Séminaire BOURBAKI Janvier 2014
66ème année, 2013-2014, n$^{\text{o}}$ 1078

TOUTE VARIÉTÉ DE DIMENSION 3 COMPACTE ET ASPHÉRIQUE EST VIRTUELLEMENT DE HAKEN [d'après Ian Agol et Daniel T. Wise]

par **Nicolas BERGERON**

Sauf mention contraire, dans tout ce rapport le terme *variété* désigne une variété lisse, connexe, orientable et sans bord, et *surface* une variété de dimension 2. Un choix indifférent de point base est effectué lorsque l'on parle du groupe fondamental d'un espace connexe par arc, et un choix approprié de points bases est effectué lorsque l'on parle de morphisme entre groupes fondamentaux.

INTRODUCTION

Soit M une variété de dimension 3 compacte et *asphérique*, autrement dit dont le revêtement universel est contractile. [(1)] Dans les annés 60 les topologues ont dégagé la définition suivante.

Définition 0.1. — *La variété M est dite* de Haken *si M contient une surface plongée (de genre non nul) et* incompressible*, c'est-à-dire telle que l'inclusion induise une injection au niveau des groupes fondamentaux.*

Wolfgang Haken [26] montre en effet que si M contient une surface S plongée et incompressible, découper M le long de S donne une variété *à bord* de dimension 3 qui est « plus simple ». Mieux, Haken montre que la variété à bord ainsi obtenue contient encore une surface incompressible (au sens adapté aux variétés à bord) selon laquelle on peut à nouveau la découper et il montre qu'après un nombre fini d'étapes on obtient une union finie de polyèdres à coins cubiques (homéomorphes à des cellules de dimension 3). On dit aussi que M possède une *hiérarchie (de Haken).*

À la fin des années 70, William Thurston révolutionne la topologie de la dimension 3 en liant topologie et géométrie. Dans son article-programme [45], il énonce sa célèbre *conjecture de géométrisation* en tête d'un programme de 24 questions qui visent à une compréhension profonde des variétés de dimension 3. Lorsque M est une variété de Haken, Thurston montre que les pièces de la décomposition par tores incompressibles de Jaco-Shalen et Johansson de M admettent l'une des huit « géométries de Thurston », le

1. Cette dernière hypothèse permet d'éviter les complications liées aux sommes connexes et à la conjecture de Poincaré, difficultés par ailleurs maintenant bien comprises.

tour de force pour les pièces hyperbolisables étant, après l'hyperbolisation des polyèdres à coins cubiques résultant d'une hiérarchie de Haken, de remonter la hiérarchie à l'aide d'applications de recollements ; voir par exemple [31, 35].

Mais Thurston montre aussi qu'en un certain sens la plupart des variétés de dimension 3 ne sont pas de Haken et construit en particulier les premiers exemples de variétés hyperboliques qui ne sont pas de Haken. Parmi ses 24 questions il reprend néanmoins la conjecture suivante d'abord proposée par Friedhelm Waldhausen [46] (et qui aurait permis de ramener la conjecture de géométrisation au cas des variétés de Haken).

Conjecture 0.2. — *Soit M une variété de dimension* 3 *compacte et asphérique, alors M possède un revêtement fini qui est une variété de Haken.*

Depuis l'article originel de Thurston, la plupart des 24 questions ont été résolues (2) notamment la conjecture de géométrisation démontrée par Grigori Perelman en 2002, voir par exemple [10]. Jusqu'à tout récemment seules restaient ouvertes la conjecture de Waldhausen (plus trois de ses avatars dont nous parlerons plus loin) et une question de nature plus arithmétique. Depuis la démonstration par Perelman de la conjecture de géométrisation, la conjecture de Waldhausen ne restait plus ouverte que dans le cas où la variété M est hyperbolique, autrement dit peut être munie d'une métrique riemannienne à courbure sectionnelle constante égale à -1. L'objet de ce rapport est de donner les grandes lignes de la démonstration du théorème suivant par Ian Agol.

Théorème 0.3. — *Soit M une variété hyperbolique compacte de dimension* 3*, alors M possède un revêtement fini qui est une variété de Haken.*

Notons toutefois que la démonstration de la conjecture 0.2 utilise la conjecture de géométrisation, elle ne permet donc pas d'en donner une nouvelle démonstration.

Grandes étapes de la démonstration. — La première étape fondamentale est un théorème de Jeremy Kahn et Vladimir Markovic qui implique que M contient « beaucoup » de surfaces incompressibles mais qui sont seulement *immergées.* Peu de temps avant que Kahn et Markovic démontrent leur théorème, Dani Wise et ses co-auteurs, dont en particulier Frédéric Haglund, dégageaient de leur côté le concept de *complexe cubique spécial.* Un complexe cubique à courbure négative ou nulle est un bel objet combinatoire avec des hypersurfaces naturelles. En outre le complexe cubique se « rappelle » la manière dont ces hypersurfaces s'intersectent ; il est dit spécial si certaines pathologies d'intersections sont interdites, en particulier les hypersurfaces doivent être plongées. Une construction de Michah Sageev permet de lier ces travaux : avec Wise nous déduisons en effet du théorème de Kahn et Markovic que si M est une variété hyperbolique compacte de dimension 3 alors M a le même groupe fondamental qu'un complexe cubique à courbure négative ou nulle. Reste que ce complexe n'est en général pas *spécial*, le résultat ne dit donc rien sur la manière dont les hypersurfaces s'intersectent.

2. Les solutions confirmant toutes les intuitions de Thurston ; on renvoie à la « review » de [45] sur Zentralblatt par Jean-Pierre Otal pour un « état de l'art » détaillé.

La dernière (et principale) étape est franchie par Agol en avril 2012 : *tout complexe cubique compact à courbure négative ou nulle dont le groupe fondamental est hyperbolique possède un revêtement fini qui est spécial*; voir le théorème 1.13. On notera que ce résultat était conjecturé par Wise et que la démonstration d'Agol fait un usage essentiel des travaux de Wise sur les complexes cubiques spéciaux.

Le théorème d'Agol a de nombreux corollaires : le groupe fondamental d'une variété hyperbolique compacte de dimension 3 possède un sous-groupe d'indice fini qui se surjecte sur un groupe libre non élémentaire, possède un sous-groupe d'indice fini qui est bi-ordonnable, s'injecte dans $\mathrm{GL}(n, \mathbf{Z})$ pour un certain n, *etc.* Au point que Danny Calegari [14] n'a pas hésité à écrire

> "It is hard to think of a question about fundamental groups of hyperbolic 3-manifolds that it doesn't answer."

Agol déduit enfin de son théorème que toute variété hyperbolique compacte de dimension 3 possède un revêtement fini qui est homéomorphe à la suspension d'une surface compacte par un difféomorphisme.

Organisation du rapport. — La première section se veut une introduction rapide aux complexes cubiques (spéciaux) motivée par la démonstration du théorème 0.3. Le but est d'énoncer et de motiver le théorème 1.13. On s'adresse à un mathématicien familier des concepts de « groupe hyperbolique » ou d'« espace CAT(0) ». Le livre [12] pourra parfaitement servir d'ouvrage de référence pour une introduction à ces concepts.

Dans les sections suivantes on cherche à fournir au lecteur un guide à travers les travaux d'Agol et Wise. La lecture est par conséquent plus technique.

1. DES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES AUX COMPLEXES CUBIQUES

1.1. Sous-espaces géométriquement incompressibles

Commençons par généraliser la notion de surface incompressible.

DÉFINITION 1.1. — *Une application continue $Y \to X$ entre espaces connexes par arcs et localement contractiles est dite* géométriquement incompressible *si l'application induite aux revêtements universels $\widetilde{Y} \to \widetilde{X}$ est un plongement.*

Par exemple si $Y \to X$ est une isométrie locale entre espaces métriques à courbure négative ou nulle alors elle est géométriquement incompressible, d'après le théorème de Cartan-Hadamard [12].

Dans la suite on supposera que le groupe $G = \pi_1 M$ est hyperbolique – au sens de Mikhaïl Gromov – et opère *géométriquement*, c'est-à-dire par isométries, proprement et avec quotient compact, sur un espace métrique X CAT(0), c'est-à-dire simplement connexe et à courbure négative ou nulle.

Définition 1.2. — *Un sous-groupe $H < G$ est dit* convexe-cocompact *relativement à l'action de G sur X s'il existe un sous-espace convexe $Y \subset X$ qui est H-invariant et H-cocompact. Le sous-groupe H est de* codimension 1 *si le quotient $H \backslash X$ a (au moins) deux bouts.*

Si G est hyperbolique et si H est convexe-cocompact relativement à l'action de G sur un modèle géométrique X, il le reste relativement à n'importe quelle autre action géométrique de G. Un tel sous-groupe $H < G$ est *quasi-convexe*.

Si H est de codimension 1, il existe un sous-espace convexe $Y' \subset X$ qui est H-invariant, H-cocompact et tel que le complémentaire $X - Y'$ ait au moins deux bouts. À tout sous-groupe convexe-cocompact H de codimension 1 on associe alors arbitrairement un *mur* $M = M(H)$, c'est-à-dire une partition $\{\overleftarrow{M}, \overrightarrow{M}\}$ de $X - Y'$ telle que chacun de ces sous-ensembles contienne au moins un bout de $X - Y'$.[3]

1.2. Beaucoup de surfaces ... immergées

Rappelons qu'une variété hyperbolique est une variété riemannienne, lisse, connexe, complète et de courbure sectionnelle constante égale à -1. On note $\mathbf{H}_3$ l'unique – à isométrie près – variété hyperbolique simplement connexe de dimension 3 et $\partial \mathbf{H}_3$ son bord à l'infini.

Soit M une variété hyperbolique de dimension 3. Si M possède un revêtement fini qui est de Haken alors son groupe fondamental $G = \pi_1(M)$ contient un sous-groupe isomorphe au groupe fondamental d'une surface de genre au moins 2. Une première étape importante vers la démonstration du théorème 0.3 aura donc naturellement été la démonstration – par Kahn et Markovic [30, 6] en 2009 – du théorème suivant.

Théorème 1.3 (Kahn-Markovic). — *Soit $M = G \backslash \mathbf{H}_3$ une variété hyperbolique uniformisée de dimension 3. Pour tout couple de points distincts $(x, y) \in \partial \mathbf{H}_3$ il existe un sous-groupe $H \subset G$, isomorphe au groupe fondamental d'une surface de genre au moins 2, et un sous-espace convexe $Y \subset \mathbf{H}_3$ qui est H-invariant, H-cocompact et dont le bord à l'infini $\partial Y \subset \partial \mathbf{H}_3$ sépare les points x et y.*

Noter que le sous-groupe H est nécessairement de codimension 1. De plus, le quotient $H \backslash Y$ se retracte sur une surface S. L'inclusion $Y \to \mathbf{H}_3$ passe donc au quotient en une immersion $F : S \to M$ qui est géométriquement incompressible. Elle est en particulier π_1-injective. Pour démontrer la conjecture 0.2 il « suffit » de montrer qu'il existe un revêtement fini de M auquel F se relève en un plongement.

Le théorème 1.3 est la seule étape où il est important que la variété porte une métrique de courbure constante ; par la suite nous supposerons simplement que le groupe $G = \pi_1(M)$ est hyperbolique (au sens de Gromov) et opère géométriquement sur un espace CAT(0) X.

3. La notation $M = M(H)$ est abusive mais à chaque fois que nous rencontrerons un sous-groupe de codimension 1 nous supposerons toujours qu'un choix de partition a été fait.

Partant d'une ou plusieurs surfaces immergées incompressibles, Wise propose d'encoder la manière dont ces surfaces s'(auto-)intersectent dans un objet combinatoire plus simple (mais de grande dimension) : un *complexe cubique*.

1.3. Complexes cubiques

DÉFINITION 1.4. — *On appelle* n-cube *une copie de* $[-1,1]^n$*. Ses* faces *sont obtenues en fixant certaines des coordonnées égales à* ± 1*. Un* complexe cubique *est un CW-complexe obtenu en recollant des cubes* $[-1,1]^n$ *le long de leurs faces par des isométries.*

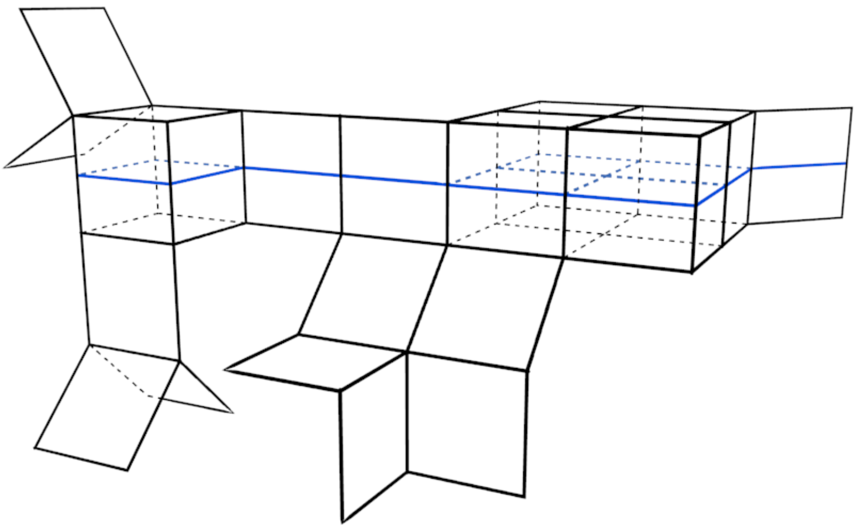

FIGURE 1. Un complexe cubique CAT(0) avec un de ses hyperplans

Un *complexe de drapeau* est un complexe simplicial tel que $n+1$ sommets engendrent un n-simplexe si et seulement si ces sommets sont deux à deux adjacents.

DÉFINITION 1.5 (Gromov). — *Un complexe cubique est* à courbure négative ou nulle *si en tout sommet le link est un complexe de drapeau.*[4] *Un complexe cubique est* CAT(0) *s'il est simplement connexe et à courbure négative ou nulle.*

Gromov montre qu'étant donné un complexe cubique CAT(0), l'espace métrique obtenu en munissant chaque cube de sa distance euclidienne est effectivement un espace métrique CAT(0).

Il faut penser aux complexes cubiques CAT(0) comme à des généralisations des arbres : couper une arête en son milieu sépare un arbre en deux composantes distinctes. Les complexes cubiques CAT(0) vérifient la même propriété à condition de remplacer les milieux d'arêtes par les *hyperplans*.

4. Noter que dans le cas d'un complexe carré cela revient à demander qu'en tout sommet la systole du link est de longueur ≥ 4.

Définition 1.6. — *Soit C un complexe cubique CAT(0). On appelle* hyperplan *de C un sous-espace connexe de C dont l'intersection avec chaque cube de C consiste soit en un unique* cube médian*, c'est-à-dire un sous-espace de $[-1,1]^n$ obtenu en fixant l'une des coordonnées égale à 0, ou en l'ensemble vide.*

On appelle plus généralement *hyperplan* d'un complexe cubique à courbure négative ou nulle la projection d'un hyperplan de son revêtement universel.

Noter que si C est un complexe cubique CAT(0) alors tout cube médian est contenu dans un et un seul hyperplan de C. Les hyperplans de C sont naturellement des complexes cubiques CAT(0). Ils séparent C en deux composantes distinctes. Enfin si H est un hyperplan, son voisinage cubique (c'est-à-dire la réunion de tous les cubes qui intersectent H) est un sous-espace convexe de C.

Exemple 1.7. — Soit $\mathcal{G}$ un graphe. Il correspond à $\mathcal{G}$ le *groupe d'Artin à angles droits*

$$A_{\mathcal{G}} = \langle x_s : s \in \text{Sommets}(\mathcal{G}) \;\big|\; [x_s, x_t] : (s,t) \in \text{Arêtes}(\mathcal{G})\rangle. \tag{1}$$

Le 2-complexe (carré) associé à la présentation (1) s'étend en un complexe cubique $X_{\mathcal{G}}$ à courbure négative ou nulle en ajoutant un n-cube (sous la forme d'un n-tore) pour tout ensemble de n générateurs commutant deux à deux.

Noter que dans $X_{\mathcal{G}}$ tout hyperplan est plongé et transversalement orientable. De plus, il n'y a ni *auto-tangence*, ni *inter-tangence* ; on renvoie à la figure 2 pour une « définition » imagée de ces deux notions.

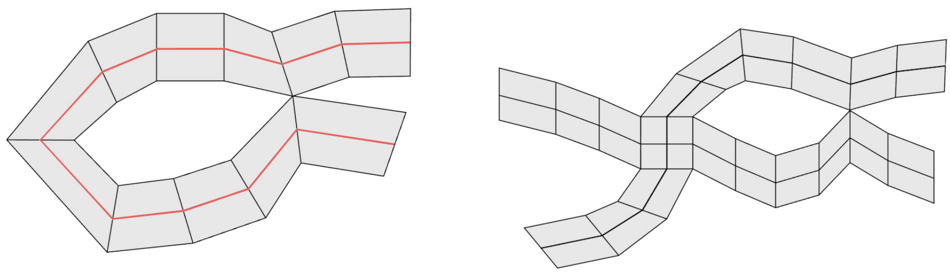

Figure 2. Un hyperplan auto-tangent et deux hyperplans inter-tangents

1.4. Complexe cubique dual

On considère toujours un groupe hyperbolique G qui opère géométriquement sur un espace CAT(0) X. Une construction générale de Sageev associe à un ensemble fini $H_1, \ldots, H_k$ de sous-groupes convexes-cocompacts et de codimension 1 dans G (relativement à l'action de G sur X) un complexe cubique « dual » : il correspond en effet à cette famille de sous-groupes un ensemble de murs gM_i où $M_i = M(H_i)$ et gM_i désigne la partition $\{g\overleftarrow{M}_i, g\overrightarrow{M}_i\}$, pour $i = 1, \ldots, k$ et $g \in G$. Chaque membre d'une telle partition est appelé *demi-espace*. Sageev [41] associe à ces données un *complexe cubique dual C* : un sommet — ou 0-cube — de C consiste en le choix d'un demi-espace $g\overleftarrow{M}_i$ ou $g\overrightarrow{M}_i$

pour tout mur gM_i ($i = 1, \ldots, k$, $g \in G$) de telle manière que tout point x de X soit contenu dans chacun de ces demi-espaces sauf peut-être un nombre fini d'entre eux. Deux sommets sont reliés par une arête — ou 1-cube — précisément lorsque les choix des demi-espaces diffèrent sur un mur et un seul. Finalement, on remplit chaque carré par un 2-cube, chaque bord de cube par un 3-cube, *etc.* On montre que le complexe cubique C ainsi obtenu est CAT(0).

Exemple 1.8. — Le complexe cubique dual au pavage triangulaire de $\mathbf{R}^2$ est de dimension 3. Il s'identifie au pavage standard de $\mathbf{R}^3$ par des cubes. Il correspond en effet à chaque mur du pavage deux demi-espaces et donc à chaque triplet de droites s'intersectant deux à deux, six sommets « duaux » qui sont les sommets d'un cube du complexe dual.

Le groupe G opère naturellement sur C. Les murs gM_i sont en bijection avec les hyperplans de C et le stabilisateur de l'hyperplan correspondant au mur gM_i est commensurable au groupe gH_ig^{-1}. La proposition suivante est due à Sageev [41].

Proposition 1.9. — *Soient G un groupe hyperbolique et $H_1, \ldots, H_k$ un ensemble fini de sous-groupes quasi-convexes de codimension* 1*. Alors, le complexe cubique dual C est de dimension finie et le groupe G opère cocompactement sur C.*

Explication. — Supposons pour simplifier que $k = 1$. Un n-cube de C correspond à n murs gM s'« intersectant » deux à deux. Mais puisque H est un sous-groupe quasi-convexe de G, les translatés gH ne s'accumulent pas. Le nombre de murs gM s'intersectant deux à deux est donc borné et le complexe C est de dimension finie. Considérons maintenant un cube maximal de C. Il lui correspond des murs qui s'intersectent deux à deux. Par quasi-convexité ces murs sont à une distance uniformément bornée d'un même point de X. Quitte à tout translater par G on peut ramener ce point à une distance uniformément bornée d'une origine fixée. Finalement seul un nombre fini de murs sont à une distance donnée de cette origine. Il n'y a donc qu'un nombre fini de cubes dans le quotient $G \backslash C$. □

En général l'action de G sur C n'est pas propre. La proposition suivante — version faible d'un résultat très général de Chris Hruska et Wise [28] — donne un critère pour que l'action de G sur C soit propre.

Proposition 1.10. — *Soient G un groupe hyperbolique et $H_1, \ldots, H_k$ un ensemble fini de sous-groupes quasi-convexes de codimension* 1*.*

On suppose que pour tout élément $g \in G$ d'ordre infini, il existe un translaté hM_i et un entier $n \in \mathbf{Z}$ tels que

$$h\overleftarrow{M}_i \subset g^n h\overleftarrow{M}_i \quad \text{et} \quad h\overrightarrow{M}_i \subset g^{-n} h\overrightarrow{M}_i. \tag{2}$$

Alors G opère proprement sur le complexe cubique dual C.

Esquisse de démonstration. — D'après la proposition 1.9 le groupe G opère cocompactement sur C, il suffit donc de montrer que si s est un sommet de C son stabilisateur G_s dans G est fini. Supposons par l'absurde qu'il existe un élément g d'ordre infini dans G_s ; par hypothèse il correspond à g un translaté hM_i et un entier $n \in \mathbf{Z}$ de sorte que (2) soit vérifiée. Maintenant, il correspond au sommet s un choix de demi-espace pour chaque mur ; supposons par exemple que $\overleftarrow{hM_i}$ est le demi-espace associé au mur hM_i. Puisque pour tout k dans $\mathbf{Z}$ on a $g^k \in G_s$, le demi-espace (dual à s) associé au mur $g^k hM_i$ est $g^k \overleftarrow{hM_i}$. Mais il découle alors de (2) que les demi-espaces $\{g^{nr} \overleftarrow{hM_i} \ : \ r \in \mathbf{Z}\}$ pointent tous dans la même direction et donc qu'une infinité d'entre eux ne contient pas un point donné de C. Ce qui est en contradiction avec le fait que s est un sommet. □

À l'aide de ces deux propositions et du théorème de Kahn et Markovic, on démontre – voir [9] avec Wise ou la thèse [20] de Guillaume Dufour – le résultat suivant.

Théorème 1.11. — *Soit M une variété hyperbolique de dimension 3. Alors $\pi_1 M$ opère géométriquement sur un complexe cubique $CAT(0)$ localement fini C.*

Le complexe cubique C est le complexe dual à une collection finie $H_1, \dots, H_k$ de sous-groupes – isomorphes à des groupes fondamentaux de surfaces – donnés par le théorème 1.3. Les hyperplans de C sont donc en bijection avec les translatés gY_i ($i = 1, \dots, k$, $g \in G$) où $Y_i \subset \mathbf{H}_3$ est le sous-espace convexe H_i-invariant donné par le théorème 1.3. Dans ce contexte, l'analogue de la conjecture 0.2 est la question de l'existence d'un revêtement fini de $G \backslash C$ dans lequel tous les hyperplans sont plongés. Cela motive la notion de complexe cubique *spécial*.

1.5. Complexes cubiques spéciaux

Définition 1.12 (Haglund-Wise). — *Un complexe cubique X connexe à courbure négative ou nulle est* spécial *s'il existe une isométrie locale de X dans le complexe cubique $X_{\mathcal{G}}$ associé à un graphe $\mathcal{G}$. Un groupe G est* spécial *s'il est isomorphe au groupe fondamental d'un complexe cubique compact spécial ; il est* virtuellement spécial *s'il contient un sous-groupe d'indice fini qui est spécial.*

Comme les pathologies d'hyperplans se poussent en avant par une isométrie locale, les hyperplans d'un complexe cubique spécial sont plongés. Haglund et Wise [24, Problem 11.7] ont proposé de déplacer la conjecture de Waldhausen dans le monde cubique. C'est dans ce cadre que se place le travail d'Agol qui démontre plus précisément le résultat suivant, conjecturé par Wise.

Théorème 1.13 (Agol, Conjecture de Wise). — *Soit G un groupe hyperbolique au sens de Gromov qui opère géométriquement sur un complexe cubique $CAT(0)$ localement fini C. Alors G est virtuellement spécial.*

Noter que la notion de complexe cubique spécial est originellement définie en termes de configurations interdites pour les hyperplans immergés :

Proposition 1.14 (Haglund-Wise). — *Un complexe cubique compact X à courbure négative ou nulle est spécial si et seulement si ses hyperplans sont plongés et transversalement orientés et si X ne présente aucune des pathologies d'hyperplans : auto-tangence et inter-tangence (cf. figure 2).*

Esquisse de démonstration. — L'implication directe découle immédiatement du fait que les pathologies d'hyperplans se poussent en avant par une isométrie locale. Pour montrer la réciproque on commence par associer au complexe cubique X un graphe $\mathcal{G}$: les sommets de $\mathcal{G}$ correspondent aux hyperplans de X et deux sommets sont adjacents si et seulement si les hyperplans de X correspondants s'intersectent.[5] Puisque tous les hyperplans de X sont plongés et transversalement orientés il existe une application combinatoire d'« étiquetage » de X vers $X_{\mathcal{G}}$. L'obstruction à ce que cette application soit une isométrie locale en restriction au 2-squelette de X est précisément qu'il y ait des pathologies d'hyperplans — auto-tangence ou inter-tangence — dans X. On conclut alors grâce à un théorème de Gromov qui implique que si une application entre complexes cubiques à courbure négative est une isométrie locale en restriction au 2-squelette, c'est en fait une isométrie locale. □

Ce que l'on a gagné en passant dans le monde cubique devient plus clair lorsque l'on passe à l'étude de la topologie profinie du groupe G.

1.6. Séparabilité et topologie profinie

Définition 1.15 (Topologie profinie). — *Soit G un groupe. La* topologie profinie *de G est la topologie dont les ouverts sont les réunions de classes gG', pour $g \in G$ et $G' \dot{<} G$ un sous-groupe d'indice fini.*[6] *Un sous-ensemble S de G est dit* séparable *si S est fermé dans la topologie profinie de G. Le groupe G est* résiduellement fini *si le singleton constitué de l'élément neutre est fermé dans la topologie profinie de G.*

Noter qu'un groupe spécial est linéaire puisque contenu dans un groupe d'Artin à angles droits ; en particulier un groupe (virtuellement) spécial est résiduellement fini.

En passant au complémentaire dans la définition ci-dessus on retrouve la définition « classique » de séparabilité : *un sous-groupe $H < G$ est* séparable *si*

$$H = \bigcap_{H < G' \dot{<} G} G'.$$

Pour ce qui nous concerne, l'importance de cette notion — mise en évidence par Peter Scott [42] — provient de son interprétation géométrique :

5. Noter que si $X = X_{\mathcal{G}}$, alors la construction ci-dessus redonne le graphe $\mathcal{G}$.

6. À partir de maintenant nous utiliserons la notation bien commode $G' \dot{<} G$, resp. $G' \dot{\triangleleft} G$, pour signifier que G' est un sous-groupe, resp. un sous-groupe distingué, d'*indice fini* dans G. Noter que dans la définition de la topologie profinie on aurait pu prendre comme base d'ouverts les classes gG' avec $g \in G$ et $G' \dot{\triangleleft} G$.

Proposition 1.16. — *Soient X un espace compact, connexe par arcs et localement contractile, de groupe fondamental $G = \pi_1 X$ et H un sous-groupe séparable de G. Soit $\widehat{X} \to X$ le revêtement de X correspondant à H. Alors, pour tout compact $K \subset \widehat{X}$, il existe un revêtement fini $X' \to X$ par lequel $\widehat{X} \to X$ factorise et tel que $\widehat{X} \to X'$ injecte K.*

Appliqué au sous-groupe H image du groupe fondamental d'un espace compact Y par une application géométriquement incompressible $Y \to X$, on obtient le corollaire suivant qui est exactement ce qui manque pour passer du théorème 1.3 à la conjecture de Waldhausen.

Corollaire 1.17. — *Soit $Y \to X$ une application géométriquement incompressible entre espaces compacts, connexes par arcs et localement contractiles. Si $\pi_1 Y$ est séparable dans $\pi_1 X$ alors il existe un revêtement fini $X' \to X$ tel que $Y \to X$ se relève à X' en une injection.*

Pour montrer qu'un sous-groupe est séparable on utilise fréquemment le lemme suivant.

Définition 1.18. — *Soit G un groupe. Un sous-groupe H de G est un* rétract virtuel *s'il existe un sous-groupe $G' \dot{<} G$ contenant H et un morphisme $r : G' \to H$ égal à l'identité en restriction à H.*

Lemme 1.19. — *Soit G un groupe résiduellement fini. Tout rétract virtuel de G est séparable.*

Démonstration. — Soit H un rétract virtuel de G. Quitte à passer à un sous-groupe $G' \dot{<} G$ contenant H, on peut supposer que H est un rétract, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme $r : G \to H$ égal à l'identité en restriction à H. Maintenant si $g \notin H$, alors g est différent de son image $h = r(g)$ dans H. Puisque G est résiduellement fini, on peut donc séparer g et h par deux ouverts O_g et O_h de la topologie profinie de G. Finalement, l'ouvert $O_g \cap r^{-1}(O_h)$ contient g et est disjoint de H. □

Le lien entre complexes cubiques spéciaux et topologie profinie provient du théorème suivant dû à Haglund et Wise [24].

Théorème 1.20. — *Soit G un groupe (hyperbolique) opérant géométriquement et avec quotient spécial sur un complexe cubique CAT(0). Alors, tout sous-groupe convexe-cocompact de G est un rétract virtuel.*

Esquisse de démonstration. — Soit H un sous-groupe convexe cocompact. Il existe une immersion $f : Y \to X$ entre complexes cubiques à courbure négative avec X et Y compacts, spéciaux, $G = \pi_1 X$, $H = \pi_1 Y$ et f isométrie locale. La rétraction algébrique recherchée $r : G' \to H$ est en fait induite par une rétraction cubique $r : X' \to Y$

où X' est un revêtement fini de X obtenu par un procédé de *complétion canonique* [7] $X' = C(Y \to X)$.

L'ensemble des sommets de X' est le produit $Y^{(0)} \times X^{(0)}$. On obtient le 1-squelette de X' à partir du graphe $Y^{(0)} \times X^{(1)}$ par un processus de chirurgie « couper-croiser » : chaque arête de $Y^{(0)} \times X^{(1)}$ est de la forme $[(y,x),(y,x')]$ avec $y \in Y^{(0)}$ et $(x,x') \in X^{(1)}$. Si l'hyperplan dual à l'arête (x,x') de X intersecte une arête $f((y,y'))$ avec $y' \in Y^{(0)}$, on supprime les arêtes $[(y,x),(y,x')]$ et $[(y',x),(y',x')]$ dans $Y^{(0)} \times X^{(1)}$ et on ajoute les arêtes $[(y,x),(y',x')]$ et $[(y',x),(y,x')]$.

Puisque $Y \to X$ est une immersion et que X est spécial, si (y,y') et (y,y'') sont deux arêtes distinctes de Y partageant une même extrémité, les arêtes images $f((y,y'))$ et $f((y,y''))$ ne sont pas duales à un même hyperplan de X. La deuxième projection $Y^{(0)} \times X^{(0)} \to X$ se prolonge donc en un revêtement $X'^{(1)} \to X^{(1)}$. En utilisant que X est spécial on vérifie ensuite qu'il n'y a qu'une seule manière d'ajouter des carrés à $X'^{(1)}$ de manière à obtenir un revêtement $X'^{(2)} \to X^{(2)}$. Finalement $X'^{(2)}$ détermine un unique complexe cubique CAT(0) ; c'est un revêtement de X et la première projection $Y^{(0)} \times X^{(0)} \to Y$ s'étend en une rétraction $X \to Y$. □

Les complexes cubiques spéciaux sont donc les bons objets pour démontrer géométriquement des théorèmes de séparabilité. En particulier, le théorème 1.13 implique que les sous-groupes de surfaces donnés par le théorème de Kahn et Markovic sont séparables. On peut donc appliquer le corollaire 1.17 aux surfaces immergées correspondantes pour obtenir le théorème 0.3 (la conjecture de Waldhausen). On obtient en fait immédiatement bien plus :

Théorème 1.21. — *Soit G un groupe hyperbolique non élémentaire et virtuellement spécial. Alors G possède un sous-groupe d'indice fini qui se surjecte sur un groupe libre non élémentaire.*

Démonstration. — Quitte à passer à un sous-groupe d'indice fini, on peut supposer que G est spécial. Le théorème précédent implique donc que tout sous-groupe quasi-convexe de G est un rétract virtuel. Mais, puisque G est hyperbolique et non élémentaire, il contient un sous-groupe quasi-convexe H qui est libre et non élémentaire. Finalement le groupe H est quotient d'un sous-groupe d'indice fini de G. □

2. HIÉRARCHIES QUASI-CONVEXES ET GROUPES VIRTUELLEMENT SPÉCIAUX

Dans cette section et la suivante on décrit les résultats profonds que Wise obtient sur la structure des groupes virtuellement spéciaux. Le lecteur plus directement intéressé

7. Procédé qui généralise au cas des complexes cubiques spéciaux le principe de la démonstration, par Marshall Hall [27] puis John Stallings [43], de la résiduelle finitude des groupes libres.

par la démonstration du théorème 1.13 peut sauter ces deux sections et prendre comme « boîte noire » les résultats qui seront utilisés dans la section 4.

2.1. Combinaisons de complexes cubiques spéciaux

Il découle du théorème 1.20 que les complexes cubiques spéciaux possèdent beaucoup de revêtements finis. À ce titre le théorème suivant – démontré par Haglund et Wise dans [25] – est particulièrement important puisqu'il permet de propager cette propriété par amalgame (ou construction HNN).

Soit G un groupe hyperbolique. Un sous-groupe H de G est dit *malnormal* si pour tout élément $g \in G - H$, l'intersection $H^g \cap H$ est triviale. Ici $H^g = gHg^{-1}$.

Théorème 2.1 (Haglund-Wise). — *Soient A, B et C des complexes cubiques compacts avec $\pi_1 A$ et $\pi_1 B$ hyperboliques et soient $C \to A$ et $C \to B$ des isométries locales telles que $\pi_1 C$ soit quasi-convexe et malnormal dans $\pi_1 A$ et $\pi_1 B$. Soit $X = A \cup_C B$ le complexe cubique obtenu en collant A et B avec $C \times [-1, 1]$. Supposons A et B spéciaux. Alors le complexe cubique X possède un revêtement fini qui est spécial.*

Esquisse de démonstration. — La stratégie est de montrer que les sous-groupes quasi-convexes de $\pi_1 X$ sont séparables. D'après la proposition 1.16 cela suffit en effet à montrer que les hyperplans d'un revêtement fini de X sont tous plongés et transversalement orientés ; de la même manière cela permet de lever les pathologies d'hyperplans – auto-tangence et inter-tangence – dans des revêtements finis. Le théorème découle alors de la proposition 1.14.

Partant de revêtements finis (quelconques) de A et B, l'étape principale consiste à montrer que ces revêtements admettent eux-mêmes des revêtements finis qui sont galoisiens au-dessus de A et B et se restreignent en un même revêtement au-dessus de C. La construction est un mélange de produits fibrés et de complétion canonique. En procédant comme dans la démonstration du théorème 1.20, on peut en effet étendre n'importe quel revêtement fini de C en un revêtement fini de A, resp. B. Cependant un tel revêtement n'est *a priori* pas galoisien. En particulier les différentes élévations de C correspondent à des revêtements différents de C. C'est là que la malnormalité entre en jeu : le fait que $\pi_1 C$ soit malnormal dans $\pi_1 A$, resp. $\pi_1 B$, permet de montrer que la projection par transport parallèle, ou « wall projection », de C sur A, resp. B, est homotopiquement triviale. On peut alors passer à un revêtement fini supplémentaire tout en contrôlant l'effet sur chaque élévation de C. Finalement on assemble les revêtements de A et B le long des élévations de C pour obtenir un revêtement fini de X. $\square$

Remarque 2.2. — Il n'est même pas évident que $\pi_1 X$ soit résiduellement fini – ni même qu'il possède un quotient fini non trivial – comme le montrent les exemples de Marc Burger et Shahar Mozes [13] de groupes simples opérant géométriquement sur un produit d'arbres.

2.2. Hiérarchies quasi-convexes

Définition 2.3 (Hiérarchie quasi-convexe). — *On note* QVH *la plus petite collection de groupes hyperboliques qui contient* $\{1\}$ *et est stable par opérations suivantes :*

1. *si* $G = A *_C B$*, avec* C *sous-groupe, de type fini, quasi-convexe dans* G *et* $A, B \in$ QVH*, alors* $G \in$ QVH *;*
2. *si* $G = A*_B$*, avec* B *sous-groupe, de type fini, quasi-convexe dans* G *et* $A \in$ QVH*, alors* $G \in$ QVH *;*
3. *si* G *contient un sous-groupe d'indice fini* H *tel que* $H \in$ QVH*, alors* $G \in$ QVH*.*

Remarque 2.4. — 1. La classe QVH est une généralisation de la classe des groupes fondamentaux de 3-variétés hyperboliques virtuellement Haken relativement à une surface quasi-convexe.

2. Si G est un groupe hyperbolique qui opère géométriquement avec quotient spécial sur un complexe cubique CAT(0) localement fini C, les stabilisateurs d'hyperplans (qui sont plongés dans le quotient $G\backslash C$) sont quasi-convexes et induisent une hiérarchie quasi-convexe. En particulier tout groupe hyperbolique virtuellement spécial appartient à la classe QVH. Le principal résultat de la prépublication [48] est la démonstration de la réciproque :

Théorème 2.5 (Wise). — *Soit* G *un groupe hyperbolique. Le groupe* G *est virtuellement spécial si et seulement si* $G \in$ QVH*.*

La démonstration du théorème 2.5 est longue et technique. Commençons par décrire les résultats que Wise avait précédemment obtenus avec ses co-auteurs, Frédéric Haglund d'un côté et Tim Hsu d'un autre.

2.3. Hiérarchies quasi-convexes presque malnormales

Soit G un groupe hyperbolique. Un sous-groupe H de G est *presque malnormal* si, pour tout élément $g \in G - H$, l'intersection $H^g \cap H$ est finie.

Définition 2.6. — *On note* QMVH *la plus petite collection de groupes qui contient* $\{1\}$ *et est stable par opérations suivantes :*

1. *si* $G = A *_C B$*, avec* C *sous-groupe, de type fini, quasi-convexe et presque malnormal dans* G *et* $A, B \in$ QMVH*, alors* $G \in$ QMVH *;*
2. *si* $G = A*_B$*, avec* B *sous-groupe, de type fini, quasi-convexe et presque malnormal dans* G *et* $A \in$ QMVH*, alors* $G \in$ QMVH *;*
3. *si* G *contient un sous-groupe d'indice fini* H *tel que* $H \in$ QMVH*, alors* $G \in$ QMVH*.*

Le théorème suivant, théorème 11.2 de [48], s'obtient par récurrence à partir du théorème 2.1 et du théorème de Hsu-Wise [29] selon lequel : *un produit amalgamé* $G = A *_C B$*, avec* G *hyperbolique,* A *et* C *virtuellement spéciaux et* C *malnormal et quasi-convexe dans* G*, opère géométriquement sur un complexe cubique* $CAT(0)$*.*

Théorème 2.7. — *Un groupe G appartient à la classe* QMVH *si et seulement si G est hyperbolique et virtuellement spécial.*

Remarque 2.8. — Il découle du théorème de combinaison de Mladen Bestvina et Mark Feighn [11] qu'un groupe G dans la classe QMVH est hyperbolique.

2.4. Stratégie de démonstration du théorème 2.5

Considérons, pour simplifier, le cas où

$$G = A *_C B$$

avec A, B virtuellement spéciaux et C quasi-convexe dans G. On veut montrer que G est virtuellement spécial. Très grossièrement, la stratégie consiste à se ramener au théorème 2.7 par récurrence sur la hauteur de C.

Définition 2.9 (Hauteur). — *Des éléments $g_1, \ldots, g_n \in G$ sont dits* essentiellement distincts *si $g_i H \neq g_j H$ pour $i \neq j$. On dit alors que les conjugués $H^{g_1}, \ldots, H^{g_n}$ sont* essentiellement distincts*. La* hauteur *de H dans G, notée* hauteur$(H < G)$*, est le plus grand entier naturel n tel qu'il existe n conjugués essentiellement distincts $H^{g_1}, \ldots, H^{g_n}$ tels que l'intersection $H^{g_1} \cap \ldots \cap H^{g_n}$ soit infinie.*

Un sous-groupe H est donc de hauteur 0 (resp. 1) dans G si et seulement si H est fini (resp. presque malnormal).

Rita Gitik, Mahan Mitra, Eliyahu Rips et Sageev [21] montrent que si H est un sous-groupe quasi-convexe d'un groupe hyperbolique G alors

$$\text{hauteur}(H < G) < +\infty.$$

Ils montrent en fait plus généralement que H est de *taille* finie dans G, c'est-à-dire qu'il existe un entier k tel que parmi k conjugués essentiellement distincts de H deux au moins sont d'intersection finie. La notion de taille est une version algébrique de la propriété des k-plans de Scott, qui dit que parmi k élévations distinctes d'une surface immergée dans une 3-variété à son revêtement universel, au moins deux sont disjointes. En particulier, les surfaces quasi-fuchsiennes d'une 3-variété hyperbolique ont la propriété des k-plans pour un certain k.

Supposons d'abord C séparable *dans G.* — Si C est de hauteur ≤ 1 alors C est malnormal et le théorème 2.7 implique le théorème 2.5.

En général la taille de C est finie et il existe un ensemble fini maximal de conjugués essentiellement distincts $C, C^{g_1}, \ldots, C^{g_k}$ tels que

$$|C \cap C^{g_i}| = \infty, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Puisque C est séparable dans G, il existe un sous-groupe G' distingué et d'indice fini dans G tel que

$$g_i \notin G', \quad i = 1, \ldots, k.$$

Le groupe G' est le groupe fondamental d'un graphe de groupes dont les groupes de sommets sont isomorphes à $A \cap G'$ ou $B \cap G'$ et les groupes d'arêtes sont isomorphes à $C \cap G'$. Mais maintenant les groupes d'arêtes sont *presque malnormaux*. Le théorème 2.7 implique donc encore le théorème 2.5.

Cas général. — Bien sûr on ne sait pas *a priori* que le groupe C est séparable dans G. C'est même toute la difficulté du problème. On contourne cette difficulté en raisonnant par récurrence sur la hauteur ; il s'agit de construire des quotients infinis dans lesquels C se projette sur un groupe de hauteur strictement plus petite. La stratégie usuelle pour construire des quotients infinis est la théorie de la petite simplification. Wise [48] en développe un analogue cubique ; dans la section suivante on adopte un point de vue plus géométrique.

3. PETITE SIMPLIFICATION ET QUOTIENT DE GROUPES SPÉCIAUX

3.1. Petite simplification géométrique

On suit ici la présentation donnée par Vincent Guirardel [23] de la théorie de Thomas Delzant et Gromov [18] et des travaux de Rémi Coulon [16]. Soit X un espace métrique δ-hyperbolique pour une certaine constante $\delta > 0$. Soit G un groupe qui opère sur X par isométries. On considère une famille G-invariante $\mathcal{Q}$ de sous-espaces *presque convexes* [(8)] $Q \subset X$ et une famille correspondante $\mathcal{R} = (R_Q)_{Q \in \mathcal{Q}}$ de sous-groupes de G tels que R_Q préserve Q et l'application $Q \mapsto R_Q$ est G-équivariante : $R_{gQ} = gR_Qg^{-1}$.

La théorie de la petite simplification repose sur deux hypothèses de départ : un grand rayon d'injectivité de la famille $\mathcal{R}$ et une petite constante de poursuite dans $\mathcal{Q}$. Le *rayon d'injectivité* de la famille $\mathcal{R}$ est l'infimum $\mathrm{inj}(\mathcal{R})$ des

$$\mathrm{inj}(R_Q) = \inf\{d(x, gx) \mid x \in Q,\ g \in R_Q - \{1\}\}$$

pour $Q \in \mathcal{Q}$. La *constante de poursuite* dans $\mathcal{Q}$ est par définition

$$\Delta(\mathcal{Q}) = \sup\{\mathrm{diam}(Q_1^{+20\delta} \cap Q_2^{+20\delta}) \mid Q_1 \neq Q_2 \in \mathcal{Q}\},$$

où l'on note Q^{+r} le r-voisinage de Q dans X.

Définition 3.1. — *La donnée* $(\mathcal{Q}, \mathcal{R})$ *est à* (A, ε)-petite simplification *si on a :*

1. *un grand rayon d'injectivité :* $\mathrm{inj}(\mathcal{R}) \geq A\delta$, *et*
2. *une constante de poursuite petite par rapport au rayon d'injectivité :* $\Delta(\mathcal{Q}) \leq \varepsilon \mathrm{inj}(\mathcal{R})$.

Théorème 3.2 (Gromov). — *Il existe des constantes* A_0 *et* ε_0 *telles que, si* $(\mathcal{Q}, \mathcal{R})$ *est une donnée à* (A_0, ε_0)*-petite simplification, les propriétés suivantes sont vérifiées.*

8. C'est-à-dire que pour tous $x, y \in Q$, il existe $x', y' \in Q$ tels que $d(x, x') \leq 8\delta$, $d(y, y') \leq 8\delta$, $[x, x'] \cup [x', y'] \cup [y', y] \subset Q$.

1. *Le sous-groupe normal* $\langle\langle\mathcal{R}\rangle\rangle$ *engendré par* $\mathcal{R}$ *— égal à* $\langle\langle R_Q \mid Q \in \mathcal{Q}\rangle\rangle$ *— est un produit libre (infini) d'une sous-famille de la famille* $\mathcal{R}$.
2. *Pour tout* $Q \in \mathcal{Q}$ *le quotient* $\mathrm{Stab}_G(Q)/R_Q$ *s'injecte dans le quotient* $\bar{G} = G/\langle\langle\mathcal{R}\rangle\rangle$.
3. *Les éléments de petite longueur de translation survivent au quotient : il existe une constante* $C = C(A, \varepsilon)$ *telle que tout élément de* G *non trivial et dont la longueur de translation est inférieure à* $C\delta$ *se projette sur un élément non trivial dans* $\bar{G}$.
4. *Le groupe* $\bar{G}$ *opère naturellement sur un espace hyperbolique* $\bar{X}$. *Si on suppose de plus que* G *opère géométriquement sur* X, *que le quotient* $G\backslash\mathcal{Q}$ *est fini et que chaque* R_Q *est d'indice fini dans* $\mathrm{Stab}_G(Q)$, *alors l'action de* $\bar{G}$ *sur* $\bar{X}$ *est géométrique.*

L'espace $\bar{X}$ est le quotient $\langle\langle\mathcal{R}\rangle\rangle\backslash\dot{X}$ d'un espace hyperbolique $\dot{X}$ obtenu en attachant à X des cônes hyperboliques $C(Q)$ le long de chaque $Q \in \mathcal{Q}$.

Dans le paragraphe suivant on explique comment utiliser le théorème 3.2 pour former des quotients spéciaux de groupes spéciaux.

3.2. Remplissages de Dehn et quotients de groupes spéciaux par des sous-groupes malnormaux

Définition 3.3. — *Soient* $H_1, \dots, H_m$ *des sous-groupes d'un groupe* G. *On dit que les* H_i *forment une* collection presque malnormale *si*

$$|H_i^g \cap H_j| = \infty \Rightarrow (i = j \ \text{ et } g \in H_i).$$

Soit G un groupe hyperbolique et soit $\{H_1, \dots, H_m\}$ une collection presque malnormale de sous-groupes quasi-convexes. On appelle *remplissage de Dehn* de G un quotient

$$\bar{G} = G/\langle\langle N_1, \dots, N_m\rangle\rangle,$$

où chaque $N_i \dot{\triangleleft} H_i$.

Le groupe G opère géométriquement sur un espace métrique δ-hyperbolique X. À chaque sous-groupe (quasi-convexe) H_i on associe son enveloppe convexe Q_i dans X. Quitte à épaissir Q_i, on peut supposer que les Q_i sont presque convexes. On considère alors la famille

$$\mathcal{Q} = \{gQ_i \mid i = 1, \dots, m,\ g \in G\}.$$

Il découle de la presque malnormalité des groupes H_i que la constante de poursuite $\Delta(\mathcal{Q})$ est finie. Étant donnés des sous-groupes $N_i \dot{<} H_i$ on peut former la famille

$$\mathcal{R} = \{gN_ig^{-1} \mid i = 1, \dots, m,\ g \in G\}.$$

Pour que le théorème 3.2 s'applique, il suffit que le rayon d'injectivité $\mathrm{inj}(\mathcal{R})$ soit suffisamment grand. C'est le cas si le remplissage de Dehn est *suffisamment long*, c'est-à-dire s'il existe un sous-ensemble fini $B \subset G$ suffisamment grand tel que pour tout $i = 1, \dots, m$, on ait $B \cap N_i = \emptyset$. La donnée $(\mathcal{Q}, \mathcal{R})$ est alors à (A_0, ε_0)-petite simplification. En particulier le groupe quotient $\bar{G}$ est hyperbolique et opère géométriquement sur un espace hyperbolique $\bar{X}$. On peut être plus précis sur le quotient. C'est l'objet du « théorème de remplissage de Dehn » de Denis Osin [38] dont on n'énonce qu'un cas particulier.

Théorème 3.4 (Remplissage de Dehn). — *Soient G un groupe hyperbolique et $\{H_1,\ldots,H_m\}$ une collection presque malnormale de sous-groupes quasi-convexes, tous contenus dans un même sous-groupe quasi-convexe $H \subset G$. Soit $F \subset G$ un sous-ensemble fini. Alors, pour tout remplissage de Dehn $\phi : G \to \bar{G} = G(N_1,\ldots,N_m)$ suffisamment long, on a :*

1. $\phi(H_i) = H_i/N_i$, $i = 1,\ldots,m$;
2. $\bar{G}$ *est hyperbolique ;*
3. $\phi_{|F}$ *est injective ;*
4. $\phi(F) \cap \phi(H_i) = \phi(F \cap H_i)$;
5. $\phi(H)$ *est quasi-convexe dans* $\bar{G}$.

On renvoie à [23] pour plus de détails sur la réduction au théorème 3.2. On renvoie enfin aux articles [4, 34] pour une démonstration de la dernière assertion.

Wise utilise la théorie de la petite simplification — dans une version cubique que nous ne détaillons pas ici — pour démontrer que si l'on part d'un groupe virtuellement spécial alors tout remplissage de Dehn suffisamment long est encore virtuellement spécial. C'est le résultat technique principal de [48] ; sa démonstration occupe une grande partie de la longue prépublication. On se contente ici de grossièrement expliquer la structure de l'argument de Wise dans le langage de la petite simplification géométrique.

Théorème 3.5 (Wise). — *Soient G un groupe hyperbolique virtuellement spécial et $\{H_1,\ldots,H_m\}$ une collection presque malnormale de sous-groupes quasi-convexes. Il existe alors des sous-groupes $\dot{H}_i \dot{\lhd} H_i$ tels que, pour tous sous-groupes $H_i' < \dot{H}_i$, $i = 1,\ldots,m$, le groupe quotient*

$$\bar{G} = G/\langle\langle H_1',\ldots,H_m'\rangle\rangle$$

est hyperbolique et virtuellement spécial.

Exemple 3.6. — Comme cas particulier de ce théorème on notera que si

$$\langle a_1,\ldots,a_s \big| w_1,\ldots,w_r\rangle$$

est un groupe de présentation finie, il existe des entiers $n_1,\ldots,n_r$ tels que pour tout entier $k \geq 1$, le groupe

$$\langle a_1,\ldots,a_s \big| w_1^{kn_1},\ldots,w_r^{kn_r}\rangle$$

est hyperbolique et virtuellement spécial (en particulier résiduellement fini).

Grandes idées de la démonstration [9]. — Le groupe G opère géométriquement (et spécialement) sur un complexe cubique CAT(0) localement fini X ; vu comme espace métrique X est en particulier δ-hyperbolique. Comme ci-dessus il correspond aux sous-groupes H_i

9. L'approche suivie ici m'a été expliquée par Vincent Guirardel.

une famille $\mathcal{Q}$ et à toute famille de sous-groupes $H_i' \dot{<} H_i$ une famille $\mathcal{R}$. Mais cette fois les groupes H_i – comme sous-groupes quasi-convexes d'un groupe virtuellement spécial – sont virtuellement spéciaux et donc résiduellement finis. Pour tout $i = 1, \ldots, m$ il existe donc un sous-groupe $\dot{H}_i \dot{\lhd} H_i$ qui évite tous les éléments dont la longueur de translation est trop petite. De cette manière, on peut s'arranger pour que, pour tous sous-groupes $H_i' \dot{<} \dot{H}_i$, $i = 1, \ldots, m$, la donnée $(\mathcal{Q}, \mathcal{R})$ soit à (A_0, ε_0)-petite simplification. En particulier le groupe quotient $\bar{G}$ est hyperbolique et opère géométriquement sur un espace hyperbolique $\bar{X}$. Pour montrer que G est virtuellement spécial une première étape serait de construire suffisamment de murs quasi-convexes dans $\bar{X}$ pour pouvoir appliquer les propositions 1.9 et 1.10 et ainsi obtenir une action géométrique sur le complexe cubique CAT(0) localement fini C dual à ces murs.

En pratique, une manière de construire des murs s'impose : tout hyperplan de X s'étend en un « hyperplan » $\dot{H} \subset \dot{X}$ (en collant les cônes hyperboliques sur les $H \cap Q$). Maintenant, on peut trouver un sous-groupe $G_1 \dot{\lhd} G$ tel que la distance entre un hyperplan $H \subset X$ et ses G_1-translatés soit arbitrairement grande. En particulier, pour un bon choix de G_1, la composante connexe de $G_1 \cdot \dot{H}$ contenant $\dot{H}$ se projette sur un sous-espace séparant et quasi-convexe dans $\bar{X} = \langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle \backslash \dot{X}$. On obtient ainsi un système de murs dans $\bar{X}$ et la proposition 1.9 implique que $\bar{G}$ opère avec quotient compact sur le complexe cubique CAT(0) localement fini C dual à ce système de murs. Reste qu'il n'est pas évident que cette action soit géométrique ; on peut néanmoins montrer que les stabilisateurs de sommets sont virtuellement libres. Cela n'est pas suffisant pour montrer que $\bar{G}$ opère géométriquement sur C mais Wise suit un chemin détourné : on peut en effet montrer qu'il existe $\bar{G}_1 \dot{\lhd} \bar{G}$ tel que

- les stabilisateurs dans $\bar{G}_1$ d'hyperplans de C sont presque malnormaux et quasi-convexes, et
- tout hyperplan est disjoint de ses $\bar{G}_1$-translatés.

Au final tout cela implique que le groupe $\bar{G}$ est dans QMVH et le théorème découle du théorème 2.7. □

3.3. Un théorème de séparation faible

Le point de départ de la démonstration du théorème 1.13 est le « théorème de séparation faible » suivant, démontré par Agol, Daniel Groves et Jason Manning dans l'appendice à [3].

THÉORÈME 3.7. — *Soient G un groupe hyperbolique et H un sous-groupe quasi-convexe virtuellement spécial. Pour tout élément $g \in G - H$, il existe un quotient $\varphi : G \to \mathcal{G}$ tel que $\varphi(g) \notin \varphi(H)$ et $\varphi(H)$ est fini.*

Noter que le groupe H est séparable si et seulement si on peut prendre $\mathcal{G}$ fini (ce que ne dit pas le théorème !).

Grandes idées de la démonstration. — Si on suppose de plus que H est presque malnormal le théorème 3.4 implique le théorème 3.7 (noter que H est virtuellement spécial et donc résiduellement fini ; on peut donc choisir un remplissage de Dehn de sorte que le théorème 3.4 s'applique).

On démontre le cas général par récurrence sur la hauteur de H dans G. On peut penser au cas où H est un sous-groupe de surface dans le groupe fondamental d'une variété hyperbolique compacte de dimension 3 et où chaque intersection infinie $H \cap H^g$ correspond à deux élévations distinctes de la surface dans $\mathbf{H}_3$ qui s'intersectent selon une géodésique. On peut alors considérer la famille des sous-groupes cycliques infinis dans G qui stabilisent ces géodésiques. À conjugaison près on obtient une famille finie et presque malnormale. Appliquer un remplissage de Dehn à cette famille fait décroître la hauteur. Le cas général est similaire : le groupe H étant de hauteur finie dans G, il lui correspond une famille finie et presque malnormale de sous-groupes quasi-convexes dans G appelée *enveloppe malnormale* de H dans G et à laquelle on peut appliquer le théorème 3.4. C'est possible car le groupe H — étant virtuellement spécial — est résiduellement fini et donc chacun des sous-groupes de son enveloppe malnormale — étant une extension finie d'un sous-groupe de H — est encore résiduellement fini. On obtient ainsi $\bar{H}$ et $\bar{G}$ tels que hauteur$(\bar{H} < \bar{G}) <$ hauteur$(H < G)$. Le problème est que pour perpétuer la récurrence, on a besoin que $\bar{H}$ soit résiduellement fini. C'est ce que garantit le théorème 3.5. $\square$

Au sujet de la démonstration du théorème 2.5. — Pour conclure on explique comment Wise démontre le théorème 2.5. Pour simplifier on ne considère que le cas d'un produit amalgamé $G = A *_C B$. Il s'agit donc de montrer que si C est quasiconvexe dans G et A et B sont virtuellement spéciaux, alors G est encore virtuellement spécial. On a déjà fait remarquer qu'il suffit de montrer que C est séparable dans G. Dans le paragraphe qui suit nous expliquons comment montrer que C est séparable à l'aide de remplissages de Dehn.

Soit $g \in G - C$. Puisque C est résiduellement fini, le théorème 3.4 et la démonstration du théorème 3.7 impliquent qu'il existe un morphisme $\phi : G \to \bar{G}$ tel que

– le groupe $\bar{G}$ est hyperbolique,
– le groupe $\bar{C} = \phi(C)$ est fini et ne contient pas $\phi(g)$,
– les morphismes restreints

$$\phi_{|A} : A \to \bar{A} \text{ et } \phi_{|B} : B \to \bar{B}$$

sont des remplissages.

De plus quitte à remplacer ϕ par un remplissage plus long, on peut supposer que les groupes $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont virtuellement spéciaux. Le produit amalgamé $\bar{A} *_{\bar{C}} \bar{B}$ est alors un quotient de G. Mais maintenant $\bar{C}$ est fini et donc presque malnormal. Le théorème 2.7 s'applique donc pour conclure que $\bar{G}$ est virtuellement spécial et donc résiduellement fini. On peut ainsi séparer $\phi(g)$ du groupe fini $\bar{C}$ dans un quotient fini. Le groupe C est donc séparable dans G.

4. DÉMONSTRATION DE LA CONJECTURE DE WISE

Soit G un groupe hyperbolique qui opère géométriquement sur un complexe cubique CAT(0) localement fini C. Si G est sans torsion le quotient $X = G\backslash C$ est un complexe cubique à courbure négative ou nulle ; en général on y pense comme à une « orbifold » cubique.

4.1. Un complexe cubique à hyperplans compacts

Par récurrence (sur la dimension maximale d'un cube) on peut supposer que chaque stabilisateur d'hyperplan dans G est virtuellement spécial.

Par quasi-convexité des stabilisateurs d'hyperplans, il existe en outre un réel R strictement positif tel que : *si W et W' sont deux hyperplans de C à distance $d(W, W') > R$ dans C alors $|G_W \cap G_{W'}| < +\infty$.* Dans la suite on fixe un tel R.

La première étape consiste à construire un revêtement *a priori* infini $\mathcal{X} \to X$ de groupe d'automorphisme $\mathcal{G}$ et tel que dans $\mathcal{X}$ tous les hyperplans soient compacts et plongés. C'est une application du théorème de séparation faible selon le principe de la proposition 1.16 étendue au cas de quotients infinis : si W est un hyperplan de C dont la projection dans X s'auto-intersecte en exactement un point, il correspond à ce point un élément $g \notin G_W$ — en fait une double classe non-triviale $G_W g G_W$ — tel que gW intersecte W. Mais il découle du théorème 3.7 appliqué au groupe $H = G_W$ qu'il existe un quotient $\phi : G \to \mathcal{G}$ avec $\phi(g) \notin \phi(G_W)$ et $\phi(G_W)$ fini. Dans le revêtement $\mathcal{X}$ associé au noyau de ϕ la projection de W est encore compacte mais elle est maintenant plongée. Le cas général se traite de la même manière : le revêtement $\mathcal{X}$ est obtenu comme quotient $K\backslash C$, où K est le noyau d'un quotient infini $G \to \mathcal{G}$ fourni par le théorème 3.7 appliqué un nombre fini de fois à des groupes H isomorphes au produit libre de G_{W_i}, où les W_i forment un ensemble de représentants des G-classes d'hyperplans dans C. On peut en outre supposer que, pour tout hyperplan W de C, la projection de revêtement $C \to \mathcal{X}$ induit un plongement

$$W^{+R}/(G_W \cap K) \to \mathcal{X}.$$

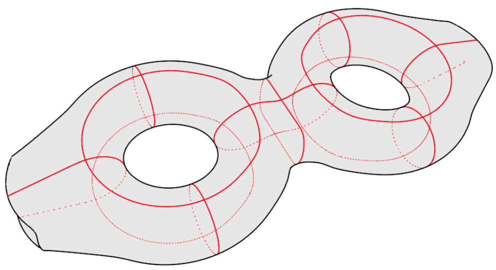

FIGURE 3. Germe d'une surface cubique non compacte dont tous les hyperplans sont compacts

On fixe $\mathcal{X}$ dans toute la suite de la démonstration ; le groupe $\mathcal{G}$ opère cocompactement sur $\mathcal{X}$ et

$$\mathcal{G}\backslash\mathcal{X} = X = G\backslash C.$$

Tous les hyperplans de $\mathcal{X}$ sont compacts et localement séparants. Ils découpent la première subdivision barycentrique $\dot{\mathcal{X}}$ en *polyèdres cubiques*, c'est-à-dire en complexes cubiques CAT(0) localement finis P dont un sommet $v \in P^{(0)}$ est contenu dans tout cube maximal de P. Soient $\mathbf{P}(\mathcal{X})$ l'ensemble des polyèdres cubiques ainsi obtenus et $\{P_1, \ldots, P_p\}$ un choix de représentants des $\mathcal{G}$-classes d'équivalences de ces polyèdres cubiques. On appelle *face* F d'un polyèdre $P \in \mathbf{P}(\mathcal{X})$ toute intersection (maximale) non vide de P avec un hyperplan W de $\mathcal{X}$; on note $W(F) = W$ l'hyperplan qui supporte une face.

Figure 4. Subdivision barycentrique cubique et polyèdre cubique

Il s'agit maintenant de construire un revêtement – un revêtement « orbifold » si G a de la torsion – de $X = G\backslash C$ en recollant un nombre fini de polyèdres de $\mathbf{P}(\mathcal{X})$ le long de leurs faces, de sorte que les hyperplans de ce revêtement soient plongés. Pour cela on pense à la réunion des polyèdres de $\mathbf{P}(\mathcal{X})$ comme au résultat d'un découpage selon une hiérarchie.

4.2. Hiérarchies cubiques

Soit $\Gamma(\mathcal{X})$ le graphe dont les sommets sont les hyperplans de $\mathcal{X}$ et dont deux sommets W, W' sont liés par une arête si et seulement si $d(W, W') \leq R$. On a une action naturelle de $\mathcal{G}$ sur $\Gamma(\mathcal{X})$.

Le graphe $\Gamma(\mathcal{X})$ est de valence bornée ; fixons un entier k strictement supérieur à la valence de $\Gamma(\mathcal{X})$. Un *k-coloriage* de $\Gamma(\mathcal{X})$ est une application

$$c : \mathrm{Sommet}(\Gamma(\mathcal{X})) \to \{1, \ldots, k\}$$

telle que, pour toute arête (W, W') de $\Gamma(\mathcal{X})$, on a : $c(W) \neq c(W')$. On note $C_k(\mathcal{X})$ l'ensemble des k-coloriages que l'on munit de la restriction de la topologie produit sur $\{1, \ldots, k\}^{\mathrm{Sommet}(\Gamma(\mathcal{X}))}$.

À tout k-coloriage $c \in C_k(\mathcal{X})$, il correspond une *hiérarchie* : on coupe d'abord $\dot{\mathcal{X}}$ selon les hyperplans coloriés par 1, puis selon ceux coloriés par 2, *etc.* Étant donnés un coloriage c et un hyperplan W de $\mathcal{X}$ on raffine la couleur $c(W)$ de W en une *supercouleur* définie inductivement : si $c(W) = j$ on veut aussi se « souvenir » des découpages de W induits par les hyperplans coloriés par une couleur $< j$ ainsi que de leurs supercouleurs.

DÉFINITION 4.1. — *Soit* W *un hyperplan de* $\mathcal{X}$. *Une* supercouleur *sur* W *est une classe d'équivalence* $[c] \in C_k(\mathcal{X})/\simeq_W$ *où* $\simeq_W$ *est telle que*

$$c_1 \simeq_W c_2 \Rightarrow c_1(W) = c_2(W)$$

et définie par le procédé récursif suivant :

1. $c_1 \simeq_W c_2$ *si* $c_1(W) = c_2(W) = 1$,
2. $c_1 \simeq_W c_2$ *si* $c_1(W) = c_2(W) = c > 1$ *et, pour tout hyperplan* W' *tel que* $(W, W') \in$ Arête$(\Gamma(\mathcal{X}))$, *on a* $c_1 \simeq_{W'} c_2$ *si* $c_1(W') < c$ *ou* $c_2(W') < c$.

Étant donné un polyèdre cubique $P \in \mathbf{P}(\mathcal{X})$, un *supercoloriage* de P est une classe d'équivalence $[c] \in C_k(\mathcal{X})/\simeq_P$ où $c_1 \simeq_P c_2$ si, pour toute face F de P, on a $c_1 \simeq_{W(F)} c_2$. De la même manière un supercoloriage d'une face F de P est une supercouleur sur $W(F)$.

Soit

$$\mathcal{P} = \{(P_j, [c]) \ : \ j = 1, \ldots, p, \ [c] \in C_k(\mathcal{X})/\simeq_{P_j}\}$$

un ensemble (fini) de classes de $\mathcal{G}$-équivalence de polyèdres supercoloriés. De même on fixe $\mathcal{F}$ un ensemble de classes de $\mathcal{G}$-équivalence de faces supercoloriées.

4.3. Recollement (virtuel) de la hiérarchie

On fixe un choix d'orientation pour chaque élément de $\mathcal{P}$ et un choix de co-orientation pour chaque élément de $\mathcal{F}$. Il correspond à ces choix un opérateur de bord

$$\partial : \mathbf{R}[\mathcal{P}] \to \mathbf{R}[\mathcal{F}]$$

qui à un polyèdre supercolorié associe la somme signée des classes de $\mathcal{G}$-équivalence de ses faces supercoloriées, où chaque signe est ± 1 selon que la co-orientation induite par le polyèdre coïncide ou non avec la co-orientation de la face. On dit qu'un vecteur $\omega \in \mathbf{R}[\mathcal{P}]$ vérifie les *équations de recollement* si $\partial\omega = 0$.

On repousse à la section 4.4 la démonstration du théorème suivant.

THÉORÈME 4.2. — *Il existe un vecteur* $\omega \in \mathbf{N}[\mathcal{P}]$ *non nul qui vérifie les équations de recollement.*

On explique maintenant comment reconstruire un complexe cubique compact à partir de la solution ω.

Pour tout $j = 1, \ldots, p$ et pour tout supercoloriage $[c] \in C_k(\mathcal{X})/\simeq_{P_j}$, on se donne $\omega(P_j, c)$ copies du polyèdre cubique P_j avec son supercoloriage $[c]$. On note $\mathcal{V}_k$ le complexe cubique obtenu comme réunion disjointe de tous ces polyèdres.

On commence par former un complexe cubique $\mathcal{V}_{k-1}$ en recollant les polyèdres de $\mathcal{V}_k$ le long de faces F de même supercouleur $[c]$ telle que $c(W(F)) = k$. Puisque ω vérifie les équations de recollement, une classe de face supercoloriée intervient en effet autant de fois comme face d'un polyèdre de $\mathcal{V}_k$ avec une co-orientation donnée qu'avec la co-orientation opposée.

À l'issue de cette première étape on obtient un complexe cubique « à bord » réunion de faces des polyèdres de $\mathcal{V}_{k-1}$. Chacune de ces faces a une couleur (strictement inférieure à k) ; on note $\partial_{k-1}\mathcal{V}_{k-1}$ la réunion des faces de couleur $k-1$. Comme pour la première étape on voudrait maintenant recoller $\mathcal{V}_{k-1}$ le long de $\partial_{k-1}\mathcal{V}_{k-1}$ mais il n'y a cette fois plus aucune raison que l'on puisse le faire, comme le montre par exemple la figure 5.

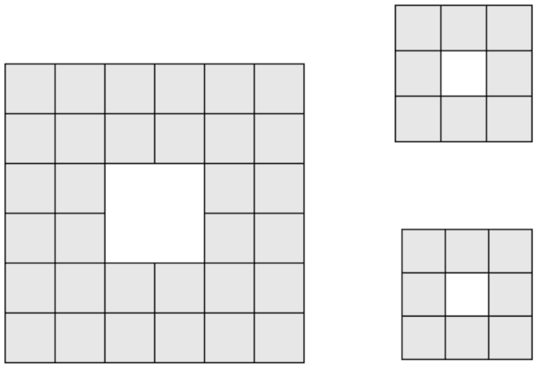

FIGURE 5. Un complexe carré dont tous les bords sont de la même couleur

Pour contourner cette difficulté on introduit le complexe

$$\mathcal{Y}_{k-1} = \bigsqcup_{W} \bigsqcup_{\substack{[c]\in C_k(\mathcal{X})/\simeq_W \\ c(W)=k-1}} W^c/\mathrm{Stab}_{\mathcal{G}}(W,[c]),$$

où la première union porte sur un ensemble de représentants des $\mathcal{G}$-orbites d'hyperplans de $\mathcal{X}$, W^c est le complexe cubique obtenu à partir de la subdivision barycentrique cubique $\dot{W}$ en découpant selon les hyperplans de W de couleurs $1,\ldots,k-2$, et

$$\mathrm{Stab}_{\mathcal{G}}(W,[c]) = \left\{ g \in \mathcal{G}_W \;\middle|\; [c\circ g^{-1}] = [c] \right\}.$$

Un point crucial (mais élémentaire) est que chaque classe de $\mathcal{G}$-équivalence de face supercoloriée n'apparaît qu'une fois dans $W^c/\mathrm{Stab}_{\mathcal{G}}(W,[c])$. En particulier l'application $\partial_{k-1}\mathcal{V}_{k-1} \to \mathcal{Y}_{k-1}$, qui à une face associe la face qui lui est équivalente dans $\mathcal{Y}_{k-1}$, est bien définie.

PROPOSITION 4.3. — *L'application $\partial_{k-1}\mathcal{V}_{k-1} \to \mathcal{Y}_{k-1}$ est un revêtement.*

Démonstration. — Étant donnée une face F dans $\partial_{k-1}\mathcal{V}_{k-1}$, la projection $F \to \mathcal{Y}_{k-1}$ est un revêtement sur son image, il s'agit de montrer qu'elle se prolonge à toute face adjacente.

Considérons donc deux faces F_1 et F_2 de couleur $k-1$ et adjacentes dans $\partial_{k-1}\mathcal{V}_{k-1}$. Il correspond à chacune d'entre elles un polyèdre cubique de $\mathcal{V}_k$; on peut relever ces polyèdres dans $\dot{\mathcal{X}}$ en deux polyèdres cubiques supercoloriés $(P_1,[d_1])$ et $(P_2,[d_2])$. Quitte à translater l'un de ces polyèdres par un élément de $\mathcal{G}$, on peut en outre s'arranger pour être dans la situation suivante :

1. les polyèdres P_1 et P_2 sont adjacents selon une face Φ telle que les supercouleurs induites $[d_1]$ et $[d_2] \in C_k(\mathcal{X})/\simeq_{W(\Phi)}$ coïncident et vérifient $d_1(W(\Phi)) = d_2(W(\Phi)) = k$;
2. les hyperplans $W(F_1)$ et $W(F_2)$ s'intersectent selon $W(F_1) \cap W(\Phi) = W(F_2) \cap W(\Phi)$.

Puisque $[d_1] = [d_2]$ dans $C_k(\mathcal{X})/\simeq_{W(\Phi)}$ et que

$$d_1(W(\Phi)) = d_2(W(\Phi)) = k > k - 1 = d_1(W(F_1)),$$

on a $[d_1] = [d_2]$ dans $C_k(\mathcal{X})/\simeq_{W(F_1)}$. En particulier d_1 attribue la même couleur aux hyperplans $W(F_1)$ et $W(F_2)$ qui, puisqu'ils s'intersectent, doivent donc coïncider : $W(F_1) = W(F_2) = W$. On a donc $[d_1] = [d_2]$ dans $C_k(\mathcal{X})/\simeq_W$ et les projections $F_i \to \mathcal{Y}_{k-1}$ $(i = 1, 2)$ s'étendent à $F_1 \cup F_2$ en un revêtement sur son image. □

Remarque 4.4. — Puisque ω vérifie les équations de recollement, étant donnée une face supercoloriée $(F, [c])$ dans $\mathcal{Y}_{k-1}$, le nombre de faces de $\partial_{k-1}\mathcal{V}_{k-1}$ qui revêtent $(F, [c])$ et ont une co-orientation fixée est égal au nombre de celles qui ont la co-orientation opposée.

Conclusion de la démonstration du théorème 3.7. — Le complexe cubique (compact) $\mathcal{V}_{k-1}$ a une hiérarchie quasi-convexe naturelle ; il découle donc du théorème 2.5 que son groupe fondamental H est virtuellement spécial. En procédant comme dans la démonstration du théorème 2.5 on peut alors construire un revêtement fini $\widehat{\mathcal{V}}_{k-1}$ de $\mathcal{V}_{k-1}$ tel que toutes les composantes connexes de $\partial_{k-1}\widehat{\mathcal{V}}_{k-1}$ induisent un même revêtement régulier de $\mathcal{Y}_{k-1}$.[10]

En effet, par définition du graphe $\Gamma(\mathcal{X})$, à une collection d'hyperplans de même couleur correspond la collection *presque malnormale* des stabilisateurs de ces hyperplans. On peut donc appliquer le théorème 3.5 au groupe H et à la collection $S_1, \ldots, S_m$ des stabilisateurs des hyperplans de couleur $k-1$. On peut ainsi trouver des sous-groupes $S_i' \dot{\triangleleft} S_i$, correspondant à un *même* revêtement régulier $\Upsilon_{k-1} \to \mathcal{Y}_{k-1}$, tels que le quotient

$$\bar{H} = H/\langle\langle S_1', \ldots, S_m' \rangle\rangle$$

soit virtuellement spécial. Le groupe $\bar{H}$ est en particulier résiduellement fini et un quotient fini permet de séparer les représentants non triviaux des classes S_i/S_i'. Il correspond à ce quotient le revêtement fini $\widehat{\mathcal{V}}_{k-1}$.

On peut coller les composantes de $\partial_{k-1}\widehat{\mathcal{V}}_{k-1}$ par paires (avec co-orientations opposées) pour obtenir un nouveau complexe $\mathcal{V}_{k-2}$ dont toutes les faces portent une couleur $< k-1$. On continue par récurrence jusqu'à obtenir un complexe compact $\mathcal{V}_0$, avec une hiérarchie quasi-convexe, qui revêt finiment $X = G\backslash C$. On conclut en appliquant le théorème 2.5.

10. Ainsi dans l'exemple représenté figure 5 on peut passer à un revêtement double trivial du grand complexe et à des revêtements doubles non triviaux des deux petits complexes.

4.4. Démonstration du théorème 4.2

On déduit le théorème 4.2 du résultat général suivant.

Proposition 4.5. — *Soient* Γ *un graphe de valence bornée strictement inférieure à* k *et* G *un groupe qui opère sur* Γ *avec quotient compact. Alors, il existe une mesure de probabilité* G*-invariante sur l'espace* $C_k(\Gamma)$ *des* k*-coloriages de* Γ*.*

Démonstration [11].— On appelle *coloriage faible* à n couleurs un élément de

$$[n]^{\Gamma^{(0)}} = \{1, \ldots, n\}^{\mathrm{Sommet}(\Gamma)}.$$

Soient $e_1, \ldots, e_m$ un choix de représentants des G-orbites d'arêtes du graphe Γ. On définit alors le *poids* d'un coloriage faible comme étant le nombre d'arêtes e_i dont les points terminaux ont la même couleur. Le poids s'étend linéairement en une fonction sur l'espace des mesures de probabilité sur l'espace des coloriages faibles ; une mesure de probabilité G-invariante sur l'espace des k-coloriages faibles qui est de poids nul induit une mesure de probabilité G-invariante sur $C_k(\Gamma)$.

Soit μ_n la mesure uniforme sur $[n]^{\Gamma^{(0)}}$ (produit des mesures uniformes sur $[n]$). La mesure μ_n est G-invariante et, si e est une arête de Γ d'extrémités u et v, on a :

$$\mu_n \left\{ c \in [n]^{\Gamma^{(0)}} \;\middle|\; c(u) = c(v) \right\} = \frac{1}{n}$$

de sorte que le poids de μ_n est m/n.

Pour $n > k$, il existe une application $p_n : [n]^{\Gamma^{(0)}} \to [n-1]^{\Gamma^{(0)}}$ qui à un n-coloriage faible associe le $(n-1)$-coloriage faible qui change la couleur d'un sommet de couleur n en l'entier le plus petit qui ne soit pas déjà la couleur d'un sommet adjacent : $p_n(c)(v) = c(v)$, si $c(v) < n$, et

$$p_n(c)(v) = \min(\{1, \ldots, n-1\} - \{c(u) \;\middle|\; (u, v) \in \mathrm{Arête}(\Gamma)\}), \text{ si } c(v) = n.$$

L'application p_n est G-équivariante et si ν est une mesure sur $[n]^{\Gamma^{(0)}}$, la mesure $(p_n)_*(\nu)$ a un poids inférieur au poids de ν. Considérons donc la mesure

$$\nu_n := (p_{k+1})_* \ldots (p_n)_*(\mu_n).$$

C'est une mesure de probabilité G-invariante sur $[k]^{\Gamma^{(0)}}$ qui est de poids $\leq m/n$. En prenant une limite faible de la suite (ν_n), on obtient une mesure de probabilité G-invariante sur l'espace des k-coloriages faibles qui est de poids nul et induit donc une mesure de probabilité G-invariante sur $C_k(\Gamma)$. $\square$

On peut maintenant conclure la démonstration du théorème 4.2 : la proposition 4.5 fournit une mesure $\mathcal{G}$-invariante μ sur l'espace $C_k(\Gamma(\mathcal{X}))$. À une telle mesure on associe le vecteur $\omega \in \mathbf{R}[\mathcal{P}]$ dont chaque coordonnée

$$\omega(P_j, [c]) = \mu(\{d \in C_k(\Gamma(\mathcal{X})) \;\middle|\; d \simeq_{P_j} c\}) \quad (j = 1, \ldots, p,\ [c] \in C_k(\mathcal{X})/ \simeq_{P_j})$$

11. Après qu'Agol eut donné la démonstration suivante de la proposition, Lewis Bowen lui a indiqué que la proposition est aussi conséquence de [32] sur les coloriages de graphes de Borel.

est égale à la mesure de l'ensemble des k-coloriages de $\Gamma(\mathcal{X})$ qui induisent le supercoloriage $[c]$ de P_j. Cette mesure est bien définie puisque μ est $\mathcal{G}$-invariante.

Le vecteur ω est non nul, à coordonnées positives, et vérifie les équations de recollement. Comme un tel vecteur n'est déterminé que par un nombre fini d'équations à coefficients entiers, il doit exister une solution rationnelle et donc un vecteur non nul dans $\mathbf{N}[\mathcal{P}]$ qui vérifie les équations de recollement.

5. APPLICATIONS

Il découle de la démonstration par Agol de la conjecture de Wise et du théorème de Kahn et Markovic — plus précisément des théorèmes 1.13 et 1.11 — que le groupe fondamental d'une variété hyperbolique de dimension 3 est virtuellement spécial. On renvoie à [5, §6] pour une liste impressionnante de conséquences. Signalons juste ici celles qui nous semblent les plus significatives.

5.1. Quelques conséquences algébriques

D'après le théorème 1.21, un groupe spécial possède un sous-groupe d'indice fini qui se surjecte sur un groupe libre non élémentaire. Tout groupe $A_{\mathcal{G}}$ associé à un graphe fini $\mathcal{G}$, et donc tout groupe spécial, se plonge dans $\mathrm{GL}(n, \mathbf{Z})$ pour un certain n. On peut également montrer (voir par exemple [19]) que tout groupe $A_{\mathcal{G}}$ est bi-ordonnable. De tous ces résultats on déduit donc le théorème suivant.

Théorème 5.1. — *Le groupe fondamental d'une variété hyperbolique de dimension* 3 *possède un sous-groupe d'indice fini qui se surjecte sur un groupe libre non élémentaire, s'injecte dans* $\mathrm{GL}(n, \mathbf{Z})$ *pour un certain* n *et possède un sous-groupe d'indice fini qui est bi-ordonnable.*

D'après le théorème 1.20, dans un groupe spécial les sous-groupes quasi-convexes sont séparables. Mais une conséquence du « tameness theorem » indépendamment démontré par Agol [1] et Calegari et David Gabai [15] est que, si M est une variété hyperbolique de dimension 3, un sous-groupe de type fini de $\pi_1(M)$ est soit quasi-convexe soit le groupe fondamental d'une fibre virtuelle. Le groupe fondamental d'une fibre étant naturellement séparable (par les revêtements cycliques associés à la fibration) on obtient le théorème suivant — qui répond positivement à la question (15) de la liste de Thurston [45].

Théorème 5.2. — *Soit* M *une variété hyperbolique de dimension* 3*. Alors tout sous-groupe de type fini de* $\pi_1 M$ *est séparable.*

5.2. Homologie des variétés hyperboliques

Soit M une variété hyperbolique de dimension 3. Il découle en particulier du théorème 5.1 que, pour tout entier n, la variété M possède un revêtement fini dont le premier nombre de Betti est supérieur à n ; ce qui répond en particulier positivement à la question (17) de la liste de Thurston. Concernant la partie de torsion dans l'homologie des revêtements finis de M, Hongbin Sun [44] déduit des travaux de Kahn-Markovic et d'Agol le théorème suivant.

Théorème 5.3. — *Tout groupe abélien fini A apparaît comme facteur direct du premier groupe d'homologie d'un revêtement fini de M.*

Soit n un entier > 3. On peut se demander si le groupe fondamental d'une variété hyperbolique de dimension n est encore virtuellement spécial. Dans [8] on montre que les variétés hyperboliques arithmétiques « standard » et toutes les variétés non arithmétiques connues (au moment où on écrit ce rapport) ont un groupe fondamental virtuellement spécial. *A contrario* en toute dimension impaire $n > 3$ il existe des familles de variétés hyperboliques arithmétiques dont on ne sait pas si leur groupe fondamental est virtuellement spécial. En dimension 7 il existe en particulier une famille particulièrement mystérieuse de variétés hyperboliques arithmétiques, voir [7].

5.3. Fibrations virtuelles en dimension 3

Soit G un groupe. On note $D(G)$ son sous-groupe dérivé et

$$D_{\mathrm{rad}}(G) = \{g \in G \ : \ (\exists k \in \mathbf{N}^*) \ g^k \in D(G)\}$$

son radical dans G.

Dans [2] Agol introduit une nouvelle condition résiduelle sur les groupes, la condition d'être **R**esidually **F**inite **R**ational **S**olvable. Par définition le groupe G est *RFRS* s'il existe une suite de sous-groupes

$$G = G_0 \dot{>} G_1 \dot{>} G_2 \dot{>} \dots$$

d'intersection triviale et telle que chaque G_{i+1} contienne le groupe $D_{\mathrm{rad}}(G_i)$.

Agol démontre ensuite les deux propositions suivantes.

Proposition 5.4. — *Soit M une variété de dimension 3. Si $\pi_1(M)$ est RFRS alors M possède un revêtement fini qui fibre sur le cercle.*

La condition RFRS peut sembler mystérieuse. Mais il découle du théorème 1.13 et de la proposition suivante que la proposition 5.4 s'applique (virtuellement) à toutes les variétés hyperboliques de dimension 3.

Proposition 5.5. — *Tout groupe virtuellement spécial est virtuellement RFRS.*

Toute variété hyperbolique de dimension 3 possède donc un revêtement fini qui fibre sur le cercle. C'est une réponse positive à la question (18) de la liste de Thurston. On peut en fait obtenir un résultat un peu plus général. Les travaux de Yi Liu [33] et de Piotr Przytycki et Wise [39] permettent en effet de préciser le théorème 1.13 dans le cas des groupes fondamentaux de variétés de dimension 3. Ils obtiennent le théorème suivant.

Théorème 5.6. — *Une variété de dimension 3 asphérique a un groupe fondamental virtuellement spécial si et seulement si elle peut être munie d'une métrique riemannienne à courbure négative (ou nulle).*

Corollaire 5.7. — *Soit M une variété de dimension 3 asphérique qui peut être munie d'une métrique riemannienne à courbure négative (ou nulle). Alors M possède un revêtement fini qui fibre sur le cercle.*

La compréhension de la topologie des variétés de dimension 3 est ainsi (virtuellement) réduite à la compréhension de la dynamique des difféomorphismes des surfaces (correspondant à l'application de premier retour de la fibration).

5.4. Conséquences en théorie géométrique des groupes

De nombreux groupes hyperboliques opèrent géométriquement sur un complexe cubique CAT(0). (12) Au vu du nombre de propriétés remarquables des groupes spéciaux il n'est donc pas étonnant que le théorème 1.13 ait des applications au-delà des variétés de dimension 3. Nous concluons ce rapport par trois d'entre elles qui nous ont paru particulièrement frappantes, bien d'autres sont certainement encore à venir.

5.4.1. *La conjecture de Baumslag.* — Parmi les groupes présentés par générateurs et relations ceux qui semblent le plus proche d'être libres sont les groupes à une relation. Le plus connu d'entre eux

$$\mathrm{BS}(2,3) = \langle a, b \mid a^{-1}b^2a = b^3\rangle$$

n'est pourtant pas hopfien : le morphisme $\phi : a \mapsto a$, $b \mapsto b^2$, est surjectif mais n'est pas un isomorphisme. Puisqu'un groupe de type fini et résiduellement fini est nécessairement hopfien, on en déduit en particulier que le groupe $\mathrm{BS}(2,3)$ n'est pas résiduellement fini. En 1967, Gilbert Baumslag a toutefois conjecturé qu'un groupe à une relation avec de la torsion (non triviale) est toujours résiduellement fini. Noter que le groupe $\mathrm{BS}(2,3)$ est sans torsion.

En fait, de manière analogue aux variétés Haken, tout groupe à une relation possède une hiérarchie qui se termine par un groupe isomorphe au produit libre d'un groupe libre et de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ pour un certain entier $n \geq 1$. Dans [48, Section 18] Wise démontre

12. Mais pas tous ! Si G est un groupe ayant la propriété (T) de Kazhdan, alors toute action de G sur un complexe cubique CAT(0) possède un point fixe global. Les groupes fondamentaux de variétés hyperboliques complexes de dimension complexe > 1 ne peuvent pas non plus opérer géométriquement sur un complexe cubique CAT(0), voir [17, 40]

que cette hiérarchie est quasiconvexe quand le groupe contient de la torsion. Comme corollaire de son théorème 2.5 il obtient donc le résultat suivant.

THÉORÈME 5.8. — *Tout groupe à une relation avec de la torsion (non triviale) est virtuellement spécial.*

Cela implique en particulier la conjecture de Baumslag mais même que ces groupes sont linéaires (sur $\mathbf{Z}$).

5.4.2. *Groupes à petite simplification $C'(1/6)$.* — Soit G un groupe de présentation finie

$$G = \langle x_1, \dots, x_k \mid r_1, \dots, r_s \rangle. \tag{3}$$

Supposons chaque relation (cycliquement) réduite. Une *pièce* est un sous-mot d'un r_i qui apparaît également comme sous-mot d'une autre relation r_j ou de son inverse, ou qui apparaît comme sous-mot mais à une autre place. Le groupe G est dit *à petite simplification $C'(1/6)$* si, pour toute pièce σ dans une relation r_i, la longueur de σ est strictement inférieure à $1/6$ fois la longueur de r_i.

Une version combinatoire du théorème de Gauss-Bonnet implique qu'un groupe à petite simplification $C'(1/6)$ est hyperbolique. Wise [47] montre de plus qu'un tel groupe opère géométriquement sur un complexe cubique CAT(0) localement fini. Le théorème suivant découle donc encore du théorème 1.13.

THÉORÈME 5.9. — *Tout groupe à petite simplification $C'(1/6)$ est virtuellement spécial, en particulier résiduellement fini et linéaire sur $\mathbf{Z}$.*

5.4.3. *Groupes aléatoires.* — Un groupe à k générateurs est un quotient du groupe libre à k générateurs, disons $x_1, \dots, x_k$, par un ensemble de relations. Se donner un groupe au hasard c'est donc se donner au hasard un certain nombre de mots en $x_1^{\pm}, \dots, x_k^{\pm}$. Une longueur de mots n étant choisie, le plus simple consiste à choisir les mots uniformément parmi l'ensemble des $(2k)(2k-1)^{n-1}$ mots réduits de longueur n. Il faut toutefois encore préciser le nombre de mots que l'on prend : plus l'ensemble des relateurs est grand, plus le groupe sera petit. Le modèle *à densité*, introduit par Gromov [22], consiste à d'abord choisir un nombre $D \in]0,1[$ (la densité) et à tirer $s = [(2k-1)^n D]$ fois de suite (indépendamment) un mot réduit au hasard uniformément parmi les $(2k)(2k-1)^{n-1}$ mots réduits possibles. On obtient ainsi un groupe de présentation (3). La densité D étant fixée, on peut se demander quelles sont les propriétés que vérifie G avec probabilité tendant vers 1 lorsque n tend vers l'infini.

Gromov et Yann Ollivier [36] montrent que si la densité D est strictement inférieure à $1/2$, la probabilité que G soit infini et hyperbolique tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini. Si par contre la densité D est strictement supérieure à $1/2$, le groupe G est soit $\{e\}$ soit $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, avec probabilité tendant vers 1 quand n tend vers l'infini.

Plus récemment Ollivier et Wise [37] ont montré que si la densité D est strictement inférieure à $1/6$, la probabilité que G opère géométriquement sur un complexe cubique

CAT(0) localement fini tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini. Le théorème suivant découle donc encore une fois du théorème 1.13.

Théorème 5.10. — *Dans le modèle à densité des groupes aléatoires, si la densité est strictement inférieure à* $1/6$*, un groupe aléatoire est virtuellement spécial, en particulier résiduellement fini et linéaire sur* $\mathbf{Z}$.

Remerciements. Merci à tous les participants du groupe de travail « Agol-Wise », un grand merci en particulier à Frédéric Haglund, Peter Haissïnsky et Vincent Guirardel. Merci enfin à Frédéric Paulin pour ses commentaires sur une première version de ce texte.

RÉFÉRENCES

[1] I. Agol – « Tameness of hyperbolic 3-manifolds », *ArXiv Mathematics e-prints* (2004).

[2] I. Agol – « Criteria for virtual fibering », *J. Topol.* **1** (2008), no. 2, p. 269–284.

[3] ———, « The virtual Haken conjecture », *Doc. Math.* **18** (2013), p. 1045–1087, With an appendix by Agol, Daniel Groves, and Jason Manning.

[4] I. Agol, D. Groves & J. F. Manning – « Residual finiteness, QCERF and fillings of hyperbolic groups », *Geom. Topol.* **13** (2009), no. 2, p. 1043–1073.

[5] M. Aschenbrenner, S. Friedl & H. Wilton – « 3-manifold groups », *ArXiv e-prints* (2012).

[6] N. Bergeron – « La conjecture des sous-groupes de surfaces (d'après Jeremy Kahn et Vladimir Markovic) », *Astérisque* (2013), no. 352, p. Exp. No. 1055, 429–458, Séminaire Bourbaki. Vol. 2011/2012.

[7] N. Bergeron & L. Clozel – « Quelques conséquences des travaux d'Arthur pour le spectre et la topologie des variétés hyperboliques », *Invent. Math.* **192** (2013), no. 3, p. 505–532.

[8] N. Bergeron, F. Haglund & D. T. Wise – « Hyperplane sections in arithmetic hyperbolic manifolds », *J. Lond. Math. Soc. (2)* **83** (2011), no. 2, p. 431–448.

[9] N. Bergeron & D. T. Wise – « A boundary criterion for cubulation », *Amer. J. Math.* **134** (2012), no. 3, p. 843–859.

[10] G. Besson – « Preuve de la conjecture de Poincaré en déformant la métrique par la courbure de Ricci (d'après G. Perel′man) », *Astérisque* (2006), no. 307, p. Exp. No. 947, ix, 309–347, Séminaire Bourbaki. Vol. 2004/2005.

[11] M. Bestvina & M. Feighn – « A combination theorem for negatively curved groups », *J. Differential Geom.* **35** (1992), no. 1, p. 85–101.

[12] M. R. Bridson & A. Haefliger – *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundl. Math. Wiss., vol. 319, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[13] M. Burger & S. Mozes – « Lattices in product of trees », *Publ. Math. I.H.É.S.* (2000), no. 92, p. 151–194 (2001).

[14] D. Calegari – « Blog summary of the proof of the virtual haken conjecture », *http://lamington.wordpress.com/2012/03/26/agols-virtual-haken-theorem-2/*, 2012.

[15] D. Calegari & D. Gabai – « Shrinkwrapping and the taming of hyperbolic 3-manifolds », *J. Amer. Math. Soc.* **19** (2006), no. 2, p. 385–446.

[16] R. Coulon – « Asphericity and small cancellation theory for rotation families of groups », *Groups Geom. Dyn.* **5** (2011), no. 4, p. 729–765.

[17] T. Delzant & M. Gromov – « Cuts in Kähler groups », in *Infinite groups : geometric, combinatorial and dynamical aspects*, Progr. Math., vol. 248, Birkhäuser, Basel, 2005, p. 31–55.

[18] ______, « Courbure mésoscopique et théorie de la toute petite simplification », *J. Topol.* **1** (2008), no. 4, p. 804–836.

[19] G. Duchamp & J.-Y. Thibon – « Simple orderings for free partially commutative groups », *Internat. J. Algebra Comput.* **2** (1992), no. 3, p. 351–355.

[20] G. Dufour – « Cubulations de variétés hyperboliques compactes », Thèse, Université Paris Sud, 2012.

[21] R. Gitik, M. Mitra, E. Rips & M. Sageev – « Widths of subgroups », *Trans. Amer. Math. Soc.* **350** (1998), no. 1, p. 321–329.

[22] M. Gromov – « Asymptotic invariants of infinite groups », in *Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 182, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993, p. 1–295.

[23] V. Guirardel – « Geometric small cancellation », Preprint disponible sur http ://www.math.utah.edu/pcmi12/lecture_notes/guirardel.pdf.

[24] F. Haglund & D. T. Wise – « Special cube complexes », *Geom. Funct. Anal.* **17** (2008), no. 5, p. 1551–1620.

[25] ______, « A combination theorem for special cube complexes », *Ann. of Math. (2)* **176** (2012), no. 3, p. 1427–1482.

[26] W. Haken – « Über das Homöomorphieproblem der 3-Mannigfaltigkeiten. I », *Math. Z.* **80** (1962), p. 89–120.

[27] M. Hall, Jr. – « Coset representations in free groups », *Trans. Amer. Math. Soc.* **67** (1949), p. 421–432.

[28] G. C. Hruska & D. T. Wise – « Finiteness properties of cubulated groups », *ArXiv e-prints* (2012).

[29] T. Hsu & D. T. Wise – « Cubulating malnormal amalgams », Preprint.

[30] J. Kahn & V. Markovic – « Immersing almost geodesic surfaces in a closed hyperbolic three manifold », *Ann. of Math. (2)* **175** (2012), no. 3, p. 1127–1190.

[31] M. Kapovich – *Hyperbolic manifolds and discrete groups*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2009, Reprint of the 2001 edition.

[32] A. S. Kechris, S. Solecki & S. Todorcevic – « Borel chromatic numbers », *Adv. Math.* **141** (1999), no. 1, p. 1–44.

[33] Y. Liu – « Virtual cubulation of nonpositively curved graph manifolds », *ArXiv e-prints* (2011).

[34] J. F. Manning & E. Martínez-Pedroza – « Separation of relatively quasiconvex subgroups », *Pacific J. Math.* **244** (2010), no. 2, p. 309–334.

[35] C. T. McMullen – *Renormalization and 3-manifolds which fiber over the circle*, Annals of Mathematics Studies, vol. 142, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1996.

[36] Y. Ollivier – « Cogrowth and spectral gap of generic groups », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **55** (2005), no. 1, p. 289–317.

[37] Y. Ollivier & D. T. Wise – « Cubulating random groups at density less than 1/6 », *Trans. Amer. Math. Soc.* **363** (2011), no. 9, p. 4701–4733.

[38] D. V. Osin – « Peripheral fillings of relatively hyperbolic groups », *Invent. Math.* **167** (2007), no. 2, p. 295–326.

[39] P. Przytycki & D. T. Wise – « Mixed 3-manifolds are virtually special », *ArXiv e-prints* (2012).

[40] P. Py – « Coxeter groups and Kähler groups », *ArXiv e-prints* (2012).

[41] M. Sageev – « Ends of group pairs and non-positively curved cube complexes », *Proc. London Math. Soc. (3)* **71** (1995), no. 3, p. 585–617.

[42] P. Scott – « Subgroups of surface groups are almost geometric », *J. London Math. Soc. (2)* **17** (1978), no. 3, p. 555–565.

[43] J. R. Stallings – « Topology of finite graphs », *Invent. Math.* **71** (1983), no. 3, p. 551–565.

[44] H. Sun – « Virtual Homological Torsion of Closed Hyperbolic 3-manifolds », *ArXiv e-prints* (2013).

[45] W. P. Thurston – « Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **6** (1982), no. 3, p. 357–381.

[46] F. Waldhausen – « On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large », *Ann. of Math. (2)* **87** (1968), p. 56–88.

[47] D. T. Wise – « Cubulating small cancellation groups », *Geom. Funct. Anal.* **14** (2004), no. 1, p. 150–214.

[48] D. T. Wise – « The structure of groups with a quasiconvex hierarchy », p. 1–200, Preprint 2009.

Nicolas BERGERON

Institut de Mathématiques de Jussieu
Université Pierre et Marie Curie et
Institut Universitaire de France
4 place Jussieu
Case 247
F–75252 Paris Cedex 05
E-mail : bergeron@math.jussieu.fr