fonction $u \colon [0, T[\times\Sigma \to \mathbb{R}$ et ainsi ce problème dispose d'une unique – à reparamétrage près – solution maximale $F \colon [0, T_{\max}[\times\Sigma \to \mathbb{R}^{n+1}$.

3.2. Comportement le long du flot par courbure moyenne

Par exemple une sphère euclidienne de rayon R, $\mathbb{S}^n(R) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, évolue le long du flot par courbure moyenne en

$$t \mapsto \mathbb{S}^n\left(\sqrt{R^2 - 2nt}\right) \text{ et } T_{\max} = R^2/(2n).$$

On peut démontrer que le temps d'existence d'un flot par courbure moyenne est forcément fini ; en se servant, par exemple, de la formule

$$\frac{\partial \|F(t,x)\|^2}{\partial t} = \Delta \|F(t,x)\|^2 - 2n,$$

on démontre que, si D est le diamètre extrinsèque de $F_0(\Sigma)$, alors $T_{\max} \leq D^2/(8n)$.

On sait de plus que la norme de la seconde forme fondamentale de l'immersion F_t doit exploser au temps maximal :

$$\lim_{t \to T_{\max}} \|\mathrm{II}\|_{L^\infty} = +\infty\,.$$

Un résultat remarquable dû à G. Huisken en dimension $n \geq 2$ [37] et à M. Gage [31] et M. Gage et R. Hamilton [32] pour les courbes planes décrit l'évolution des hypersurfaces convexes :

Théorème 3.1. — *Soit $F_0 \colon \Sigma \to \mathbb{R}^{n+1}$ un plongement convexe. Alors l'évolution de F_0 le long du flot par courbure moyenne reste convexe et lorsque $t \to T_{\max}$, après dilatation, Σ_t converge vers une sphère ronde : il y a un point $p \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que lorsque $t \to T_{\max}$, alors*

$$(T_{\max} - t)^{-\frac{1}{2}} (\Sigma_t - p) \to \mathbb{S}^n\left(\sqrt{2n}\right)\,.$$

On dispose d'une amélioration de ce résultat pour les courbes planes, suivant M. Grayson : *si $F_0 \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ est une courbe fermée simple que l'on fait évoluer le long du flot par courbure moyenne, alors pour tout t, F_t est un plongement et après un temps $T_c < T_{\max}$, la courbe $F_t(\mathbb{S}^1)$ devient convexe et donc après dilatation cette courbe s'écrase en s'arrondissant sur un point du plan* [33].

Les arguments de M. Grayson ont été simplifiés par G. Huisken [38] qui a démontré le résultat suivant : notons $L(t)$ la longueur de la courbe $F_t(\mathbb{S}^1)$ et d_t la distance associée à la première forme fondamentale du plongement F_t, i.e. $d_t(x,y)$ est la longueur d'un des deux arcs joignant $F_t(x)$ à $F_t(y)$. G. Huisken montre que

$$\alpha(t) = \sup_{x,y \in \mathbb{S}^1} \frac{L(t)}{\|F_t(x) - F_t(y)\|} \sin\left(\pi \frac{d_t(x,y)}{L(t)}\right)$$

décroît avec t. Cette quantité étant invariante par dilatation, elle permet de contrôler les profils d'explosion, or ceux-ci ont été classifiés [1, 13], on peut alors en déduire que le seul profil d'explosion possible est circulaire. On pourra aussi consulter le travail de A. Magni et C. Mantegazza pour un exposé complet de ces arguments qui n'utilise pas cette classification [51].

3.3. Non effondrement et conséquences

En dimension supérieure, une série de travaux importants de B. White, de G. Huisken et C. Sinestrari ont permis de décrire les profils d'explosion du flot par courbure moyenne lorsque la condition initiale est à courbure moyenne positive [5] [39, 40, 57, 58, 59, 60]. Ces travaux ont permis à G. Huisken et C. Sinestrari de construire un flot avec chirurgie à la G. Perelman lorsqu'on déforme une hypersurface $\Sigma^{n\geq 3} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ dont la somme des deux plus petites courbures principales est positive [41] et comme pour les résultats de G. Perelmann un outil important est un résultat de non effondrement pour le flot par courbure moyenne [58, 54]. En utilisant la technique de doublement de variables, B. Andrews a fourni une preuve courte et élégante de ce résultat [3].

Si $F\colon \Sigma \to \mathbb{R}^{n+1}$ est un plongement à courbure moyenne strictement positive, alors B. Andrews introduit :

$$\alpha(F) = \sup_{x\neq y, x,y\in\Sigma} \frac{2\,\langle \vec{\nu}(x), F(y)-F(x)\rangle}{H(x)\,\|F(x)-F(y)\|^2}\,. \tag{13}$$

En effectuant un développement limité, on démontre que

$$\limsup_{y\to x} \frac{\langle \vec{\nu}(x), F(y)-F(x)\rangle}{\|F(x)-F(y)\|^2} = \rho_+\left(\mathrm{II}_x\right)$$

où on a noté $\rho_+\left(\mathrm{II}_x\right)$ la plus grande courbure principale en x ; c'est la plus grande valeur propre de la seconde forme fondamentale II_x (par rapport à g). Ainsi nous avons le contrôle :

$$\|\mathrm{II}_x\| \leq n\sqrt{n}\,\alpha(F)\,H(x)\,. \tag{14}$$

En fait la majoration :

$$\forall y \in \Sigma\,,\ \frac{2\,\langle \vec{\nu}(x), F(x)-F(y)\rangle}{\|F(x)-F(y)\|^2} \leq \frac{1}{R}$$

signifie que $F(\Sigma)$ est situé au-dehors de la boule tangente à $F(\Sigma)$ en $F(x)$ qui est centrée en $F(x)+R\vec{\nu}(x)$ et de rayon R. Ainsi $\alpha(F)$ est le plus petit réel α tel que $F(\Sigma)$ se situe au-dehors de la sphère tangente à $F(\Sigma)$ en $F(x)$ et de rayon $1/(\alpha H(x))$.

Théorème 3.2. — *Si $F_0\colon \Sigma \to \mathbb{R}^{n+1}$ est un plongement à courbure moyenne strictement positive, alors le long du flot par courbure moyenne la quantité $t \mapsto \alpha(F_t)$ est décroissante.*

Ce résultat avec l'estimation (14) implique donc que c'est la courbure moyenne qui contrôle les courbures des profils d'explosion.

La preuve de B. Andrews repose sur un long calcul menant à une équation décrivant l'évolution de la fonction

$$Z(t,x,y) = \frac{1}{2}H_t(x)\|F(t,x)-F(t,y)\|^2 + \delta\,\langle \vec{\nu}_t(x), F(t,x)-F(t,y)\rangle\,.$$

5. Pour un choix idoine de normale, la fonction $\langle \vec{\nu}_0, \vec{H}_0\rangle$ est positive.

On remarque que $\delta\alpha(F_t) \geq 1$ si et seulement si la fonction $Z(t, \,.\,, \,.\,)$ est positive ou nulle. Ainsi on considère le cas où $\delta\alpha(F_0) = 1$; ainsi la fonction $Z(0, \,.\,, \,.\,)$ est positive ou nulle.

Supposons que $t > 0$ et considérons un point $\left(\underline{x}, \underline{y}\right)$ avec $\underline{x} \neq \underline{y}$ où la fonction $Z(t, \,.\,, \,.\,)$ atteint son maximum (ou son minimum). L'annulation des dérivées premières par rapport aux variations de $\underline{y}$ montre l'on peut choisir des repères orthonormés $(e_1, \ldots, e_n)$ de $T_{\underline{x}}\Sigma$ et $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ de $T_{\underline{y}}\Sigma$ tels que

$$e_i = \epsilon_i \perp (\underline{x} - \underline{y}) \text{ pour } i < n\,;$$

On considère alors des coordonnées normales $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ au voisinage de $\underline{x}$ et $\underline{y}$ associées à ces repères orthonormés. Après un long calcul, B. Andrews démontre alors qu'en $(t, \underline{x}, \underline{y})$ nous avons :

$$\text{(15)}\quad \frac{\partial Z}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y_i^2} + 2\frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial y_i} \right) + \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x_n^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y_n^2} + 2\langle e_n, \epsilon_n \rangle \frac{\partial^2 Z}{\partial x_n \partial y_n} \right) + aZ\,,$$

où a est une fonction lisse bornée sur $[0, t] \times (\Sigma \times \Sigma \setminus \mathrm{Diag})$.

Alors avec une utilisation du principe du maximum pour les équations paraboliques dégénérées, ceci permet de démontrer que pour tout $t > 0$, Z est positive et donc que pour tout $t \in [0, T_{\max}[$:

$$\alpha(F_t) \leq \alpha(F_0).$$

Ce résultat a été reformulé et étendu pour d'autres flots géométriques par B. Andrews, M. Langford et J. Mc Coy [10] : si $F_t \colon [0, T_{\max}[\times \Sigma \to \mathbb{R}^{n+1}$ est un flot par courbure moyenne, ils introduisent les fonctions

$$Z^*(t, x) = \sup_{y \neq x} \frac{2\,\langle \vec{\nu}_t(x), F(t, y) - F(t, x) \rangle}{\|F(t, x) - F(t, y)\|^2} \;\text{ et }\; Z_*(t, x) = \inf_{y \neq x} \frac{2\,\langle \vec{\nu}_t(x), F(t, x) - F(t, y) \rangle}{\|F(t, x) - F(t, y)\|^2}$$

et ils démontrent que Z^* (resp. Z_*) est une sous-solution (resp. sur-solution) de viscosité de l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f + \|\mathrm{II}\|^2 f\,.$$

On sait que la courbure moyenne est une solution de cette équation parabolique et le principe du maximum implique qu'un pincement de la forme :

$$aH_0(x) \leq \frac{2\,\langle \vec{\nu}(x), F(0, x) - F(0, y) \rangle}{\|F(0, x) - F(0, y)\|^2} \leq bH_0(x)$$

est préservé le long du flot par courbure moyenne.

Récemment, S. Brendle a obtenu un raffinement de ce résultat [26], il démontre que Z^* est une sous-solution de viscosité de l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f + \|\mathrm{II}\|^2 f - 2\left\langle \left(Z^*\mathrm{Id} - g^{-1}II\right)^{-1} \nabla f, \nabla f \right\rangle\,.$$

Notons ici que le terme supplémentaire est bien négatif et s'annule uniquement au point critique de f. Ce résultat est un des arguments qui permettent alors à S. Brendle et

G. Huisken de construire un flot par courbure moyenne avec chirurgie pour les surfaces $\Sigma^2 \subset \mathbb{R}^3$ à courbure moyenne positive [28].

4. LA PREUVE DE LA CONJECTURE DE LAWSON

Nous allons maintenant donner les arguments clés et quelques idées sur la preuve menée par S. Brendle. Nous conseillons fortement au lecteur de se référer à l'article original car malgré leurs difficultés et leurs hautes technicités les calculs y sont menés avec une clarté et un souci pédagogique exemplaire.

4.1. Géométries des surfaces dans $\mathbb{S}^3$

Soit $\Sigma \subset \mathbb{S}^3$ une surface orientée et $\vec{\nu}\colon \Sigma \to \mathbb{S}^3$ un champ de normales unitaires ; nous noterons g la première forme fondamentale/ la métrique riemannienne induite sur Σ. La seconde forme fondamentale de Σ, notée $A_x\colon T_x\Sigma \to \mathbb{R}$, est définie par

$$A_x(v) = -\langle \nabla_v \vec{\nu}, v\rangle$$

où ∇ est la connexion de Levi-Civita de $\mathbb{S}^3$. Le vecteur courbure moyenne est défini par $\vec{H} = H\vec{\nu}$ où $H = \operatorname{tr} A$. En fait en notant $x\colon \Sigma \to \mathbb{R}^4$ le vecteur position et Δ le laplacien sur Σ associé à la première forme fondamentale, nous avons

$$\vec{H} = \Delta x + 2x.$$

Ainsi une surface $\Sigma \subset \mathbb{S}^3$ est minimale si et seulement si les fonctions coordonnées sont des fonctions propres pour la valeur propre 2 du laplacien sur Σ.

Supposons maintenant que $\Sigma \subset \mathbb{S}^3$ soit une surface minimale, alors en tout point de Σ, les courbures principales (les valeurs propres de la seconde forme fondamentale par rapport à la première forme fondamentale) sont opposées : notons-les $-\Psi \leq \Psi$. Nous avons alors $\|A_x\| = \sqrt{2}\,\Psi$. Le théorème Egregium de Gauss nous apprend que la courbure de Σ est

$$K^\Sigma = 1 + \det A = 1 - \Psi^2\,, \tag{16}$$

ce qui avec la formule de Gauss-Bonnet nous indique que

$$\int_\Sigma \Psi^2\,\mathrm{dv}_{\mathbf{g}} = \mathrm{Aire}(\Sigma, g) - 2\pi\chi(\Sigma)\,. \tag{17}$$

Les coordonnées isothermes sur (Σ, g) équipent Σ d'une structure complexe/conforme ; le fibré des formes quadratiques de trace nulle ne dépend que de la structure conforme et en fait il est isomorphe au fibré en droite complexe des $(2,0)$-formes symétriques :

$$\odot_0^2 T^*\Sigma \simeq \Omega^{(2,0)}(\Sigma).$$

En coordonnées isothermes $z = u + iv$ avec $g = e^{2f}((du)^2 + (dv)^2)$; si B est une forme quadratique de trace nulle sur $T_x^*\Sigma$, alors $B = a((du)^2 - (dv)^2) + 2b du dv$ est associé à $(a + ib)(du + idv)^2$. Ainsi la deuxième forme fondamentale de Σ est associée à une $(2,0)$-forme notée ω et appelée forme de Almgren-Hopf. Il se trouve que cette forme ω

est holomorphe : $\bar{\partial}\omega = 0$. En particulier le nombre, avec multiplicités, de ses zéros est prescrit par le genre γ de Σ. En particulier en genre nul, ω est nulle, donc Σ est totalement géodésique et on peut alors facilement démontrer que Σ est un équateur de $\mathbb{S}^3$. Et en genre $\gamma \geq 1$, nous avons :

$$\#\omega^{-1}\{0\} = 2\gamma - 2 = -\chi(\Sigma)\,.$$

Ainsi pour un tore, ω ne s'annule pas et les courbures principales ne s'annulent pas : la fonction Ψ reste strictement positive et avec l'équation (17) nous avons :

$$\int_\Sigma \Psi^2 \, \mathrm{dv}_{\mathbf{g}} = \mathrm{Aire}(\Sigma, g)\ . \tag{18}$$

4.2. Un résultat préliminaire

On dispose du résultat suivant de H. B. Lawson [47] :

Théorème 4.1. — *Soit $\Sigma \subset \mathbb{S}^3$ un tore minimal dont la longueur de la seconde forme fondamentale est constante, alors Σ est isométrique au tore de Clifford.*

Les arguments de la preuve sont les suivants : puisque ω est holomorphe, nous avons

$$|\nabla^\Sigma \omega|^2 = 2|d\Psi|^2\ , \tag{19}$$

ainsi ω est une $(2,0)$ forme parallèle et la seconde forme fondamentale est aussi parallèle. Ceci permet de démontrer que les lignes de courbures sont en fait géodésiques et on peut alors retrouver la géométrie globale de Σ en appliquant le théorème de Bonnet.

Un autre ingrédient utilisé par S. Brendle est l'équation de J. Simons vérifiée par la seconde forme fondamentale, ce qui équivaut ici à la formule de Bochner vérifiée par la $(2,0)$ forme ω :

$$\left(\nabla^\Sigma\right)^* \nabla\omega + 2K^\Sigma\omega = 0\,.$$

Le théorème Egregium de Gauss (16) et l'identité (19) permettent de montrer que la fonction Ψ vérifie l'équation elliptique non linéaire :

$$\Delta\Psi - \frac{|d\Psi|^2}{\Psi} + 2\left(\Psi^2 - 1\right)\Psi = 0\ . \tag{20}$$

De nombreux résultats de rigidité ont été démontrés à l'aide des équations de J. Simons, mais ici le signe du terme en gradient Ψ dans la formule (20) ne permet pas de conclure.

4.3. La preuve de S. Brendle

On introduit la fonction :

$$\Phi(x) = \sup_{y \in \Sigma \setminus \{x\}} \frac{|\langle \vec{\nu}(x), y\rangle|}{1 - \langle x, y\rangle}.$$

La fonction $y \in \Sigma \setminus \{x\} \mapsto |\langle \vec{\nu}(x), y\rangle| / (1 - \langle x, y\rangle)$ a un prolongement continu à la compactification radiale de $\Sigma \setminus \{x\}$ et les limites radiales en x de cette fonction sont données par les courbures normales en x ; ainsi nous avons l'inégalité :

$$\Phi \geq \Psi.$$

On peut également démontrer que la fonction Φ est continue.

Comme pour la quantité (cf. formule 13) introduite par B. Andrews, nous avons une interprétation géométrique de cette fonction : en développant l'expression $\|x \pm R\vec{\nu}(x) - y\|^2$, on voit que $1/\Phi(x)$ est le plus grand rayon R tel que Σ se situe au-dehors d'une boule euclidienne de rayon R tangente à Σ en x. Notons que les sphères euclidiennes tangentes à Σ et de rayon R dessinent sur $\mathbb{S}^3$ des sphères totalement ombilicales de courbures principales $1/R$. S. Brendle démontre alors :

Proposition 4.2. — *La fonction Φ est une sous-solution de viscosité de l'équation*

$$\Delta\Phi - \frac{|d\Phi|^2}{\Phi} + 2\left(\Psi^2 - 1\right)\Phi = 0.$$

De plus en un point $x \in \Sigma$ au voisinage duquel $\kappa\Psi = \Phi$, pour une constante $\kappa > 1$, alors $d\Phi(x) = 0$.

Expliquons comment cette proposition permet de conclure :

i) Le principe du maximum pour les sous-solutions de viscosité de cette équation implique que Φ est proportionnelle à Ψ : il y a une constante $\kappa \geq 1$ telle que $\Phi = \kappa\Psi$.

ii) La seconde partie de la proposition précédente implique que, si $\kappa > 1$, alors Φ (et donc Ψ) est constante et alors le résultat de H. B. Lawson implique que Σ est isométrique à un tore de Clifford.

iii) Si $\Phi = \Psi$, alors on sait que pour tout x, Σ se situe au-dehors des deux boules euclidiennes de rayon $1/\Psi(x)$ tangentes à Σ en x. Considérons (e_+, e_-) une base orthonormée de $T_x\Sigma$ propre pour A_x :

$$-\nabla_{e_\pm}\vec{\nu}(x) = \pm\Psi(x)e_\pm.$$

En effectuant un développement limité à l'ordre 3 de Σ au voisinage de x, on trouve que $\nabla_{e_\pm}A(e_\pm, e_\pm) = 0$ mais par ailleurs nous avons $d\Psi(e_\pm) = \pm\nabla_{e_\pm}A(e_\pm, e_\pm)$. Ceci démontre que Ψ est constante sur Σ, on peut alors de même conclure que Σ est isométrique à un tore de Clifford.

4.4. Sur la preuve de la proposition (4.2)

Nous fixons $\underline{x} \in \Sigma$ et une fonction lisse $\varphi\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi \geq \Phi$ et $\varphi(\underline{x}) = \Phi(\underline{x})$. Nous devons démontrer qu'en $\underline{x}$:

$$\Delta\varphi - \frac{|d\varphi|^2}{\varphi} + 2\left(\Psi^2 - 1\right)\varphi \geq 0.$$

Nous distinguons deux cas : le premier est celui où $\Phi(\underline{x}) = \Psi(\underline{x})$ et alors, puisque $\Phi \geq \Psi$, la fonction $\varphi - \Psi$ présente un minimum en $\underline{x}$; en particulier nous avons

$$\Psi(\underline{x}) = \varphi(\underline{x})\,,\ d\Psi(\underline{x}) = d\varphi(\underline{x}) \ \text{ et } \ \Delta\varphi(\underline{x}) \geq \Delta\Psi(\underline{x})\,,$$

il est alors facile de conclure.

Dans le cas où $\Phi(\underline{x}) > \Psi(\underline{x})$, alors nécessairement il y a un $\underline{y} \neq \underline{x}$ tel que (après un choix idoine de normale unitaire)

$$\forall x, y \in \Sigma\colon \varphi(x) \geq -\frac{\langle \vec{\nu}(x), y\rangle}{1-\langle x, y\rangle} \text{ et } \varphi(\underline{x}) = -\frac{\langle \vec{\nu}(\underline{x}), \underline{y}\rangle}{1-\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle}.$$

Ainsi la fonction $Z(x,y) = \varphi(x)\,(1-\langle x,y\rangle) + \langle \vec{\nu}(x), y\rangle$ est positive et elle s'annule en $(\underline{x}, \underline{y})$.

La différentielle de Z est donc nulle en $(\underline{x}, \underline{y})$. L'annulation des dérivées partielles par rapport à la seconde variable s'interprète géométriquement : la surface Σ se situe au-dehors de la boule $\mathbb{B}$ centrée en $\underline{x} - \varphi^{-1}(\underline{x})\vec{\nu}(\underline{x})$ et de rayon $1/\varphi(\underline{x})$ et elle touche cette boule en $\underline{x}$, ainsi les plans tangents à Σ et à la sphère $\partial\mathbb{B}$ coïncident en $\underline{x}$ et $\underline{y}$, en particulier les plans tangents à Σ en $\underline{x}$ et $\underline{y}$ sont symétriques par rapport à l'hyperplan médian à $[\underline{x}, \underline{y}]$.

L'annulation des dérivées partielles par rapport à la première variable mène à :

$$\forall v \in T_{\underline{x}}\Sigma\,,\ d\varphi(\underline{x})(v)(1-\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle) - \varphi(\underline{x})\langle v, y\rangle + \langle \nabla_v \vec{\nu}(\underline{x}), \underline{y}\rangle = 0\,. \tag{21}$$

En notant $\Pi_{\underline{x}}(\underline{y})$ la projection orthogonale de $\underline{y}$ sur le plan tangent à Σ en $\underline{x}$, nous obtenons

$$|d\varphi(\underline{x})| \leq \frac{2\varphi(\underline{x})}{1-\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle}|\Pi_{\underline{x}}(\underline{y})|. \tag{22}$$

Pour le calcul, il faut choisir de façon adéquate des bases orthonormées (e_1, e_2) de $T_{\underline{x}}\Sigma$ et (ϵ_1, ϵ_2) de $T_{\underline{y}}\Sigma$. S. Brendle les choisit symétriques par rapport à l'hyperplan médian du segment $[\underline{x}, \underline{y}]$ telles que de plus $Ae_1 = \Psi(\underline{x})e_1$ et $Ae_2 = -\Psi(\underline{x})e_2$. Ceci permet d'introduire des coordonnées exponentielles au voisinage de $\underline{x}$ et $\underline{y}$:

$$(x_1, x_2) \mapsto \exp_{\underline{x}}(x_1 e_1 + x_2 e_2) \text{ et } (y_1, y_2) \mapsto \exp_{\underline{y}}(y_1 \epsilon_1 + y_2 \epsilon_2).$$

La clé de la preuve de S. Brendle est un long calcul qui mène à l'égalité (cf. [22, Proposition 6]) :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_i}\right) Z(\underline{x}, \underline{y}) = &\\ \left(\Delta\varphi(\underline{x}) - \frac{|d\varphi|^2}{\varphi}(\underline{x}) + 2\left(\Psi^2(\underline{x}) - 1\right)\varphi(\underline{x})\right)&(1-\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle)\\ - \frac{1}{\varphi((\underline{x})}\frac{\varphi^2(\underline{x}) - \Psi^2(\underline{x})}{1-\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle}\,|\Pi_{\underline{x}}(\underline{y})|^2\,.&\end{aligned} \tag{23}$$

Sur la démonstration de la formule (23).– En se servant de la formule $\Delta y_i = -2y_i$ pour $i = 1, 2$, nous obtenons facilement :

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 Z}{\partial y_i^2}(\underline{x}, \underline{y}) = 2Z(\underline{x}, \underline{y}) + 2\varphi(\underline{x}) = 2\varphi(\underline{x})\,. \tag{24}$$

Maintenant les équations (21) se reformulent en :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\underline{x}) = \frac{\varphi(\underline{x})+\Psi(\underline{x})}{1-\langle \underline{x},\underline{y}\rangle}\langle e_1, y\rangle \text{ et } \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(\underline{x}) = \frac{\varphi(\underline{x})-\Psi(\underline{x})}{1-\langle \underline{x},\underline{y}\rangle}\langle e_2, y\rangle\,, \tag{25}$$

de plus avec ce choix des repères (e_1, e_2) et (ϵ_1, ϵ_2), nous avons les identités :

$$\langle e_i, \epsilon_i\rangle = 1 - \frac{\langle \underline{y}, \epsilon_i\rangle}{1-\langle \underline{x},\underline{y}\rangle} \text{ et } \langle \underline{x}, \epsilon_i\rangle = \langle e_i, \underline{y}\rangle\,.$$

Ces identités permettent d'obtenir :

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 Z}{\partial x_i\partial y_i}(\underline{x},\underline{y}) = -2\varphi(\underline{x})\,. \tag{26}$$

Si la conclusion du calcul est simple, c'est parce que ce choix astucieux de repères orthonormés et cette combinaison de dérivées croisées permettent une simplification miraculeuse qui n'apparaît pas dans le calcul menant à l'identité (15). Il reste à calculer le laplacien de Z par rapport à la variation de $\underline{x}$; pour cela on utilise que la $f(x) = \langle \vec{\nu}(x), \underline{y}\rangle$ vérifie :

$$\Delta f = -2\Psi^2 f\,;$$

alors S. Brendle mène un long calcul qui conduit à l'identité suivante :

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 Z}{\partial x_i^2}(\underline{x},\underline{y}) = \Big(\Delta\varphi(\underline{x}) - 2\varphi(\underline{x}) + 2\Psi^2(\underline{x})\varphi(\underline{x})\Big)\Big(1-\langle \underline{x},\underline{y}\rangle\Big) + 2\varphi(\underline{x}) - 2\sum_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(\underline{x})\langle e_i, y\rangle. \tag{27}$$

On vérifie alors la validité de la formule (23) en additionnant les égalités (24, 26, 27) et en utilisant les formules (25) et le fait que

$$\frac{|d\varphi|^2}{\varphi}(\underline{x})\Big(1-\langle \underline{x},\underline{y}\rangle\Big)^2 = \left(\varphi(\underline{x}) + \frac{\Psi^2(\underline{x})}{\varphi(\underline{x})}\right)|\Pi_{\underline{x}}(\underline{y})|^2 + 2\Psi(\underline{x})\Big(\langle e_1, \underline{y}\rangle^2 - \langle e_2, \underline{y}\rangle^2\Big)\,.$$

J'invite le lecteur à faire soigneusement les calculs et à découvrir la combinaison miraculeuse des différents termes qui permet d'exprimer la somme des identités (24,26,27) comme combinaison de deux termes dont le premier a le signe de $\Delta\varphi - \frac{|d\varphi|^2}{\varphi} + 2\,(\Psi^2-1)\,\varphi$ et le suivant est négatif. C'est l'apparition de ce second terme avec le bon signe qui permet de dépasser l'utilisation brute inopérante de l'équation de Simons (20). Car c'est celui-ci qui permet de démontrer la seconde partie de la proposition (4.2) et donc de conclure (dans le cas où $\kappa > 1$) au fait que les courbures principales sont constantes. □

On peut maintenant conclure la preuve de la proposition (4.2) : puisque Z atteint son minimum en $(\underline{x}, \underline{y})$, le membre de gauche de l'égalité (23) est positif ou nul et donc

$$\frac{1}{\varphi((\underline{x})}\frac{\varphi(\underline{x})-\Psi(\underline{x})}{\Big(1-\langle \underline{x},\underline{y}\rangle\Big)^2}|\Pi_{\underline{x}}(\underline{y})|^2 \le \Delta\varphi(\underline{x}) - \frac{|d\varphi|^2}{\varphi}(\underline{x}) + 2\Big(\Psi^2(\underline{x})-1\Big)\varphi(\underline{x}),$$

ce qui montre l'inégalité voulue.

Lorsqu'au voisinage de $\underline{x} \in \Sigma$, $\kappa\Psi = \Phi$ pour une constante $\kappa > 1$, alors on peut appliquer le raisonnement précédent avec $\varphi = \Phi$ et puisque Φ vérifie l'équation $\Delta\Phi - \frac{|d\Phi|^2}{\Phi} + 2\left(\Psi^2(\underline{x}) - 1\right)\Phi = 0$ au voisinage de $\underline{x}$, nous obtenons $|\Pi_{\underline{x}}(\underline{y})| = 0$ et donc avec l'inégalité (22) : $d\Phi(\underline{x}) = 0$.

Les arguments originaux de S. Brendle sont un peu différents : il pose $\kappa = \max_\Sigma(\Phi/\Psi)$. Lorsque $\kappa = 1$, alors $\Phi = \Psi$ et nous avons déjà expliqué plus haut comment S. Brendle conclut dans ce cas-là. Lorsque $\kappa > 1$, on considère la fonction

$$Z_\kappa(x,y) = \kappa\Psi(x)\left(1 - \langle x,y\rangle\right) + \langle\vec{\nu}(x), y\rangle\,.$$

Et on introduit le fermé Ω formé des points x pour lesquels il existe un $y \in \Sigma$ tel que $Z_\kappa(x,y) = 0$. La formule (23) implique que, sur Ω, $d\Psi = 0$. Ensuite S. Brendle démontre qu'alors, au voisinage d'un point $(\underline{x}, \underline{y})$ où $Z_\kappa(\underline{x}, \underline{y}) = 0$, une variation sur le calcul qui mène à la formule (23) montre que la fonction Z vérifie une inéquation aux dérivées partielles elliptiques dégénérées de la forme :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_i}\right) Z(x,y) \leq{} & -\frac{(\kappa^2-1)\,\Psi}{\kappa\left(1 - \langle\underline{x},\underline{y}\rangle\right)}\,|\Pi_x(y)|^2 \\ & + \Lambda(x,y)\left(Z(x,y) + |\nabla Z|\,(x,y)\right).\end{aligned}$$

Il peut alors appliquer le principe du maximum de J.-M. Bony [20] pour démontrer que, pour tout $x \in \Sigma$, il y a un $y \in \Sigma$ tel que $Z(x,y) = 0$. Ainsi $\Omega = \Sigma$ et donc Ψ est une fonction constante.

RÉFÉRENCES

[1] U. ABRESCH, J. LANGER – The normalized curve shortening flow and homothetic solutions, *J. Diff. Geom.* **23** (1986), no. 2, 175–196.

[2] M. ANDERSON – Alexandrov immersions, holonomy and minimal surfaces in $\mathbb{S}^3$, prépublication arXiv :1407.6925.

[3] B. ANDREWS – Noncollapsing in mean-convex mean curvature flow, *Geom. Topol.* **16** (2012), no. 3, 1413–1418.

[4] B. ANDREWS – *Gradient and oscillation estimates and their applications in geometric PDE.* Fifth International Congress of Chinese Mathematicians. Part 1, 2, 3–19, AMS/IP Stud. Adv. Math., 51, pt. 1, 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012.

[5] B. ANDREWS – Moduli of continuity, isoperimetric profiles, and multi-point estimates in geometric heat equations. Prépublication, disponible à *http ://maths-people.anu.edu.au/ andrews/HSU_Survey141121.pdf.*

[6] B. ANDREWS, J. CLUTTERBUCK – Lipschitz bounds for solutions of quasilinear parabolic equations in one space variable, *J. Differential Equations* **246** (2009), no. 11, 4268–4283.

[7] B. ANDREWS, J. CLUTTERBUCK – Time-interior gradient estimates for quasilinear parabolic equations, *Indiana Univ. Math. J.* **58** (2009), no. 1, 351‚Äì380.

[8] B. ANDREWS, J. CLUTTERBUCK – Proof of the fundamental gap conjecture. *J. Amer. Math. Soc.* **24** (2011), 899–916.

[9] B. ANDREWS, J. CLUTTERBUCK – Sharp modulus of continuity for parabolic equations on manifolds and lower bounds for the first eigenvalue, *Anal. PDE* **6** (2013), no. 5, 1013–1024.

[10] B. ANDREWS, M. LANGFORD, J. McCOY – Non-collapsing in fully non-linear curvature flows. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **30** (2013), no. 1, 23–32.

[11] B. ANDREWS, H. LI – Embedded constant mean curvature tori in the three-sphere, Prépublication (arXiv.org/1204.5007) à paraître dans *J. Diff. Geom.*

[12] B. ANDREWS, L. NI – Eigenvalue comparison on Bakry-Emery manifolds. *Comm. Partial Differential Equations* **37** (2012), no. 11, 2081–2092.

[13] S. ANGEMENT – On the formation of singularities in the curve shortening flow. *J. Diff. Geom.* **33** (1991), no. 3, 601–633.

[14] M. S. ASHBAUGH – The Fundamental Gap (2006), survol disponible à http ://www.aimath.org/WWN/loweigenvalues/.

[15] M. S. ASHBAUGH, R. BENGURIA – Optimal lower bound for the gap between the first two eigenvalues of one-dimensional Schrödinger operators with symmetric single-well potentials, *Proc. Amer. Math. Soc.* **105** (1989), no. 2, 419–424.

[16] M. S. ASHBAUGH, R. BENGURIA – *Optimal lower bounds for eigenvalue gaps for Schrödinger operators with symmetric single-well potentials and related results,* in Maximum Principles and Eigenvalue Problems in Partial Differential Equations (Knoxville, TN, 1987), vol. 175 of Pitman Research Notes Mathematical Series, pp. 134–145, Longman Science and Technology, Harlow, Harlow, 1988.

[17] D. BAKRY, Z. QIAN – Some new results on eigenvectors via dimension, diameter, and Ricci flow. *Adv. Math.* **155** (2000), 98–153.

[18] R. BAÑUELOS, P. KRÖGER – Gradient estimates for the ground state Schrödinger eigenfunction and applications, *Comm. Math. Phys.* **224** (2001), no. 2, 545–550.

[19] A. I. BOBENKO – All constant mean curvature tori in $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{H}^3$ in terms of theta-functions. *Math. Ann.* **290** (1991), no. 2, 209–245.

[20] J.-M. BONY – Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **19** (1969), fasc. 1, 277–304.

[21] H. J. BRASCAMP, E. H. LIEB – On extensions of the Brunn-Minkowski and Prékopa-Leindler theorems, including inequalities for log concave functions, and with an application to the diffusion equation, *J. Functional Analysis* **22** (1976), no. 4, 366–389.

[22] S. BRENDLE – Embedded minimal tori in $\mathbb{S}^3$ and the Lawson conjecture, *Acta Math.* **211** (2013), no. 2, 177–190.

[23] S. BRENDLE – Alexandrov immersed minimal tori in $\mathbb{S}^3$, *Math. Res. Lett.* **20** (2013), no. 3, 459–464.

[24] S. BRENDLE – Minimal surfaces in $\mathbb{S}^3$: a survey of recent results, *Bull. Math. Sci.* **3** (2013), no. 1, 133–171.

[25] S. BRENDLE – Embedded Weingarten tori in $\mathbb{S}^3$, *Adv. Math.* **257** (2014), 462–475.

[26] S. BRENDLE – An inscribed radius estimate for mean curvature flow in Riemannian manifolds, à paraître dans *Invent. Math.*, arxiv :1310.3439

[27] S. BRENDLE – Two-point functions and their applications in geometry. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **51** (2014), no. 4, 581–596.

[28] S. BRENDLE and G. HUISKEN – Mean curvature flow with surgery of mean convex surfaces in $\mathbb{R}^3$, prépublication arxiv :1309.1461.

[29] M. G. CRANDALL, H. ISHII, P.-L. LIONS – User's Guide to viscosity solutions of second order partial differential equations, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **27** (1992), 1–67.

[30] B. DAVIS – On the spectral gap for fixed membranes, *Ark. Mat.* **39** (2001), no. 1, 65–74.

[31] M. GAGE – Curve shortening makes convex curves circular, *Invent. Math.* **76** (1984), no. 2, 357–364.

[32] M. GAGE and R. S. HAMILTON – The heat equation shrinking convex plane curves, *J. Diff. Geom.* **23** (1986), no. 1, 69–96.

[33] M. A. GRAYSON – The heat equation shrinks embedded plane curves to round points, *J. Diff. Geom.* **26** (1987), no. 2, 285–314.

[34] L. HAUSWIRTH, M. KILIAN, M. U. SCHMIDT – The geometry of embedded constant mean curvature tori in the 3-sphere via integrable systems, prépublication arXiv :1309.4278.

[35] N. HITCHIN – Harmonic maps from a 2-torus to the 3-sphere. *J. Diff.. Geom.* **31**(1990), no 3, 627–710.

[36] M. HORVÁTH – On the first two eigenvalues of Sturm-Liouville operators, *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** (2003), no. 4, 1215–1224.

[37] G. HUISKEN – Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres, *J. Diff. Geom.* **20** (1984), no. 1, 237–266.

[38] G. HUISKEN – A distance comparison principle for evolving curves, *Asian J. Math.* **2** (1998), no. 1, 127–133.

[39] G. HUISKEN, C. SINESTRARI – Mean curvature flow singularities for mean convex *Calc. Var.* **8** (1999), 1–14.

[40] G. HUISKEN, C. SINESTRARI – Convexity estimates for mean curvature flow and singularities of mean convex surfaces, *Acta Math.* **183** (1999), no. 1, 45–70.

[41] G. HUISKEN, C. SINESTRARI – Mean curvature flow with surgeries of two-convex hypersurfaces, *Invent. Math.* **175** (2009), no. 1, 137–221.

[42] B. KAWOHL – *Rearrangements and convexity of level sets in PDE*, Lecture Notes in Math., vol. 1150, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[43] N. J. KOREVAAR – Convex solutions to nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems, *Indiana Univ. Math. J.* **32** (1983), no. 4, 603–614.

[44] P. KRÖGER – On the spectral gap for compact manifolds, *J. Diff. Geom.* **36** (1992), no. 2, 315–330.

[45] S. N. KRUŽKOV – Quasilinear parabolic equations and systems with two independent variables, *Trudy Sem. Petrovsk.* (1979), no. 5, 217–272.

[46] R. LAVINE – The eigenvalue gap for one-dimensional convex potentials, *Proc. Amer. Math. Soc.* **121** (1994), no. 3, 815–821.

[47] H. B. LAWSON Jr. – Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces, *Ann. of Math. (2)* **89** (1969), 187–197.

[48] H. B. LAWSON Jr. – Complete minimal surfaces in $\mathbb{S}^3$, *Ann. of Math. (2)* **92** (1970), 335–374.

[49] H. B. LAWSON Jr. – The unknottedness of minimal embeddings, *Invent. Math.* **11** (1970), 183–187.

[50] P. LI, S.-T. YAU – *Estimates of eigenvalues of a compact Riemannian manifold.* In : Geometry of the Laplace operator (Proc. Sympos. Pure Math., Univ. Hawaii, Honolulu, Hawaii, 1979), Proc. Sympos. Pure Math., XXXVI. (1980) Providence, RI : AMS, pp. 205–239.

[51] A. MAGNI, C. MANTEGAZZA – A note on Grayson's theorem. *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova* **131** (2014), 263–279.

[52] L. NI – Estimates on the modulus of expansion for vector fields solving nonlinear equations. *J. Math. Pures Appl.* (9) **99** (2013), no. 1, 1–16.

[53] U. PINKAL, I. STERLING – On the classification of constant mean curvature tori. *Ann. of Math.* (2) **130** (1989), no. 2, 407–45.

[54] W. SHENG, X.-J. WANG – Singularity profile in the mean curvature flow, *Methods Appl. Anal.* **16** (2009), no. 2, 139–155.

[55] I. M. SINGER, B. WONG, S.-T. YAU, S. S.-T. YAU – An estimate of the gap of the first two eigenvalues in the Schrödinger operator, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4) **12** (1985), no. 2, 319–333.

[56] M. VAN Den BERG – On condensation in the free-boson gas and the spectrum of the Laplacian, *J. Statist. Phys.* **31** (1983), no. 3, 623–637.

[57] B. WHITE –The size of the singular set in mean curvature flow of mean-convex sets, *J. Amer. Math. Soc.* **13** (2000), no. 3, 665–695.

[58] B. WHITE – The nature of singularities in mean curvature flow of mean-convex sets, *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003), no. 1, 123–138.

[59] B. WHITE – Subsequent singularities in mean-convex mean curvature flow, arxiv :1103.1469.

[60] B. WHITE – Topological change in mean convex mean curvature flow, *Invent. Math.* **191** (2013), no. 3, 501–525.

[61] S.-T. YAU – Nonlinear analysis in geometry, *Enseign. Math.* **33** (1985), 109–158.

[62] Q. H. YU, J. Q. ZHONG – Lower bounds of the gap between the first and second eigenvalues of the Schrödinger operator, *Trans. Amer. Math. Soc.* **294** (1986), no. 1, 341–349.

[63] J. Q. ZHONG, H. C. YANG – On the estimate of the first eigenvalue of a compact Riemannian manifold. *Sci. Sinica Ser. A* **27** (1984), 1265–1273.

Gilles CARRON

Laboratoire de Mathématiques Jean Leray
Université de Nantes,
2, rue de la Houssinière - BP 92208
F-44322 Nantes Cedex 3
E-mail : `gilles.carron@univ-nantes.fr`