

**RÉALISATIONS GÉOMÉTRIQUES DE L'HOMOLOGIE DE
KHOVANOV PAR DES HOMOLOGIES DE FLOER**
[d'après Abouzaid-Seidel-Smith et Ozsváth-Szabó]

par Vincent COLIN

1. INTRODUCTION

L'homologie de Khovanov [5, 6] associe un groupe d'homologie bigradué $Kh(L)_{*,*}$ à tout entrelacs L de \mathbb{R}^3 . La première graduation, notée p par la suite, est un degré homologique classique; l'autre, q , provient d'une filtration spécifique. Cette théorie possède plusieurs propriétés remarquables :

1. sa caractéristique d'Euler filtrée donne, après normalisation, le polynôme de Jones [5] (on parle de *catégorification* du polynôme de Jones) ;
2. c'est une *TQFT* de dimension $1 + 1$ [4, 7] : en particulier, tout cobordisme S entre des entrelacs L_1 et L_2 induit un morphisme $\mathcal{A}(S) : Kh(L_1) \rightarrow Kh(L_2)$;
3. elle détecte le genre slice des nœuds toriques (Rasmussen [19]) et donne ainsi une preuve combinatoire du théorème de Kronheimer et Mrowka [10] (conjecture de Milnor) ;
4. elle fournit une borne supérieure pour l'invariant de Thurston-Bennequin d'un nœud legendrien dans l'espace de contact standard, qui est optimale pour tous les nœuds à moins de 10 croisements (sauf deux!) (Ng [14]) ;
5. elle détecte le nœud trivial (Kronheimer et Mrowka [11]).

Pour autant, la définition combinatoire de l'homologie de Khovanov rend son champ d'application potentiel difficile à évaluer. C'est pourquoi il est intéressant d'en construire des versions géométriques. Dans [17], Ozsváth et Szabó relie l'homologie de Khovanov d'un entrelacs $L \subset S^3$ à l'homologie de Heegaard-Floer d'un revêtement double de la sphère S^3 ramifié au-dessus du miroir de L . En 2005, Seidel et Smith [24] définissent une *homologie de Khovanov symplectique*. Elle est isomorphe à l'homologie de Khovanov par des travaux récents d'Abouzaid et Smith [1] prolongeant ceux de Rezagadegan [20, 21]. L'objectif de cet exposé est de décrire ces liens.

Ces deux approches géométriques de l'homologie de Khovanov ne sont pas les seules. On peut citer également le travail de Cautis et Kamnitzer [2], motivé par la symétrie miroir homologique et qui décrit l'homologie de Khovanov en terme de catégorie dérivée des faisceaux cohérents, ainsi qu'une approche de Witten [29, 30] par la théorie de jauge.

J'adresse un grand merci à Mohammed Abouzaid, Baptiste Chantraine, Paolo Ghigini, Ko Honda, Reza Rezazadegan et Ivan Smith dont les explications ont été très précieuses.

2. HOMOLOGIE DE KHOVANOV

La propriété fonctorielle (2) permet de réduire l'homologie de Khovanov à sa valeur sur le nœud trivial et à ses propriétés de transformation par cobordismes élémentaires. Pour l'homologie de Khovanov, le groupe (espace vectoriel) associé au nœud trivial est $V = H^*(S^2, \mathbb{Z}/2)^{(1)}$. Des choix différents sont possibles. C'est ainsi que Khovanov et Rozansky [8, 9] fournissent une famille d'homologies indexée par les entiers $n \geq 1$ qui « catégorifient » les polynômes de Jones colorés. Le cas $n = 0$, qui catégorifierait le polynôme d'Alexander, s'obtient par d'autres méthodes qui conduisent à l'homologie de Heegaard-Floer des entrelacs.

2.1. La définition de Khovanov

Soient L un entrelacs de \mathbb{R}^3 et D un diagramme de L obtenu par projection générique sur un plan. La courbe D est immergée et à points doubles transverses et distincts. On numérote les points doubles de 1 à k . Chaque point double peut se résoudre de deux manières : la 0- et la 1-résolution, comme indiqué sur la figure 1.

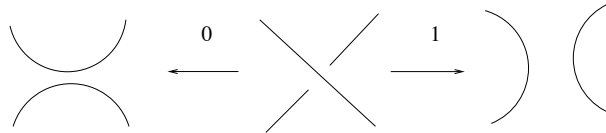


FIGURE 1. Les 0- et 1-résolutions d'un croisement

Étant donné un sommet $I = (i_1, \dots, i_k) \in \{0, 1\}^k$ du cube $[0, 1]^k$, on note D_I la collection de cercles, résolution complète de D , obtenue en prenant, pour tout $1 \leq j \leq k$, la i_j -résolution du j -ième croisement de D . On note également n_I le nombre de cercles de D_I et $\mathcal{A}(D_I) = V^{\otimes n_I}$.

On considère le complexe

$$CKh(L) = \bigoplus_{I \in \{0,1\}^k} \mathcal{A}(D_I).$$

Les éléments x de $\mathcal{A}(D_I)$ ont tous le même *degré cohomologique* qui vaut

$$gr(x) := |I| - n_-,$$

1. On prend ici des coefficients dans \mathbb{Z}_2 . L'homologie peut également se définir à coefficients dans \mathbb{Z} et ses propriétés fonctorielles sont alors établies à coefficients dans \mathbb{Q} . Le théorème d'Abouzaid-Smith est annoncé uniquement pour les coefficients rationnels.

où $|I|$ est le nombre de coordonnées de I égales à 1 et n_- le nombre de croisements négatifs de D . (Respectivement, on note n_+ le nombre de croisements positifs de D .) Pour aller plus loin, on décompose $V = H^*(S^2, \mathbb{Z}_2)$ en $\mathbb{Z}_2 v_- \oplus \mathbb{Z}_2 v_+$, où $v_- \in H^0(S^2, \mathbb{Z}/2)$ et $v_+ \in H^2(S^2, \mathbb{Z}_2)$. Dans certains textes, v_+ est noté 1 et v_- noté x . On définit le degré p par

$$p(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n_I}) = p(v_1) + \cdots + p(v_{n_I})$$

avec $p(v_{\pm}) = \pm 1$.

Le *degré filtré* q (auss appelé *degré quantique*) est donné par :

$$q(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n_I}) := p(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n_I}) + gr(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n_I}) + n_+ - n_-.$$

Chaque arête e du cube $[0, 1]^k$ entre deux sommets I et I' correspond au passage d'une 0- à une 1-résolution sur un des croisements et donc à un cobordisme élémentaire \mathcal{S}_e de type selle qui voit (i) deux cercles de D_I se rejoindre pour n'en former qu'un dans $D_{I'}$, ou (ii) un cercle de D_I se séparer en deux cercles de $D_{I'}$. Ici, les arêtes sont orientées et ont pour origine le sommet $I = e(0)$ qui correspond à la 0-résolution. À chaque opération, on associe un morphisme élémentaire $\mathcal{A}(\mathcal{S}_e) : \mathcal{A}(D_I) \rightarrow \mathcal{A}(D_{I'})$, multiplication $m : \mathcal{A}(D_I) \rightarrow \mathcal{A}(D_{I'})$ dans le cas (i) et comultiplication $\Delta : \mathcal{A}(D_I) \rightarrow \mathcal{A}(D_{I'})$ dans le cas (ii).

Précisément, la multiplication $m : V^{\otimes 2} \rightarrow V$ est donnée par les formules :

$$m(v_+ \otimes v_+) = v_+, \quad m(v_+ \otimes v_-) = m(v_- \otimes v_+) = v_- \quad \text{et} \quad m(v_- \otimes v_-) = 0.$$

Les facteurs $V^{\otimes 2}$ à la source ont pour indices dans $V^{\otimes n_I}$ ceux des cercles de D_I qui se rejoignent et le facteur V au but a pour indice celui du cercle créé dans $D_{I'}$. Similairement, on définit la comultiplication $\Delta : V \rightarrow V^{\otimes 2}$ par :

$$\Delta(v_+) = v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+ \quad \text{et} \quad \Delta(v_-) = v_- \otimes v_-.$$

Alternativement, on peut voir $\mathcal{A}(D_I)$ comme l'algèbre extérieure $\Lambda(H_1(D_I, \mathbb{Z}_2))$, où on identifie le générateur de la k -ième composante de D_I dans $H_1(D_I)$ avec le facteur v_- pour cette composante (le facteur v_+ étant identifié avec $1 \in \mathbb{Z}_2$). Dans ce cas, les opérations m et Δ sont les applications $\Lambda(H_1(D_I)) \rightarrow \Lambda(H_1(D_{I'}))$ induites par (i) passage au quotient par $[\Gamma_{i_0}] = [\Gamma_{i_1}] = [\Gamma'_{i_2}]$ si les composantes $[\Gamma_{i_0}]$ et $[\Gamma_{i_1}]$ de D_I se rejoignent pour former la composante $[\Gamma'_{i_2}]$ de $D_{I'}$ et (ii) l'application $[\Gamma_{i_0}] \mapsto [\Gamma'_{i_1}] \wedge [\Gamma'_{i_2}]$ si $[\Gamma_{i_0}]$ se sépare en $[\Gamma'_{i_1}]$ et $[\Gamma'_{i_2}]$.

Si I est un sommet du cube, on note \mathcal{E}_I l'ensemble des arêtes e telles que $e(0) = I$. Pour $x \in D_I$, la différentielle d est donnée par la formule :

$$d(x) = \sum_{e \in \mathcal{E}_I} \mathcal{A}(\mathcal{S}_e)(x).$$

L'application d décroît le degré homologique p d'une unité et préserve le degré filtré q . En particulier, le complexe $(CKh(L), d)$ se décompose en somme directe de sous-complexes de q -degrés constants.

THÉORÈME 2.1 ([5]). — *L'application d est une différentielle ($d^2 = 0$). Si L et L' sont deux entrelacs isotopes, il existe un quasi-isomorphisme $\varphi : (CKh(L), d) \rightarrow (CKh(L'), d)$ de complexes de chaînes bigradués.*

La démonstration du théorème 2.1 s'appuie sur une description explicite des quasi-isomorphismes associés à chaque mouvement de Reidemeister. Pour compléter la description des cobordismes élémentaires entre entrelacs, manquent l'ajout et la disparition d'une composante de D_I , correspondant à l'attachement d'anses d'indices 0 et 2. Pour cela, on dispose d'une application d'inclusion (unité) $\iota : \mathbb{Z}_2 \rightarrow V$, définie par

$$\iota(1) = v_+$$

et d'une application trace (ou counité) $\epsilon : V \rightarrow \mathbb{Z}_2$ donnée par :

$$\epsilon(v_-) = 1 \text{ et } \epsilon(v_+) = 0.$$

Là encore, ces applications correspondent aux morphismes $\Lambda(H_1(D_I)) \rightarrow \Lambda(H_1(D_{I'}))$ donnés par $\theta \mapsto [\Gamma_{i_0}] \wedge \theta$ et $[\Gamma_{i_0}] \mapsto 1$.

Étant donné un cobordisme $S \subset \mathbb{R}^3 \times [0, 1]$ entre $L_0 \subset \mathbb{R}^3 \times \{0\}$ et $L_1 \subset \mathbb{R}^3 \times \{1\}$, on peut le décomposer, après isotopie, en une concaténation de cobordismes élémentaires constitués d'ajouts d'anses d'indices 0, 1 ou 2 et d'isotopies d'entrelacs (elles-mêmes décomposées en mouvement de Reidemeister). On peut également supposer que les ajouts d'anses d'indices 0 et 2 créent et éliminent des composantes d'entrelacs qui, dans le diagramme, donnent des cercles isolés. De même, les ajouts d'anses d'indice 1 correspondent dans le diagramme à l'ajout/élimination d'un croisement isolé. Les applications m, Δ, ι et ϵ donnent ainsi des morphismes de chaînes entre les complexes des entrelacs contenus dans les tranches $\mathbb{R}^3 \times \{t\}$ juste avant et juste après chirurgie.

Manquent encore les morphismes de chaînes induits par les parties cylindriques du cobordisme, qui correspondent à l'isotopie d'un entrelacs. Ceux-ci sont les morphismes φ du théorème 2.1.

Finalement, le morphisme $\mathcal{A}(S) : CKh(L_0) \rightarrow CKh(L_1)$ est la composition des morphismes élémentaires correspondant à la décomposition de S .

THÉORÈME 2.2 ([5]). — *L'application induite en homologie $\mathcal{A}(S) : Kh(L_0) \rightarrow Kh(L_1)$ ne dépend pas de S à isotopie près.*

2.2. L'homologie de Khovanov réduite

On choisit un point p sur la partie régulière de D et on considère le complexe de chaînes quotient

$$(\widetilde{Kh}(L) = \bigoplus_{I \in \{0,1\}^k} \widetilde{\mathcal{A}}(D_I), d)$$

où $\widetilde{\mathcal{A}}(D_I) = \mathcal{A}(D_I) / \sim$ et \sim est la relation $v_- = 0$ dans la composante de D_I qui contient p . L'homologie de Khovanov réduite $\widetilde{Kh}(L)$ est l'homologie de ce complexe. Elle ne dépend pas de la position du point p si on prend, comme c'est le cas ici, des coefficients dans \mathbb{Z}_2 .

Cette fois, la caractéristique d’Euler filtrée est le polynôme de Jones normalisé.

3. DE L’HOMOLOGIE DE KHOVANOV À L’HOMOLOGIE DE HEEGAARD-FLOER

Soit L un entrelacs dans S^3 . On note $\Sigma(L)$ le revêtement double de S^3 ramifié le long de L et \bar{L} le miroir de L . Dans cette section on décrit une suite spectrale, découverte par Ozsváth et Szabó dans [17], dont le terme E^2 est l’homologie de Khovanov réduite de \bar{L} et qui converge vers l’homologie de Heegaard-Floer $\widehat{HF}(\Sigma(L))$ de $\Sigma(L)$.

3.1. Homologie de Heegaard-Floer

Cet invariant des variétés de dimension trois a été mis au jour par Ozsváth et Szabó [15, 16]. Toute variété close et orientée de dimension trois V est décrite par un *diagramme de Heegaard* (Σ, α, β) où :

- Σ est une surface close et orientable de genre g ;
- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_g)$ et $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_g)$ sont deux familles de g courbes deux à deux disjointes, qui chacune engendrent $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ et qui s’intersectent transversalement.

Concrètement, la surface $\Sigma \subset V$ décompose V en deux corps en anses dont les multicourbes α et β indiquent une famille maximale de cercles de compression disjointes.

On considère la g -ième puissance symétrique $\text{Sym}^g(\Sigma) = \Sigma^{\times g}/\mathcal{S}_g$ de Σ (\mathcal{S}_g agit par permutation des coordonnées). Si ω est une forme d’aire pour Σ , la forme symplectique $\Omega_g = \bigoplus_g \omega$ de $\Sigma^{\times g}$ donne une forme singulière sur $\text{Sym}^g(\Sigma)$. Elle se désingularise [18] par une perturbation supportée dans un voisinage de la diagonale pour fournir une forme symplectique Ω sur $\text{Sym}^g(\Sigma)$ avec laquelle les deux tores (qui évitent la diagonale !)

$$\mathbb{T}_\alpha = \alpha_1 \times \dots \times \alpha_g \text{ et } \mathbb{T}_\beta = \beta_1 \times \dots \times \beta_g$$

sont lagrangiens.

Pour $z \in \Sigma - \alpha - \beta$, on considère le diviseur $\{z\} \times \text{Sym}^{g-1}(\Sigma) \subset \text{Sym}^g(\Sigma)$. L’homologie de Heegaard-Floer de V est l’homologie de Floer lagrangienne de la paire $(\mathbb{T}_\alpha, \mathbb{T}_\beta)$ dans $\text{Sym}^g(\Sigma - \{z\})$. En particulier, son complexe de chaînes est le \mathbb{Z}_2 -espace vectoriel formellement engendré par les points d’intersection de \mathbb{T}_α et \mathbb{T}_β

$$\widehat{CF}(\Sigma, \alpha, \beta, z) = \bigoplus_{\mathbf{y} \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta} \mathbb{Z}_2 \mathbf{y}.$$

Un élément $\mathbf{y} \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$ s’écrit $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_g)$ avec $y_i \in \alpha_i \cap \beta_{\sigma(i)}$ pour une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_g$. La différentielle d s’obtient en fixant une structure presque complexe J dans $\text{Sym}^g(\Sigma)$, compatible avec Ω et en comptant les bandes holomorphes rigides dans $(\text{Sym}^g(\Sigma - \{z\}), J)$, à bord dans $\mathbb{T}_\alpha \cup \mathbb{T}_\beta$ et joignant des points \mathbf{y} et \mathbf{y}' de $\mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$.

THÉORÈME 3.1 (Ozsváth-Szabó [15]). — *L’application d est une différentielle et l’homologie $\widehat{HF}(V)$ du complexe $(\widehat{CF}(\Sigma, \alpha, \beta, z), d)$ ne dépend pas des choix auxiliaires de $(\Sigma, \alpha, \beta, z)$, ω et J , mais uniquement de V .*

Remarque 3.2. — Cette description cache une subtilité : les courbes α et β doivent vérifier une condition d'*admissibilité* [15] qui force certaines intersections.

3.2. Générateurs et cobordismes élémentaires

On rapproche les homologies de Heegaard-Floer des variétés $\sharp^g S^1 \times S^2$ munies d'opérations de cobordismes élémentaires du complexe de chaînes de Khovanov.

3.2.1. *Homologie de Heegaard-Floer de $\sharp^g S^1 \times S^2$.* — Si $\Gamma_1, \dots, \Gamma_g$ est une collection de classes qui engendrent $H_1(\sharp^g S^1 \times S^2, \mathbb{Z})$, on peut prendre un diagramme (Σ, α, β) où α_i est isotope à β_i , Σ est de genre g et où la famille $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ intersecte transversalement des représentants plongés $\gamma_1, \dots, \gamma_g \subset \Sigma$ de $\Gamma_1, \dots, \Gamma_g$ et vérifie : $\sharp(\alpha_i \cap \Gamma_j) = \delta_{ij}$. La condition d'admissibilité (cf. remarque 3.2) force alors l'intersection de α_i avec β_i , par exemple en deux points θ_i^+ et θ_i^- si on prend pour β_i un petit déplacement hamiltonien de α_i . Ici, θ_i^+ est le point de plus haut degré comme indiqué sur la figure 2. Pour un choix de z convenable (en dehors du support des petits déplacements hamiltoniens $N(\alpha)$), on vérifie alors aisément que la différentielle est nulle et donc que

$$\widehat{HF}(\sharp^g S^1 \times S^2) \simeq H^*(S^1)^{\otimes g} \simeq \Lambda H_1(\sharp^g S^1 \times S^2),$$

où on identifie v_- avec $\Gamma_i \in H_1(\sharp^g S^1 \times S^2)$.

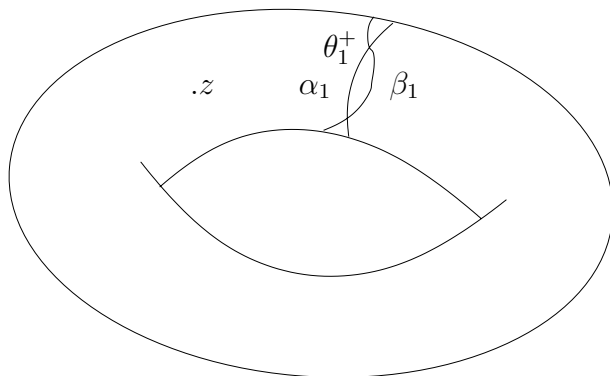


FIGURE 2. Un diagramme de Heegaard pour $S^1 \times S^2$

Cette discussion est résumée dans l'énoncé suivant :

LEMME 3.3. — Si $\Gamma_1, \dots, \Gamma_g$ est une collection de courbes dont les classes d'homologie engendrent $H_1(\sharp^g S^1 \times S^2, \mathbb{Z})$, alors

$$\widehat{HF}(\sharp^g S^1 \times S^2) \simeq H^*(S^1)^{\otimes g} \simeq \Lambda H_1(\sharp^g S^1 \times S^2),$$

où on identifie θ_i^\pm avec v_\mp et θ_i^+ avec $\Gamma_i \in H_1(\sharp^g S^1 \times S^2)$.

Remarque 3.4. — L'inversion des signes entre θ_i^\pm et v_\mp provient des notations cohomologiques associées à Kh , en dualité avec les notations d'usage en homologie de Heegaard-Floer.

3.2.2. Opérations d'ordre supérieur et cobordismes. — Plus généralement, si η^0, \dots, η^k sont des g -uplets de courbes dans Σ de sorte que, pour tout $i \neq j$, $(\Sigma, \eta^i, \eta^j, z)$ soit un diagramme de Heegaard pointé, on peut définir un morphisme de complexes de chaînes

$$f_{\eta^0, \dots, \eta^k} : \bigotimes_{i=1}^k \widehat{CF}(\Sigma, \eta^{i-1}, \eta^i, z) \rightarrow \widehat{CF}(\Sigma, \eta^0, \eta^k)$$

dont le coefficient $\langle f_{\eta^0, \dots, \eta^k}(\mathbf{y}^1 \otimes \dots \otimes \mathbf{y}^k), \mathbf{y}' \rangle$ est le nombre (mod 2) de polygones holomorphes rigides à $(k + 1)$ sommets dans $(\text{Sym}^g(\Sigma) - \{z\} \times \text{Sym}^{g-1}(\Sigma), J)$, dont les côtés s'envoient successivement (dans l'ordre horaire) dans les tores \mathbb{T}_{η^i} et les sommets sur les points \mathbf{y}^i , $1 \leq i \leq k$, puis \mathbf{y}' .

Dans le cas de la variété $\#^g S^1 \times S^2$, on prend $\eta^0 = \alpha$, $\eta^1 = \beta$ et η^2 la famille de courbes qui vaut :

- un déplacement hamiltonien η_i^2 de β_i si $1 \leq i \leq g - 1$;
- $\eta_g^2 = \gamma_g$.

On note θ_g le point de $\gamma_g \cap \beta_g$ et $\Theta = (\theta_1^+, \dots, \theta_{g-1}^+, \theta_g) \in \widehat{CF}(\Sigma, \eta^1, \eta^2, z)$. L'opération

$$(\Sigma, \eta^0, \eta^1, z) \rightarrow (\Sigma, \eta^0, \eta^2, z)$$

décrit le cobordisme entre $\#^g S^1 \times S^2$ et $\#^{g-1} S^1 \times S^2$ obtenu par chirurgie d'indice 0 sur γ_g . L'application induite

$$\widehat{CF}(\Sigma, \eta^0, \eta^1, z) \rightarrow \widehat{CF}(\Sigma, \eta^0, \eta^2, z)$$

$$\xi \mapsto f_{\eta^0, \eta^1, \eta^2}(\xi \otimes \Theta)$$

compte les triangles holomorphes entre η^0 , η^1 et η^2 . On vérifie sur le diagramme qu'il y a un seul tel triangle avec la bonne orientation (cf. figure 3), et donc que l'application est donnée par le passage au quotient $\Lambda H_1(\#^g S^1 \times S^2) \rightarrow \Lambda H_1(\#^{g-1} S^1 \times S^2) \simeq \Lambda(H_1(\#^g S^1 \times S^2) / [\gamma_g])$.

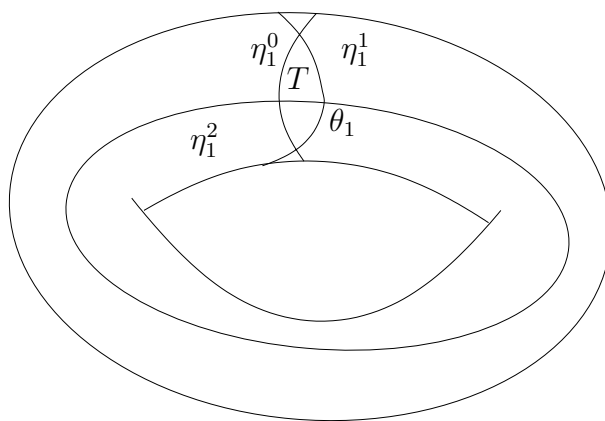


FIGURE 3. Triangle T entre η_1^0 , η_1^1 et η_1^2 lorsque $g = 1$

De façon plus intrinsèque, si γ est contenue dans un facteur $S^1 \times S^2$ où elle est homologue à $[S^1 \times \{pt\}]$, alors le cobordisme donné par chirurgie d'indice 0 le long de γ

induit un morphisme $\Lambda H_1(\sharp^g S^1 \times S^2) \rightarrow \Lambda H_1(\sharp^{g-1} S^1 \times S^2) \simeq \Lambda(H_1(\sharp^g S^1 \times S^2)/[\gamma])$ qui est le passage au quotient par $[\gamma]$.

Réciproquement, le passage de $\sharp^{g-1} S^1 \times S^2$ à $\sharp^g S^1 \times S^2$ par chirurgie d'indice 0 sur un nœud trivial dans $\sharp^{g-1} S^1 \times S^2$ induit l'application $\xi \mapsto f_{\eta^2, \eta^0, \eta^1}(\xi \otimes \Theta')$ qui correspond à l'injection $\Lambda H_1(\sharp^{g-1} S^1 \times S^2) \hookrightarrow \Lambda(H_1(\sharp^g S^1 \times S^2))$.

3.3. Mise en place des acteurs

Soient L un entrelacs de S^3 et D un diagramme de L avec k croisements. Chaque croisement i de D détermine une corde c_i qui s'appuie sur L et s'envoie sur i par la projection de L sur D . Pour $I = (i_1, \dots, i_k) \in \{0, 1\}^k$, la résolution complète D_I est une union de n_I cercles, que l'on voit à présent dans S^3 plutôt que dans un plan. Un premier élément clé est que $\Sigma(D_I) \simeq \sharp^{n_I} S^1 \times S^2$.

Le deuxième élément d'importance est le suivant :

PROPOSITION 3.5. — *Le revêtement ramifié $\Sigma(D_I)$ est obtenu par (i_1, \dots, i_k) -chirurgie sur l'entrelacs L' à k composantes de $\Sigma(L)$ obtenu en prenant la préimage des arcs c_i dans $\Sigma(L)$.*

Démonstration. — On se donne une collection B_1, \dots, B_k de k boules disjointes dans S^3 qui intersectent toutes l'entrelacs L en deux arcs non noués et en dehors desquelles tous les cercles D_I coïncident pour tout I . Autrement dit, toutes les opérations de résolution sont à support dans ces boules. On suppose de plus que la résolution du i -ième croisement a lieu dans B_i et que $c_i \subset B_i$. Pour un tel choix, les revêtements ramifiés $\Sigma(L)$ et $\Sigma(D_I)$ coïncident en dehors des préimages des boules (puisque D_I et L sont égaux). Reste à effectuer deux observations :

1) Le revêtement de degré 2 d'une boule B , ramifié le long de deux arcs a et a' non noués, est un tore solide T . On l'obtient en faisant pivoter un tore solide de 180 degrés autour d'un axe qui le rencontre le long de deux arcs. Si C est un demi-disque dans $B - a'$ dont le bord est $\partial C = a \cup b$, où $b \subset \partial B$, alors le rappel de b par la projection est un méridien m de T . Si c est un arc non noué dans B s'appuyant sur a et a' , alors le rappel de c est une âme de T .

2) Lorsqu'on effectue les 0- et 1-résolutions de (a, a') pour obtenir des paires d'arcs (a_0, a'_0) et (a_1, a'_1) , on obtient des courbes méridiennes m, m_0 et m_1 pour les tores T, T_0 et T_1 qui s'intersectent deux à deux en un point.

Pour $i \in \{0, 1\}$ et un bon choix de longitude l pour T , le tore T_i est obtenu par i -chirurgie sur l'âme du tore T . Cette âme est le rappel de l'arc c . L'entrelacs L' est ainsi la collection des rappels des arcs c_i dans $\Sigma(L)$. Il vient avec un choix de longitude privilégié l_i . \square

3.4. Construction de diagrammes de Heegaard privilégiés

On note $Y = \Sigma(L)$ et, pour $J = (j_1, \dots, j_k) \in \{0, 1, \infty\}^k$, on note $Y(J)$ la variété obtenue à partir de Y par chirurgie d'indice j_i sur la i -ième composante de L' , contenue dans B_i . (Une chirurgie d'indice ∞ est sans effet.)

PROPOSITION 3.6. — *Il existe un quadruplet de Heegaard pointé $(\Sigma, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ de genre $g > k$ pour lequel :*

- les courbes $\gamma_{k+1}, \dots, \gamma_g$ et $\delta_{k+1}, \dots, \delta_g$ sont des déplacements hamiltoniens de $\beta_{k+1}, \dots, \beta_g$,
- si $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $\sharp(\beta_i \cap \gamma_j) = \sharp(\beta_i \cap \delta_j) = \sharp(\gamma_i \cap \delta_j) = \delta_{ij}$,
- si $J = (j_1, \dots, j_k) \in \{0, 1, \infty\}^k$, la variété $Y(J)$ a pour diagramme de Heegaard pointé (Σ, α, η^J) , où η_i^J est un petit déplacement hamiltonien de β_i si $i > k$ ou $j_i = \infty$, un petit déplacement hamiltonien de γ_i si $j_i = 0$ et un petit déplacement hamiltonien de δ_i si $j_i = 1$.

Démonstration. — On relie chaque composante L_i de l'entrelacs à un point p de Y par un arc a_i . On considère un voisinage tubulaire N de $L \cup (\cup_i a_i)$ sur lequel on se donne une fonction de Morse f avec exactement un point critique d'indice 3 et un point critique d'indice 2 pour chaque composante de L . Les variétés instables des points critiques d'indice 2 intersectent ∂N en des méridiens pour les composantes de L .

On étend alors f en une fonction de Morse $F : Y \rightarrow \mathbb{R}$ ordonnée, sans ajouter de point critique d'indice 3. Si c est une valeur régulière de F qui sépare les points d'indices ≤ 1 et ≥ 2 , alors $\Sigma = f^{-1}(c)$ est une surface de scindement pour Y . L'intersection des variétés stables des points critiques d'indice 1 avec Σ donne le système de courbes α , tandis que l'intersection des variétés instables des points critiques d'indice 2 donne les courbes β . On obtient les courbes $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ en poussant les longitudes de L par le gradient de F dans Σ . Les courbes $\delta_1, \dots, \delta_k$ sont données par $\beta_i + \gamma_i$, $1 \leq i \leq k$. Toutes les autres courbes sont obtenues par des déplacements hamiltoniens comme dans l'énoncé de la proposition. \square

3.5. Définition du complexe filtré

On munit $\{0, 1, \infty\}^k$ de l'ordre lexicographique et on dit que J' est un successeur immédiat de J si toutes les coordonnées de J et J' sont égales, à l'exception d'une où on trouve 0 pour J et 1 pour J' ou 1 pour J et ∞ pour J' .

On rappelle que par construction (cf. proposition 3.6) si J' est un successeur immédiat de J , alors les courbes η^J et $\eta^{J'}$ s'intersectent en exactement $2^g - 1$ points : deux points dans chaque $\eta_i^J \cap \eta_i^{J'}$ lorsque $j_i = j'_i$ et un point dans $\eta_{i_0}^J \cap \eta_{i_0}^{J'}$ pour la coordonnée i_0 où J et J' diffèrent. Lorsqu'il y a deux points d'intersection dans $\eta_i^J \cap \eta_i^{J'}$, on discrimine le point d'intersection positive que l'on note $\theta_i^{J, J', +}$. On note également $\theta_{i_0}^{J, J', +}$ le point de $\eta_{i_0}^J \cap \eta_{i_0}^{J'}$. On obtient ainsi un élément privilégié $\Theta^{J, J'}$ dans $\widehat{CF}(\Sigma, \eta^J, \eta^{J'}, z)$, de coordonnées $(\theta_1^{J, J', +}, \dots, \theta_g^{J, J', +})$.

Si $J^0 < \dots < J^l$ est une suite de successeurs immédiats, on note :

$$D_{J^0 < \dots < J^l} : \widehat{CF}(Y(J^0)) \rightarrow \widehat{CF}(Y(J^l))$$

$$\zeta \mapsto f_{\alpha, \eta^{J^0}, \dots, \eta^{J^l}}(\zeta \otimes \Theta^{J^0, J^1} \otimes \dots \otimes \Theta^{J^{l-1}, J^l}).$$

Par définition, lorsque $J^0 = J^l$, on prend pour $D_{J^0 < \dots < J^l}$ la différentielle de Heegaard-Floer d .

On considère l'espace vectoriel $X(\{0, 1\}^k) = \bigoplus_{I \in \{0, 1\}^k} \widehat{CF}(Y(I))$ muni du morphisme $D : X(\{0, 1\}^k) \rightarrow X(\{0, 1\}^k)$ défini par

$$D = \sum_{J=J^0 < \dots < J^l} D_{J^0 < \dots < J^l}.$$

PROPOSITION 3.7. — *L'application D est une différentielle qui préserve la filtration donnée par l'ordre lexicographique.*

THÉORÈME 3.8. — *La suite spectrale induite par l'ordre lexicographique sur le complexe $(X(\{0, 1\}^k), D)$ a pour deuxième page $\widetilde{Kh}(\overline{L})$ et converge vers $\widehat{HF}(\Sigma(L))$.*

Remarque 3.9. — L'apparition du miroir \overline{L} de L vient du fait que Kh garde certains aspects d'une cohomologie, alors que \widehat{HF} est une homologie (cf. remarque 3.4).

On explique la preuve du théorème 3.8 dans les deux sections qui suivent.

3.6. Identification de la deuxième page

LEMME 3.10. — *La première page de la suite spectrale est $E^1 = \bigoplus_{I \in \{0, 1\}^k} \widehat{HF}(\Sigma(D_I)) = \bigoplus_{I \in \{0, 1\}^k} \Lambda H_1(\#^{n_I-1} S^1 \times S^2) \simeq \bigoplus_{I \in \{0, 1\}^k} \widetilde{\mathcal{A}}(D_I)$ pour un isomorphisme qui identifie la différentielle D_1 à d .*

Démonstration. — Pour $I \in \{0, 1\}^k$, on se donne une collection d'arcs a_2, \dots, a_{n_I} deux à deux disjoints dans le plan qui contient $D(I)$ où a_i joint la première et la i -ième composante de $D(I)$. Le rappel de a_2, \dots, a_{n_I} donne une famille de courbes $\Gamma_2, \dots, \Gamma_{n_I}$ qui engendre $H_1(\Sigma(D_I), \mathbb{Z})$. La différentielle D^0 préserve $\widehat{CF}(Y(I))$ et est égale à la différentielle du complexe de Heegaard-Floer.

La première page de la suite spectrale est donc

$$E^1 = \bigoplus_{I \in \{0, 1\}^k} \widehat{HF}(\Sigma(D_I)) \simeq \bigoplus_{I \in \{0, 1\}^k} V^{\otimes n_I}.$$

On observe que si I' est un successeur immédiat de I et si $D_{I'}$ regroupe les composantes i_0 et i_1 de D_I , alors l'application de cobordisme $D_{I < I'}$ est donnée par l'application de passage au quotient $\Lambda H_1(\Sigma(D_I)) \rightarrow \Lambda H_1(\Sigma(D_{I'}) / ([\Gamma_{i_0}] = [\Gamma_{i_1}]))$, comme indiqué dans la sous-section 3.2.2. On obtient ainsi que $D_{I < I'}$ est égale à m via l'identification $\Gamma_i = v_-$. La même identification vaut entre Δ et $D_{I < I'}$ pour la création d'une composante. \square

COROLLAIRE 3.11. — *La deuxième page E^2 est $\widetilde{Kh}(\overline{L})$.*

3.7. Convergence vers $\widehat{HF}(\Sigma(L))$

Il faut montrer que l'homologie de $(X(\{0, 1\}^k), D)$ est $\widehat{HF}(\Sigma(L))$. Pour cela, on observe que $\widehat{HF}(\Sigma(L))$ est l'homologie du complexe $(X(\{\infty\}^k), D)$. On montre par induction sur i que les homologies des complexes $(X(\{0, 1\}^{k-i} \times \{\infty\}^i), D)$ sont toutes les mêmes.

Le point clé est :

LEMME 3.12. — *Le complexe $(X(\{0, 1\}^{k-1} \times \{0, 1, \infty\}), D)$ est acyclique.*

Démonstration. — On explique le cas où $k = 1$, c'est-à-dire où $\Sigma(D_0)$ et $\Sigma(D_1)$ sont obtenues par chirurgies d'indices 0 et 1 sur un nœud de $\Sigma(D_\infty)$. On note $\beta^{(1)}$ un petit déplacement hamiltonien de β et $\theta_1 : (X(0), D_0) \rightarrow (X(0), D_0)$ le morphisme de continuation $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}'$ donné par équivalence des diagrammes de Heegaard. On a alors

$$\theta_1 = f_{\alpha, \beta, \gamma} \circ f_{\alpha, \gamma, \delta, \beta^{(1)}} + f_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} \circ f_{\alpha, \gamma, \beta^{(1)}} + D_0 \circ f_{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \beta^{(1)}} + f_{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \beta^{(1)}} \circ D_0.$$

Cette identité est obtenue en regardant le bord de l'espace des pentagones et grâce à l'observation que

$$f_{\beta, \gamma, \delta, \beta^{(1)}}(\Theta_{\beta, \gamma} \otimes \Theta_{\gamma, \delta} \otimes \Theta_{\delta, \beta^{(1)}}) = \Theta_{\beta, \beta^{(1)}}.$$

Autrement dit, θ_1 est homotope à $f_{\alpha, \beta, \gamma} \circ f_{\alpha, \gamma, \delta, \beta^{(1)}} + f_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} \circ f_{\alpha, \gamma, \beta^{(1)}}$ et donc $f_{\alpha, \beta, \gamma} \circ f_{\alpha, \gamma, \delta, \beta^{(1)}} + f_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} \circ f_{\alpha, \gamma, \beta^{(1)}}$ est un quasi-isomorphisme. Ceci reste valable pour toute permutation circulaire des rôles de β , γ et δ . \square

On considère pour finir la suite exacte courte de complexes :

$$0 \rightarrow (X(\{0, 1\}^k), D) \rightarrow (X(\{0, 1\}^{k-1} \times \{0, 1, \infty\}^i), D) \rightarrow (X(\{0, 1\}^{k-1} \times \{\infty\}), D) \rightarrow 0.$$

Le morphisme de connexion $H_*(X(\{0, 1\}^{k-1} \times \{\infty\}), D) \rightarrow H_*(X(\{0, 1\}^k), D)$ est alors un isomorphisme d'après le lemme 3.12. On conclut par induction sur k .

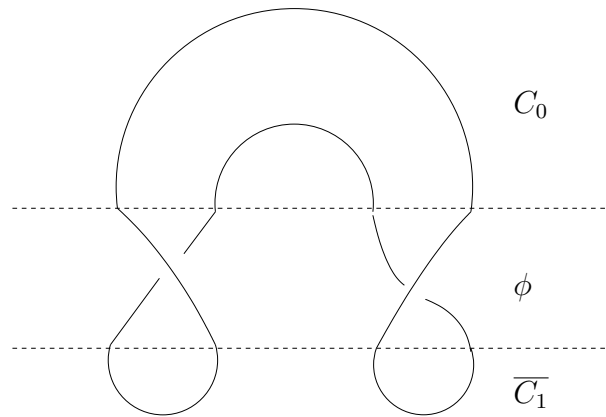
4. HOMOLOGIE DE KHOVANOV SYMPLECTIQUE

Cet invariant des entrelacs, soupçonné dès l'origine de calculer l'homologie de Khovanov, est une découverte de Seidel et Smith [24].

4.1. Résumé de la définition

Soit L un entrelacs de S^3 , obtenu comme la clôture d'une tresse à $2n$ brins ϕ par deux familles de n arcs plongées (*correspondances plongées* dans la suite) C_0 et $\overline{C_1}$ comme sur la figure 4.

Dans cette situation, on considère une fibration de Lefschetz symplectique au-dessus du plan $\pi : A_{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}$ avec $2n$ fibres singulières, dont la fibre régulière est le cylindre symplectique $(T^*S^1, dp \wedge dq)$. La monodromie de la fibration autour d'une fibre singulière est un twist de Dehn positif le long de la section nulle de T^*S^1 . La tresse ϕ induit un difféomorphisme Φ de la base \mathbb{C} qui permute les valeurs singulières de π . La transformation Φ se relève également en un difféomorphisme symplectique – toujours

FIGURE 4. Présentation de $L = C_0 \cup \phi \cup \overline{C_1}$

noté Φ – de A_{2n-1} . Après déformation éventuelle, tout arc $c \in \mathbb{C}$ joignant deux valeurs singulières de π se relève en une sphère lagrangienne de dimension deux dans A_{2n-1} , obtenue par transport parallèle le long de c des cycles évanescents. Ainsi, les familles C_0 et $\Phi(C_1)$ donnent naissance à deux familles de n sphères lagrangiennes disjointes dans A_{2n-1} . Par exemple, si la tresse est le générateur s_i qui permute les points i et $i + 1$, le difféomorphisme symplectique Φ de A_{2n-1} est le twist symplectique le long de la sphère lagrangienne située au-dessus d'un arc reliant en droite ligne i et $i + 1$. Vues dans l'espace de configuration Y_n de n points dans A_{2n-1} (schéma de Hilbert), ces familles sont deux lagrangiennes exactes L_{C_0} et $L_{\Phi(C_1)}$ difféomorphes à $(S^2)^n$. Le difféomorphisme symplectique Φ de A_{2n-1} induit un difféomorphisme symplectique, à nouveau noté Φ de Y_n , si bien qu'on peut écrire $L_{\Phi(C_1)} = \Phi(L_{C_1})$.

L'homologie de Khovanov symplectique $SKh(L)$ est l'homologie d'intersection lagrangienne $HF(L_{C_0}, L_{\Phi(C_1)}; \mathbb{Z}_2)$.

THÉORÈME 4.1 (Seidel-Smith [24]). — *L'homologie de Khovanov symplectique $SKh(L)$ est un invariant de L .*

Abouzaid et Smith annoncent le résultat suivant [1], conjecturé par Seidel-Smith :

THÉORÈME 4.2 (Abouzaid-Smith). — *L'homologie $SKh(L)$ est isomorphe à $Kh(L)$.*

4.2. Quelques précisions

4.2.1. *La fibration de Lefschetz A_{2n-1} .* — Dans le travail initial [24], la variété considérée est une tranche nilpotente de type (n, n) dans \mathfrak{sl}_{2n} . On suit ici une version proposée par Manolescu [12].

Soit $p \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n dont les racines sont simples. La variété A_{2n-1} est la fibre de Milnor

$$\{u^2 - v^2 = p(z)\} \subset \mathbb{C}^3.$$

La projection $\pi : A_{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}$ envoie (u, v, z) sur $\pi(u, v, z) = z$. Elle est singulière au voisinage des points $(0, 0, z)$ où z est une racine de p et près desquelles elle est

quadratique en coordonnées locales. La forme symplectique canonique de \mathbb{C}^3 induit une forme symplectique ω sur A_{2n-1} . Les fibres de π sont symplectiques et conjuguées à $(T^*S^1, dp \wedge dq)$. Le ω -orthogonal du plan tangent aux fibres donne, en dehors des $2n$ points singuliers de π , une connexion symplectique. On peut également penser à A_{2n-1} comme le plombage en chaîne de $2n - 1$ copies du fibré en boules cotangentes au-dessus de S^2 .

Soit $c \subset \mathbb{C}$ un arc plongé entre deux valeurs singulières de π et $x \in \text{int}(c)$. La collection des cycles évanescents près des extrémités de c donne deux germes de disques lagrangiens dans un voisinage des singularités de π . Leur restriction à la fibre au-dessus d'un point de $\text{int}(c)$ proche de ∂c est un cercle isotope à la section nulle de la fibre en ce point par une isotopie hamiltonienne. Le transport parallèle de ces cercles par la connexion symplectique le long de c jusqu'au point x fournit deux cercles dans la fibre $\pi^{-1}(x)$. Ils sont hamiltonniennement isotopes, et on peut corriger la connexion pour qu'ils coïncident. Leur réunion donne alors une sphère lagrangienne au-dessus de c .

Une collection d'arcs plongée $C = (c_1, \dots, c_n)$ détermine un n -uplet de sphères lagrangiennes disjointes $(S_{c_1}, \dots, S_{c_n})$ dans (A_{2n-1}, ω) .

4.2.2. *La variété symplectique Y_n .* — Le produit symétrique $\text{Sym}^n(A_{2n-1}) = (A_{2n-1})^n / \mathcal{S}_n$ est très singulier le long de sa diagonale. Il admet une résolution par un schéma de Hilbert $\text{Hilb}^n(A_{2n-1})$, qui est muni d'une forme symplectique Ω . La variété $Y_n \subset \text{Hilb}^n(A_{2n-1})$ est l'ouvert constitué des schémas dont la projection par π sur \mathbb{C} est un schéma de longueur exactement n . En restriction à Y_n , la forme symplectique Ω est exacte.

Une collection d'arcs plongée C entre les valeurs singulières de π dans \mathbb{C} détermine une sous-variété lagrangienne de $(A_{2n-1})^n$ qui évite la diagonale et donc induit une sous-variété lagrangienne, notée L_C , dans la partie lisse de $\text{Sym}^n(A_{2n-1})$ et donc dans (Y_n, Ω) . La variété symplectique (Y_n, Ω) est exacte et L_C est simplement connexe. En particulier, L_C est exacte. C'est le bon cadre pour définir l'homologie de Floer.

4.2.3. *Les graduations.* — La première classe de Chern $c_1(Y_n)$ est nulle et les lagrangiennes L_C simplement connexes, ce qui suffit pour que l'indice de Maslov donne une graduation relative sur \mathbb{Z} . Dans le cas d'espèce, Seidel [22] explique comment obtenir une graduation absolue. C'est le degré homologique p . Voici comment on procède, suivant pas à pas la description de Manolescu [12].

On note $\mathfrak{L} \rightarrow Y_n$ le fibré dont la fibre \mathfrak{L}_x est formée des sous-espaces lagrangiens de $T_x Y_n$. La condition $c_1(Y_n) = 0$ se traduit par l'existence d'une forme volume complexe Θ sur Y_n qui induit une application

$$\theta : \mathfrak{L} \rightarrow \mathbb{C}^* / \mathbb{R}^+ \simeq S^1$$

envoyant toute base orthonormée (e_1, \dots, e_{2n}) d'un plan lagrangien de \mathfrak{L}_x sur l'argument de $\Theta(x)(e_1 \wedge \dots \wedge e_{2n})^2$. Le rappel de l'application θ par le revêtement universel $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ donne un revêtement $\tilde{\mathfrak{L}} \rightarrow \mathfrak{L}$. Toute lagrangienne L_C fournit une section $s_{L_C} : L_C \rightarrow \mathfrak{L}$

où $s_{L_C}(x) = T_x L_C$. On obtient ainsi une application

$$\theta_{L_C} = \theta \circ s_{L_C} : L_C \rightarrow S^1.$$

La simple connexité de L_C permet de relever s_{L_C} en une section $\tilde{s}_{L_C} : L_C \rightarrow \tilde{\mathfrak{L}}$ et donc θ_{L_C} en $\tilde{\theta}_{L_C} = \theta \circ \tilde{s}_{L_C}$. Un tel choix de relèvement $\tilde{\theta}_{L_C}$ de θ_{L_C} est appelé une *graduation* de L_C .

Si on se donne des graduations pour deux lagrangiennes L_C et $L_{C'}$ ainsi qu'un point $x \in L_C \cap L_{C'}$, on définit l'indice de Maslov $\mu(x)$ de x de la façon suivante. On choisit un chemin dans $\tilde{\mathfrak{L}}_x$ de $\tilde{s}_{L_C}(x)$ à $\tilde{s}_{L_{C'}}(x)$. Sa projection dans \mathfrak{L}_x fournit un chemin λ_0 entre $s_{L_C}(x)$ et $s_{L_{C'}}(x)$. On considère par ailleurs le chemin λ_1 constamment égal à $T_x L_{C'}$. On pose alors

$$\mu(x) = \mu(\lambda_0, \lambda_1) + n,$$

où $\mu(\lambda_0, \lambda_1)$ est l'indice de Maslov des chemins (il faut en fait modifier un peu λ_0 pour rendre ses extrémités transverses à celles de λ_1). La définition ne dépend pas du choix de θ car $H^1(Y_n) = 0$ et toutes les sections Θ sont homotopes. On peut même choisir la graduation de $L_{C'}$ de façon consistante avec celle de L_C pour que l'indice de Maslov ne dépende plus du choix de la graduation de L_C , voir [12].

La seconde graduation est obtenue en compactifiant les fibres de A_{2n-1} . Sa découverte par Abouzaid et Smith [1], qui s'appuie sur le travail de Seidel et Solomon [25], constitue un point clé dans leur preuve du théorème 4.2. La définition nécessite l'usage de coefficients rationnels, que l'on utilise dans la suite.

On considère la compactification partielle $\overline{A}_{2n-1} = \{U^2 - V^2 = W^2 p(z) \mid [U, V, W] \in \mathbb{C}P^2, z \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}$ de A_{2n-1} . Autrement dit, on tronque les fibres T^*S^1 en dehors d'un voisinage de la section nulle qui supporte la monodromie, et on leur recolle deux disques D_+ et D_- de centres respectifs 0_{\pm} . Les fibres régulières de \overline{A}_{2n-1} sont des sphères symplectiques de dimension deux. Le diviseur $D = \{W = 0, U = \pm V\}$ est encore $\{0_{\pm}\} \times \mathbb{C}$. On a une compactification partielle associée \overline{Y}_n et un diviseur à l'infini $D_n = D_n^+ \cup D_n^-$.

On se donne une section s du fibré conormal à D_n et on définit un morphisme de chaînes $b^1 : CSKh(K) \rightarrow CSKh(K)$ en comptant les bandes holomorphes rigides avec un point marqué O dans \overline{Y}_n qui intersectent exactement une fois le diviseur D_n en O et telles que, en O , la condition de codimension un $s(du(\partial_x)) \in \mathbb{R}^+$ soit vérifiée.

THÉORÈME 4.3. — *Les valeurs propres de b^1 sont entières.*

Un élément non nul du sous-espace caractéristique $\ker(b^1 - jId)^k$, $k \geq 1$, se voit attribuer par Abouzaid et Smith le niveau de filtration j .

Exemple 4.4. — Un exemple fondamental est le noeud trivial U , présenté comme la clôture d'une tresse à deux brins par deux arcs C et \overline{C} . Le complexe de chaînes $CSKh(U)$ est engendré par les points d'intersection entre deux copies L_C et $L_{\overline{C}}$ de la section nulle dans $Y_1 = T^*S^2$. Si L_C est la section nulle et $L_{\overline{C}}$ est le graphe d'une fonction de Morse $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ avec deux points critiques, alors les points de $L_C \cap L_{\overline{C}}$ correspondent aux

points critiques : le maximum M et le minimum m de f . De façon plus adaptée à la situation et notamment à la compactification \overline{Y}_1 , on peut plutôt considérer deux arcs C et C' , correspondances plongées qui s'intersectent en trois points : leurs deux extrémités et un point intérieur. Ainsi, les deux sphères lagrangiennes L_C et $L_{C'}$ s'intersectent en quatre points. Deux sont au-dessus de $\partial C = \partial C'$, chacun d'indice 0 (qui représentent la classe d'homologie de m), et deux sont au-dessus du point $x \in \text{int}(C) \cap \text{int}(C')$, un d'indice 1, y_0 , et un d'indice 2, y_1 (qui représente $M = (y_1, x)$).

Dans \overline{Y}_1 , par exemple pour une structure complexe qui rend les fibres holomorphes, deux bandes vont de M à M , une qui coupe D_1^+ , et sa « symétrique » qui coupe D_1^- . Leur union est la fibre au-dessus de x . Elles sont paramétrées par la longueur l de la coupure $c(l)$ représentée sur la figure 5. Elles sont rigides et comptent chacune pour 1 une fois la contrainte en D_1 prise en compte.

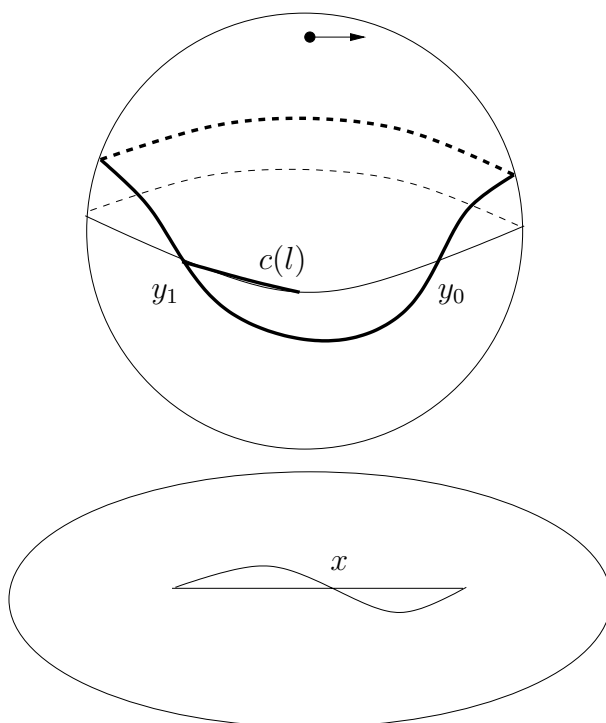


FIGURE 5. Bande holomorphe de M à M intersectant D_1^+

Par contraste, aucune bande holomorphe rigide ne joint m à m en coupant le diviseur D_1 en un point où la contrainte est satisfaite : si des bandes rigides peuvent être trouvées comme pour M , on peut vérifier que la contrainte ne peut pas être satisfaite.

On obtient $b^1(M) = 2M$ et $b^1(m) = 0$. D'où les valeurs $q(M) = 2$ et $q(m) = 0$ qui correspondent à celles de Khovanov.

Le théorème 4.2 annoncé dans [1] se précise ainsi :

THÉORÈME 4.5. — *Les homologies de Khovanov et de Khovanov symplectique sont isomorphes comme \mathbb{Q} -espaces vectoriels.*

La correspondance précise entre espaces vectoriels bigradués reste encore partiellement mystérieuse.

5. DE KHOVANOV À KHOVANOV SYMPLECTIQUE

Pour montrer l'équivalence entre homologie de Khovanov et homologie de Khovanov symplectique, on (1) démontre l'équivalence pour les tresses triviales (i.e. pour *l'algèbre des arcs*), et les tresses élémentaires (i.e. les *cap- et cup-bimodules*) et (2) montre que les deux homologies sont construites à partir de ces briques de bases par le même procédé algébrique.

5.1. Reformulation de l'homologie de Khovanov

Tout entrelacs L peut être réalisé comme la clôture d'une tresse à $2n$ brins pour n suffisamment grand. On cherche à définir l'homologie de Khovanov à partir de données sur les tresses élémentaires et sur les différentes façons de les fermer.

5.1.1. *L'algèbre des arcs.* — Pour chaque entier $n > 0$, on considère la collection P_{2n} constituée des $2n$ points de coordonnées $(k, 0)$, pour $k = 1, \dots, 2n$ dans le plan. Une *correspondance plongée* est une collection de n arcs plongée dans le demi-plan supérieur, à bord dans P_{2n} et considérée à isotopie dans le demi-plan supérieur et relative au bord près. Si C est une correspondance plongée, on note \overline{C} le symétrique de C par rapport à l'axe réel.

L'algèbre des arcs H_n est la catégorie linéaire dont les objets sont les correspondances plongées et les morphismes $H_n(C_0, C_1)$ sont donnés par $H^*(S^2, \mathbb{Z}_2)^{\otimes k}[n - k]$, où k est le nombre de cercles dans $C_0 \cup \overline{C_1}$.

Si C est une correspondance plongée, \overline{C} donne un cobordisme de P_{2n} vers le vide et C un cobordisme du vide vers P_{2n} . Composés dans cet ordre, ils fournissent un cobordisme de dimension un $\overline{C} \cup C$ de P_{2n} vers lui-même. La tresse triviale T donne un autre exemple d'un tel cobordisme. Il y a un cobordisme de dimension deux naturel S de $\overline{C} \cup C$ vers T , dit *simple*, qui consiste à résoudre successivement les arcs de $\overline{C} \cup C$ qui « se font face » comme sur la figure 6.

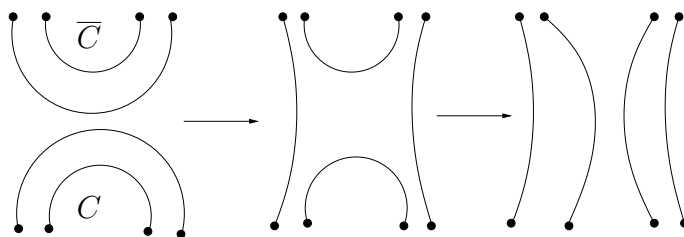


FIGURE 6. Exemple de cobordisme simple

On pose

$$H_n = \bigoplus_{B,C \in \text{Ob}(H_n)} H_n(B, C).$$

À l'aide de S , on munit H_n d'une structure de H_n -bimodule. La composition $f \circ g$ de $g \in H_n(C_0, C_1)$ et $f \in H_n(C_2, C_3)$ vaut 0 si $C_2 \neq C_1$ et est donnée par composition des morphismes de cobordismes élémentaires m et Δ dans la suite de résolutions naturelles du cobordisme simple qui permet de passer de $(C_0 \cup \overline{C_1}) \cup (C_1 \cup \overline{C_3})$ à $C_0 \cup \overline{C_3}$, c'est-à-dire essentiellement par $\mathcal{A}(S)$.

5.1.2. Des entrelacs aux tresses

Première étape : Réduction au cas des tresses élémentaires

Étant donnée une tresse ϕ à $2n$ brins, on note

$$CKh_\phi = \bigoplus_{C, C' \in \text{Ob}(H_n)} CKh(C \cup \phi \cup \overline{C'}).$$

Le complexe CKh_ϕ est un H_n -bimodule, toujours pour la multiplication induite par les cobordismes simples, et si ϕ_1 et ϕ_2 sont deux tresses à $2n$ brins, on a

THÉORÈME 5.1 (Théorème 1 dans [6]). —

$$Kh_{\phi_1 \cdot \phi_2} = Kh_{\phi_1} \otimes_{H_n} Kh_{\phi_2}.$$

En particulier, tout Kh_ϕ est déterminé par la donnée des H_n -bimodules Kh_s , où s est une tresse élémentaire.

Démonstration. — On part de l'identité de H_m -bimodules :

$$(*) \quad H_m \otimes_{H_m} H_m \simeq H_m.$$

Ensuite, si B et C sont deux correspondances plongées, on compose $(*)$ à gauche par $H_m(B, \overline{B})$ et à droite par $H_m(C, \overline{C})$ pour obtenir

$$\bigoplus_{D \in \text{Ob}(H_m)} (H_m(B, D) \otimes_{H_m} H_m(D, \overline{C})) \simeq H_m(B, \overline{C}).$$

Ceci implique l'égalité de H_n -bimodules $CKh_{\phi_1} \otimes_{H_n} CKh_{\phi_2} = CKh_{\phi_1 \cdot \phi_2}$. La compatibilité avec la différentielle provient des propriétés de commutation entre cobordismes successifs. \square

Seconde étape : Kh_s , cup- et cap-bimodules

On a une identification canonique entre les correspondances plongées entre $2n$ points qui contiennent un arc reliant le point i et le point $i + 1$ et les correspondances plongées entre les $2n - 2$ points restants. Autrement dit, on a un foncteur

$$\cap_i : H_{n-1} \rightarrow H_n,$$

un $H_{n-1} - H_n$ -bimodule

$$\cap_i = \bigoplus_{C \in \text{Ob}(H_{n-1}), C' \in \text{Ob}(H_n)} H_n(\cap_i(C), C')$$

et un $H_n - H_{n-1}$ -bimodule

$$\cup_i = \bigoplus_{C \in \text{Ob}(H_n), C' \in \text{Ob}(H_{n-1})} H_n(C, \cap_i(C')).$$

Une tresse élémentaire à $2n$ brins s_i possède un seul croisement x_i , positif ou négatif, entre les brins numéros i et $i + 1$. Chaque facteur $CKh(C.s_i.\overline{C'})$ pour $C, C' \in \text{Ob}(H_n)$ est un complexe où apparaissent les résolutions de x_i . On obtient soit une tresse triviale, c'est-à-dire $H_n(C, C')$, soit $(\cup_i \otimes_{H_{n-1}} \cap_i)(C, C')$ avec un morphisme $d : H_n(C, C') \rightarrow (\cup_i \otimes_{H_{n-1}} \cap_i)(C, C')$ où $d : (\cup_i \otimes_{H_{n-1}} \cap_i)(C, C') \rightarrow H_n(C, C')$ est donnée par m ou Δ suivant le signe de s_i .

Autrement dit, Kh_s – et donc Kh_ϕ – est entièrement déterminé par l'algèbre des arcs H_n comme H_n -bimodule et par les cap- et cup-bimodules \cap_i et \cup_i : c'est le cône du morphisme d .

5.2. L'algèbre des arcs symplectiques

Si C et C' sont deux correspondances plongées dans $\text{Ob}(H_n)$, on définit

$$\mathcal{H}_n(C, C') := CSKh(C, C') = CF(L_C, L_{\overline{C'}})$$

et

$$\mathcal{H}_n := \bigoplus_{C \in \text{Ob}(H_n), C' \in \text{Ob}(H_n)} \mathcal{H}_n(C, C').$$

Remarque 5.2. — Les points de $L_C \cap L_{\overline{C'}}$ correspondent aux n -uplets $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$ où $y_i \in c_i \cap c'_{\sigma(i)}$, pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Si S est une composante connexe de $C \cup \overline{C'}$, le choix d'une coordonnée de \mathbf{y} dans S détermine toutes les autres. On remarque donc que $\mathcal{H}_n(C, C') = CF(L_C, L_{\overline{C'}}) = H_n(C, C')$. Par ailleurs, la différentielle $d : CF(L_C, L_{\overline{C'}}) \rightarrow CF(L_C, L_{\overline{C'}})$ est nulle car tous les indices ont même parité.

Seidel et Smith montrent dans [24] (voir aussi [18]) que L_C et $L_{\overline{C'}}$ sont isotopes par une isotopie hamiltonienne dans Y_n . À la définition précédente, on peut ainsi préférer $CSKh(C, C') = CF(L_C, L_{C'})$.

Pour $C, C', C'' \in \text{Ob}(\mathcal{H}_n)$, la multiplication

$$\mathbf{m} : CF(L_C, L_{C'}) \otimes CF(L_{C'}, L_{C''}) \rightarrow CF(L_C, L_{C''})$$

est alors obtenue en comptant les triangles holomorphes à bord dans, alternativement, L_C , $L_{C'}$ et $L_{C''}$. C'est la deuxième opération dans la catégorie de Fukaya de (Y_{2n}, Ω) .

5.3. Homologie de Khovanov symplectique pour les tresses

Comme dans le cas de Khovanov, pour une tresse ϕ à $2n$ brins, on note

$$CSKh_\phi = \bigoplus_{C, C' \in \text{Ob}(H_n)} CSKh(C \cup \phi \cup \overline{C'}).$$

On lui donne une structure de \mathcal{H}_n -bimodule en singeant la définition de la structure multiplicative sur \mathcal{H}_n , obtenue en comptant des triangles holomorphes.

5.4. L’homologie de Khovanov symplectique pour les enchevêtrements

5.4.1. Homologie de Floer en quilt. — On l’a vu, la décomposition de l’homologie de Khovanov en pièces élémentaires amène à considérer des *enchevêtrements* (*tangles* en anglais) qui joignent, par exemple dans le cas de \cup_i , des nombres de points différents. Les variétés symplectiques en jeu, par exemple Y_n et Y_{n-1} pour \cup_i , sont donc différentes. Cette difficulté est prise en charge par l’utilisation des quilts holomorphes, développés par Wehrheim et Woodward [26, 27, 28].

Si (M_1, ω_1) et (M_2, ω_2) sont deux variétés symplectiques, une *correspondance lagrangienne* de M_1 vers M_2 est une sous-variété lagrangienne $L \subset (M_1 \times M_2, -\omega_1 \oplus \omega_2)$. Dans la suite, on note M_1^- la variété symplectique $(M_1, -\omega_1)$. Les correspondances lagrangiennes ont la vertu de se composer. Si $(M_0, \omega_0), (M_1, \omega_1)$ et (M_2, ω_2) sont des variétés symplectiques et si $L_1 \subset M_0^- \times M_1$ et $L_2 \subset M_1^- \times M_2$ sont des correspondances lagrangiennes, alors on définit

$$L_2 \circ L_1 = \{(x_0, x_2) \in M_0 \times M_2 \mid \exists x_1 \in M_1, (x_0, x_1) \in L_1, (x_1, x_2) \in L_2\}.$$

Cet ensemble est en général singulier. S’il est lisse, c’est une sous-variété lagrangienne de $M_0^- \times M_2$.

Lorsqu’une suite de correspondances lagrangiennes L_0, \dots, L_k part du point pour revenir au point, i.e. $L_0 \subset pt \times M_1$, $L_k \subset M_k \times pt$ et $L_i \subset M_i^- \times M_{i+1}$, alors, pour peu que chaque L_i soit *monotone*, Wehrheim et Woodward définissent une homologie de Floer $HF_*(L_0, \dots, L_k)$ de la façon suivante. Les générateurs du complexe de chaînes sont les k -uplets $(x_1, \dots, x_k) \in M_1 \times \dots \times M_k$, où $x_1 \in L_0$, $x_k \in L_k$ et $(x_i, x_{i+1}) \in L_{i+1}$ pour $0 \leq i \leq k-1$. La différentielle compte les *quilts* holomorphes (u_1, \dots, u_k) où $u_i : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow M_i$ est pseudo-holomorphe (pour une structure presque complexe compatible fixée sur chaque M_i au préalable), $u_1(\cdot, 0) \subset L_1$, $(u_i(\cdot, 1), u_{i+1}(\cdot, 0)) \subset L_i$, $u_k(\cdot, 1) \subset L_k$ et (u_1, \dots, u_k) converge vers $(x_1^\pm, \dots, x_k^\pm)$ en $\pm\infty$. L’homologie de Floer en quilt se comporte de façon fonctorielle pour la composition :

THÉORÈME 5.3 (Wehrheim-Woodward). — *Pour une suite de correspondances monotones L_0, \dots, L_k telles que la composition $L_{i+1} \circ L_i$ soit plongée, on a*

$$HF(L_0, \dots, L_{i+1} \circ L_i, \dots, L_k) \simeq HF(L_0, \dots, L_k).$$

5.4.2. Décomposition de l’homologie de Khovanov symplectique en briques élémentaires. — À chaque enchevêtrement élémentaire \cap_i , \cup_i et s_i , Rezazadegan [21] associe une correspondance lagrangienne.

– Dans le cas de \cup_i , on part de l’ensemble coisotrope

$$\{(x_1, \dots, x_n) \mid \exists j, x_j \in S_i\} \subset Y_n.$$

Il est difféomorphe à $S^2 \times Y_{n-1}$. On considère son injection $i : S^2 \times Y_{n-1} \hookrightarrow Y_n$ et la projection $p : S^2 \times Y_{n-1} \rightarrow Y_{n-1}$. L’ensemble $(i, p)(S^2 \times Y_{n-1})$ est une sous-variété

lagrangienne de $Y_n^- \times Y_{n-1}$ qui donne la correspondance. La construction pour \cap_i est similaire.

- Si ϕ est une tresse à $2n$ brins (par exemple s_i), la correspondance lagrangienne associée est le graphe dans $Y_n^- \times Y_n$ du difféomorphisme symplectique Φ .

Tout entrelacs L peut être décrit par une concaténation d’enchêvements élémentaires :

$$L = T_1 \circ \cdots \circ T_k$$

où $T_i = \cap_i, \cup_i, s_i$ ou s_i^{-1} . Ainsi, on peut associer à L la suite de correspondances $\Psi(L) = (L_{T_1}, \dots, L_{T_k})$ qui va du point au point. Rezazadegan [20, 21] montre que l’application Ψ est fonctorielle et que :

THÉORÈME 5.4. — $SKh(L) \simeq HF(\Psi(L))$.

Ces propriétés proviennent du fait que les compositions entre correspondances lagrangiennes vérifient les mêmes propriétés de commutation que les enchêvements (voir le lemme 4.1 dans [21]). Aux mouvements élémentaires dans un cas correspondent des isotopies hamiltoniennes et des glissements d’anses dans le second.

5.5. Les cap- et cup-bimodules symplectiques λ_i et γ_i

Pour $i \in \{1, \dots, 2n - 1\}$, on pose

$$\lambda_i = \bigoplus_{C \in \text{Ob}(H_{n-1}), C' \in \text{Ob}(H_n)} CF(L_C, \cap_i, L_{C'}),$$

et

$$\gamma_i = \bigoplus_{C \in \text{Ob}(H_n), C' \in \text{Ob}(H_{n-1})} CF(L_C, \cup_i, L_{C'})$$

que l’on munit respectivement d’une structure de $\mathcal{H}_{n-1} - \mathcal{H}_n$ -bimodule et de $\mathcal{H}_n - \mathcal{H}_{n-1}$ -bimodule à l’aide des quilts triangulaires.

5.6. Équivalences

Rezazadegan obtient dans [21] :

THÉORÈME 5.5. — *Il y a, sur \mathbb{Z}_2 , une équivalence de catégories $H_*(\mathcal{H}_n) \simeq H_n$ et de bimodules $H_*(\lambda_i) \simeq \cap_i$ et $H_*(\gamma_i) \simeq \cup_i$.*

Idée de la preuve. — Il faut essentiellement montrer l’existence d’un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_n(A, \overline{B}) \otimes H_n(B, \overline{C}) & \xrightarrow{m} & H_n(A, \overline{C}) \\ \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow \\ \mathcal{H}_n(A, \overline{B}) \otimes \mathcal{H}_n(B, \overline{C}) & \xrightarrow{m} & \mathcal{H}_n(A, \overline{C}). \end{array}$$

Les flèches verticales sont les isomorphismes de complexes mentionnés dans la remarque 5.2. Pour cela, on reformule la multiplication de \mathcal{H}_n à l'aide des quilts holomorphes comme indiqué sur la figure 7.

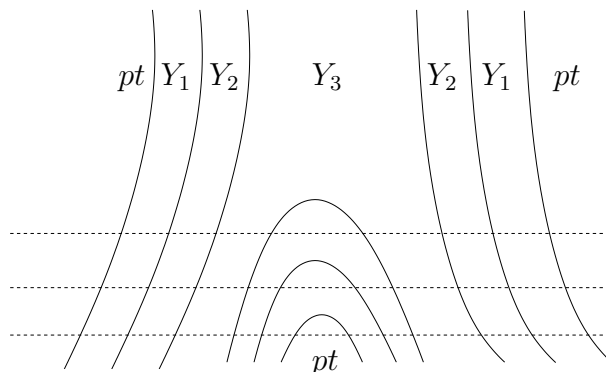


FIGURE 7. Quilt holomorphe pour la multiplication

Par un procédé standard d'étirement (le long des lignes pointillées du dessin 7), on décompose ces quilts en une succession de quilts élémentaires comme dessiné sur la figure 8, chacun étant une cap- ou cup-correspondance.

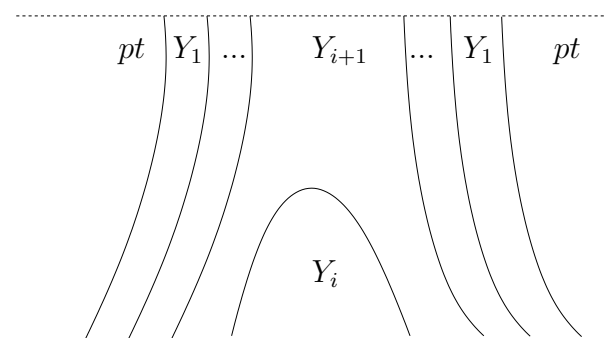


FIGURE 8. Quilt élémentaire

Pour conclure, on montre que les cap- et cup-correspondances ont le même effet que m et Δ , après identification canonique des complexes comme espaces vectoriels. Par functorialité de l'homologie de Floer en quilt (qui permet de se réduire au cas où $Y_{i-1} = pt$ sur la figure 8), on se ramène à montrer que la multiplication $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ correspond à m et que la comultiplication $\mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1$ correspond à Δ . La multiplication symplectique est obtenue en comptant les triangles holomorphes, dans $A_1 = T^*S^2$, entre trois lagrangiennes hamiltoniennement isotopes à la section nulle, par exemple les graphes de trois fonctions $F, G, H : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dont les différences sont de Morse. D'après Fukaya-Oh [3], pour une structure presque complexe et des fonctions convenables, ces triangles sont en bijection avec les arbres en Y de trajectoires de Morse brisées des fonctions $G - F, H - F$ et $H - G$. On retrouve la multiplication de Khovanov en identifiant les maximums avec v_- et les minimums avec v_+ .

Le même argument s'applique pour la comultiplication où on compte les trajectoires en Y inversé. \square

Soit s_i un générateur du groupe de tresse et \cup_i et \cap_i les enchevêtrements entre, réciproquement, $2n$ et $2n - 2$ points et $2n - 2$ et $2n$ points, dont tous les brins sont triviaux, excepté entre les points i et $i + 1$ où on a la connexion évidente. Rezazadegan [20, 21] démontre que, si s_i est le générateur du groupe de tresses qui voit se croiser les i et $(i + 1)$ -ièmes brins, le \mathcal{H}_n -bimodule SKh_{s_i} est le cône de la multiplication (définie en comptant les triangles en quilt adéquats)

$$SKh(\cup_i) \otimes SKh(\cap_i) \rightarrow SKh(Id).$$

Comme s_i engendre un difféomorphisme symplectique de A_{2n-1} qui est un twist symplectique le long de la sphère lagrangienne au-dessus d'un segment droit entre i et $i + 1$, ce résultat est une reformulation de la suite exacte longue de Seidel [23] dans le cadre des quilts. De la même façon, le \mathcal{H}_n -bimodule $SKh_{s_i^{-1}}$ est le cône de la comultiplication (définie en comptant des triangles en quilt « la pointe en bas »)

$$SKh(Id) \rightarrow SKh(\cup_i) \otimes SKh(\cap_i).$$

En particulier, ceci implique, compte tenu du théorème 5.5, que :

THÉORÈME 5.6. — $SKh_{s_i} \simeq Kh_{s_i}$ et $SKh_{s_i^{-1}} \simeq Kh_{s_i^{-1}}$.

5.7. Théorème de décomposition

Le résultat principal annoncé par Abouzaid et Smith est le suivant :

THÉORÈME 5.7. —

$$SKh_{\phi_1 \cdot \phi_2} = SKh_{\phi_1} \otimes_{\mathcal{H}_n} SKh_{\phi_2}.$$

Cette décomposition est facile à montrer pour le produit tensoriel A_∞ . Énoncée comme ici avec le produit tensoriel classique, elle est une conséquence du théorème :

THÉORÈME 5.8 ([1]). — *Il y a une équivalence de A_∞ -bimodules $\mathcal{H}_n \simeq H_n$, $\lambda_i \simeq \cap_i$ et $\Upsilon_i \simeq \cup_i$. Autrement dit, l'algèbre des arcs \mathcal{H}_n est formelle (elle est quasi-isomorphe à une algèbre A_∞ où toutes les opérations \mathbf{m}_k , hormis la multiplication \mathbf{m}_2 , sont nulles).*

Il est déjà difficile d'étendre le résultat d'équivalence de Rezazadegan 5.5 au cas des coefficients rationnels. Un point important pour montrer la propriété de formalité est le fait que les opérations \mathbf{m}_k , $k \geq 3$, préservent le q -degré. Le théorème 4.2 est un corollaire des résultats 5.7, 5.5 et 5.6.

RÉFÉRENCES

- [1] M. Abouzaid, I. Smith – The symplectic arc algebra is formal, arXiv :1311.5535.
- [2] S. Cautis, J. Kamnitzer – Knot homology via derived categories of coherent sheaves I : The $\mathfrak{sl}(2)$ -case, *Duke Math. J.* **142** (2008), 511-588.
- [3] K. Fukaya, Y.-G. Oh – Zero loop open strings in the cotangent bundle and Morse homotopy, *Asian J. Math* **1** (1997), 96-180.
- [4] M. Jacobsson – An invariant of link cobordisms from Khovanov homology, *Algebr. Geom. Topol.* **4** (2004), 1211-1251.
- [5] M. Khovanov – A categorification of the Jones polynomial, *Duke Math. J.* **101** (2000), 359-426.
- [6] M. Khovanov – A functor-valued invariant of tangles, *Algebr. Geom. Topol.* **2** (2002), 665-641.
- [7] M. Khovanov – An invariant of tangle cobordisms, *Trans. Amer. Math. Soc.* **358** (2006), 315-327.
- [8] M. Khovanov, L. Rozansky – Matrix factorizations and link homology, *Fund. Math.* **199** (2008), 1-91.
- [9] M. Khovanov, L. Rozansky – Matrix factorizations and link homology II, *Geom. Topol.* **12** (2008), 1387-1425.
- [10] P. Kronheimer, T. Mrowka – Gauge theory for embedded surfaces I, *Topology* **32** (1993), 773-826.
- [11] P. Kronheimer, T. Mrowka – Khovanov homology is an unknot detector, *Publ. Math. I.H.É.S.* **113** (2011), 97-208.
- [12] C. Manolescu – Nilpotent slices, Hilbert schemes, and the Jones polynomial, *Duke Math. J.* **132** (2006), 311-369.
- [13] S. Mau, K. Wehrheim, C. Woodward – A_∞ -functors for Lagrangian correspondences, preprint.
- [14] L. Ng – A Legendrian Thurston-Bennequin bound from Khovanov homology, *Algebr. Geom. Topol.* **5** (2005), 1637-1653.
- [15] P. Ozsváth, Z. Szabó – Holomorphic disks and topological invariants for closed three-manifolds, *Ann. of Math. (2)* **159** (2004), 1027-1158.
- [16] P. Ozsváth, Z. Szabó – Holomorphic disks and three-manifold invariants : properties and applications, *Ann. of Math. (2)* **159** (2004), 1159-1245.
- [17] P. Ozsváth, Z. Szabó – On the Heegaard-Floer homology of branched double-covers, *Adv. Math.* **194** (2005), 1-33.
- [18] T. Perutz – Hamiltonian handleslides for Heegaard-Floer homology, *Proceedings of Gökova Geometry-Topology Conference 2007*, 15-35, Gökova Geometry/Topology Conference (GGT), Gökova, 2008.

- [19] J. Rasmussen – Khovanov homology and the slice genus, *Invent. Math.* **182** (2010), 419-447.
- [20] R. Rezazadegan – Seidel-Smith cohomology for tangles, *Selecta Math. (N.S.)* **15** (2009), 487-518.
- [21] R. Rezazadegan – Pseudoholomorphic quilts and Khovanov homology, arXiv :0912.0669, 2011.
- [22] P. Seidel – Graded Lagrangian submanifolds, *Bull. Soc. Math. France* **128** (2000), 103-146.
- [23] P. Seidel – A long exact sequence for symplectic Floer cohomology, *Topology* **42** (2003), 1003-1063.
- [24] P. Seidel, I. Smith – A link invariant from the symplectic geometry of nilpotent slices, *Duke Math. J.* **134** (2006), 453-514.
- [25] P. Seidel, J. Solomon – Symplectic cohomology and q -intersection numbers, *Geom. and Funct. Anal.* **22** (2012), 443-477.
- [26] K. Wehrheim, C. Woodward – Quilted Floer cohomology, *Geom. Topol.* **14** (2000), 833-902.
- [27] K. Wehrheim, C. Woodward – Functoriality for Lagrangian correspondences in Floer theory, *Quantum Topol.* **1** (2010), 129-170.
- [28] K. Wehrheim, C. Woodward – Quilted Floer trajectories with constant components, *Geom. Topol.* **16** (2012) 127-154, corrigendum to [26].
- [29] E. Witten – Khovanov homology and gauge theory, arXiv :1108.3103, 2011.
- [30] E. Witten – Fivebranes and knots, *Quantum Topol.* **3** (2012), 1-137.

Vincent COLIN

Laboratoire de mathématiques Jean Leray
UMR CNRS-UN 6629
Université de Nantes
Faculté des Sciences et Techniques
2, rue de la Houssinière
B.P. 92208 F- 44322 Nantes Cedex 03
E-mail : `vincent.colin@univ-nantes.fr`