

LEMME DE MARGULIS À COURBURE DE RICCI MINORÉE
[d'après Vitali Kapovitch et Burkhard Wilking]

par Gilles COURTOIS

INTRODUCTION

Soit M une variété riemannienne et soit p un point de M . Les boules $B_r(p)$ de centre p et rayon r de M sont difféomorphes à une boule euclidienne pour $r \leq r_0$ suffisamment petit où r_0 dépend de M et du point p . En général il peut exister des petits lacets homotopiquement non triviaux et la topologie des boules $B_r(p)$ peut être compliquée même lorsque le rayon r est petit : en faisant une homothétie appropriée, toute variété compacte M coïncide avec $B_r(p)$ pour r arbitrairement petit. Toutefois, contracter une métrique fait exploser sa courbure (sauf si elle est plate) et le lemme de Margulis donne, à courbure sectionnelle bornée, un contrôle uniforme sur le sous-groupe du groupe fondamental engendré par les petits lacets.

THÉORÈME 0.1 ([BGS][Ma]). — *Il existe des constantes $\varepsilon(n) > 0$ et $C(n) > 0$ telles que pour toute variété M de dimension n et courbure sectionnelle $-1 \leq K \leq 0$ et tout point $p \in M$, le sous-groupe $\Gamma_{\varepsilon,p}$ de $\pi_1(M,p)$ engendré par les lacets en p de longueur inférieure à $\varepsilon(n)$ est virtuellement nilpotent. De plus l'indice du sous-groupe nilpotent est majoré par $C(n)$.*

Ce théorème, établi dans le cas des espaces symétriques par D. Kazhdan et G. Margulis [KM], [Za], [BZ], peut s'interpréter comme une généralisation du théorème de Bieberbach, [B], [BGS].

THÉORÈME 0.2 ([B]). — *Il existe une constante $C(n) > 0$ telle que tout sous-groupe discret cocompact du groupe des isométries de l'espace euclidien \mathbb{R}^n contient un sous-groupe de translations, isomorphe à \mathbb{Z}^n et d'indice majoré par $C(n)$.*

L'influence de la courbure nulle apparaît dans les preuves du théorème de Bieberbach par l'intermédiaire de la structure du groupe $\text{Is}(\mathbb{R}^n)$ des isométries de $\mathbb{R}^n : 1 \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Is}(\mathbb{R}^n) \rightarrow O(n) \rightarrow 1$. L'argument clé est en fait la propriété suivante des commutateurs : si $A, B \in O(n)$ sont suffisamment proches de Id , alors $[A, B]$ l'est encore plus. Schématiquement, cette propriété, appliquée aux parties linéaires des isométries du sous-groupe discret d'isométries de \mathbb{R}^n , permet de voir que leurs commutateurs itérés d'ordre assez grand sont des translations. Dans [BGS], M. Gromov donne une preuve du théorème de Margulis 0.1 selon les mêmes lignes : les bornes

sur la courbure sectionnelle garantissent que les holonomies affines le long des petits lacets en p vérifient la propriété des commutateurs (si $c : [0, 1] \rightarrow M$ est un lacet en p , l'holonomie affine le long de c est l'isométrie affine α de $T_p M$ définie pour $v \in T_p M$ par $\alpha(v) = Av + \dot{c}(1)$ où la partie linéaire A de α est induite par le transport parallèle le long de c).

Dans les arguments évoqués ci-dessus, la courbure sectionnelle joue un rôle crucial ; cependant V. Kapovitch et B. Wilking ont récemment établi un « lemme de Margulis généralisé » où la seule courbure de Ricci est supposée minorée. Ce résultat était conjecturé par M. Gromov, [GLP], chapitre 5 F+.

THÉORÈME 0.3 ([KW]). — *Il existe des constantes $\varepsilon := \varepsilon(n) \in]0, 1[$ et $C(n) > 0$ telles que, pour toute variété riemannienne complète M de dimension n à courbure de Ricci minorée, $\text{Ric} \geq -(n-1)$, l'image de l'homomorphisme induit par l'inclusion $\pi_1(B_\varepsilon(p), p) \rightarrow \pi_1(B_1(p), p)$ contient un sous-groupe nilpotent N d'indice majoré par $C(n)$. De plus, N a une base nilpotente de longueur au plus n .*

Notons qu'une base nilpotente d'un groupe N est un ensemble de générateurs $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ tel que pour tous i, j , $1 < i < j \leq k$, le commutateur $[b_i, b_j]$ est contenu dans le sous-groupe $\langle b_1, \dots, b_{i-1} \rangle$ et pour tout i , $1 \leq i \leq k$, $[b_1, b_i] = 1$.

Remarque 0.4. — Une version antérieure de ce théorème, avec une hypothèse de minoration de la courbure sectionnelle et sans borne uniforme sur l'indice du sous-groupe nilpotent avait été établie par V. Kapovitch, A. Petrunin et W. Tuschmann, [KPT]. Ce théorème, également sans la borne uniforme sur l'indice du sous-groupe nilpotent, découle également des travaux de E. Breuillard, B. Green et T. Tao sur les groupes approximatifs, [BGT], [VDD].

Remarque 0.5. — Soit M une variété riemannienne dont tout point est à distance inférieure à d d'un point fixé $p \in M$, par exemple M est une variété compacte de diamètre d ou bien une boule de rayon d ; alors $\pi_1(M, p)$ est engendré par des lacets de longueur inférieure à $2d$, [GLP], Proposition 3.22. Dans le théorème 0.3, l'image de l'homomorphisme induit par l'inclusion $\pi_1(B_\varepsilon(p)) \rightarrow \pi_1(B_1(p))$ est donc le sous-groupe de $\pi_1(B_1(p))$ engendré par les lacets de longueur inférieure à 2ε et le théorème 0.3 est bien une généralisation du théorème 0.1.

Dans le cas où une variété de dimension n à courbure de Ricci minorée est de diamètre inférieur à $\varepsilon(n)$, le lemme de Margulis 0.3 donne la version à courbure de Ricci minorée du théorème des variétés presque plates de M. Gromov, [BK], [Gro2].

COROLLAIRE 0.6. — *Il existe des constantes $\varepsilon(n) > 0$ et $C(n) > 0$ telles que, pour toute variété riemannienne compacte de dimension n , de courbure de Ricci minorée, $\text{Ric} \geq -(n-1)$, et de diamètre majoré, $\text{diam} \leq \varepsilon(n)$, le groupe fondamental $\pi_1(M)$ contient un sous-groupe nilpotent N d'indice majoré par $C(n)$. De plus, N possède une base nilpotente de longueur majorée par n .*

Remarque 0.7. — Dans le lemme de Margulis ou le théorème des variétés presque plates, le passage de la courbure sectionnelle à la courbure de Ricci est tout sauf anodin. Des bornes sur la courbure sectionnelle donnent accès par l’intermédiaire des théorèmes de Toponogov à un contrôle des fonctions distances et donc à la géométrie locale. Ceci n’est plus vrai si l’on dispose seulement d’une borne inférieure de la courbure de Ricci qui ne donne qu’un contrôle sur les volumes par le théorème de Bishop-Gromov et des estimées « en moyenne » plutôt que des estimées ponctuelles. Les méthodes sont donc différentes et la démonstration de V. Kapovitch et B. Wilking est fondée sur un argument par l’absurde. Cet argument repose fortement sur la théorie de Cheeger-Colding décrivant la structure des limites au sens de Gromov-Hausdorff des suites de variétés riemanniennes à courbure de Ricci minorées. En particulier, les constantes $\varepsilon(n)$ et $C(n)$ ne sont pas explicites.

Dans le théorème 0.3, le sous-groupe nilpotent N est de rang inférieur ou égal à n . En fait, le rang peut être égal à n , par exemple dans le cas où M^n est une nilvariété. C’est en fait le seul cas possible à revêtement fini près.

THÉORÈME 0.8. — *Il existe une constante $\varepsilon := \varepsilon(n) > 0$ telle que pour toute variété riemannienne de dimension n à courbure de Ricci minorée, $\text{Ric} \geq -(n-1)$, si l’image de l’homomorphisme induit par l’inclusion $\pi_1(B_\varepsilon(p)) \rightarrow \pi_1(B_1(p))$ contient un sous-groupe nilpotent N de rang n , alors M est homéomorphe à une infranilvariété.*

À diamètre borné, le sous-groupe nilpotent d’indice fini dans le théorème 0.3 est indépendant du point base.

THÉORÈME 0.9. — *Pour tout entier n et tout réel D , il existe des constantes positives ε_0 et C telles que si M est une variété riemannienne compacte de dimension n , de courbure de Ricci minorée, $\text{Ric} \geq -(n-1)$, et de diamètre majoré, $\text{diam}(M) \leq D$, alors il existe $\varepsilon \geq \varepsilon_0$ et un sous-groupe normal N de $\pi_1(M)$ tels que :*

- (1) N est nilpotent et possède une base nilpotente de cardinal inférieur ou égal à n ;
- (2) l’image de l’homomorphisme induit par l’inclusion $\pi_1(B_{\frac{\varepsilon}{1000}}(p), p) \rightarrow \pi_1(M, p)$ contient N ;
- (3) l’indice de N dans l’image de $\pi_1(B_{\frac{\varepsilon}{1000}}(p), p) \rightarrow \pi_1(M, p)$ est majoré par C .

Ce théorème repose entre autres sur un résultat de T. Colding et A. Naber selon lequel le groupe des isométries d’un espace métrique limite au sens de Gromov-Hausdorff d’une suite de variétés riemanniennes à courbure de Ricci minorée est un groupe de Lie, [CN].

1. SURVOL DE L’ARGUMENT

Dans cette section, nous allons décrire les idées principales de la démonstration du théorème 0.3 dans le cas du corollaire 0.6. La famille des nilvariétés est l’exemple typique auquel on pourra penser.

1.1. Exemple

Soit $H(\mathbb{R})$ le groupe de Heisenberg, c'est-à-dire $H(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^3$ muni du produit $(x, y, z) \cdot (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + xy')$. Notons $H(\mathbb{Z})$ le sous-groupe discret de $H(\mathbb{R})$ formé des éléments à coefficients entiers. Sur $H(\mathbb{R})$, on considère les métriques invariantes à gauche définies en l'identité par $g_i := \varepsilon_i^2 dx^2 + \varepsilon_i^4 dy^2 + \varepsilon_i^8 dz^2$, où ε_i tend vers 0. Notons M_i la variété compacte $M := H(\mathbb{R})/H(\mathbb{Z})$ munie de la métrique g_i . La variété M est un fibré en tore \mathbb{T}^2 au-dessus du cercle, $\mathbb{T}^2 \rightarrow M \rightarrow \mathbb{T}^1$ induisant la suite exacte des groupes fondamentaux $1 \rightarrow \mathbb{Z}^2 \rightarrow H(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 1$, où $\mathbb{Z} = \langle a \rangle$ et $\mathbb{Z}^2 = \langle b, c \rangle$, avec $a = (1, 0, 0)$, $b = (0, 1, 0)$, et $c = (0, 0, 1)$. Avec la métrique g_i , le cercle de base de ce fibré représentant a est de longueur ε_i tandis que la fibre \mathbb{T}^2 est le produit de deux cercles de longueur ε_i^2 et ε_i^4 représentant b et c respectivement. Les métriques g_i de M_i sont à courbure sectionnelle bornée, donc en particulier de courbure de Ricci minorée, [CE]. Ainsi, M_i est une suite de variétés à courbure de Ricci minorée dont le diamètre tend vers 0. Les différentes échelles $\varepsilon_i, \varepsilon_i^2, \varepsilon_i^4$ correspondent naturellement à la structure polycyclique de $H(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire $\{\text{Id}\} = H_0 \subset H_1 \subset H_2 \subset H_3 = H(\mathbb{Z})$, où $H_1 = \langle c \rangle$, $H_2 = \langle b, c \rangle$. Pour retrouver la structure polycyclique du groupe fondamental $H(\mathbb{Z})$ de M à partir de la suite des métriques g_i , l'idée est de dilater ces métriques successivement afin de récupérer la suite des sous-groupes $\{\text{Id}\} = H_0 \subset H_1 \subset H_2 \subset H_3 = H(\mathbb{Z})$.

1.2. Survol

Le but de ce qui suit est de décrire schématiquement les idées de la démonstration du théorème 0.3 dans le cas particulier du corollaire 0.6 et dans un cas simple. La démonstration, par l'absurde, revient à démontrer que pour toute suite de variétés riemanniennes (M_i, p_i) de dimension n à courbure de Ricci minorée, $\text{Ric} \geq -(n-1)$, et dont le diamètre tend vers 0, le groupe fondamental de M_i contient un sous-groupe nilpotent d'indice majoré par une constante C , ayant une chaîne cyclique nilpotente de longueur majorée par n pour i assez grand.

Soit donc une telle suite de variétés M_i . D'après un résultat classique et élémentaire, le groupe fondamental $\Gamma_i := \pi_1(M_i, p_i)$ de M_i peut être engendré par des lacets de longueur tendant vers 0. De plus, le nombre de ces générateurs est majoré. Supposons pour simplifier que Γ_i est engendré par $\{\gamma_1^i, \gamma_2^i, \gamma_3^i\}$, trois générateurs de longueur $|\gamma_1^i| \leq |\gamma_2^i| \leq |\gamma_3^i|$. On commence par dilater une première fois M_i par un facteur λ_i tendant vers l'infini de sorte que, pour la nouvelle métrique sur $\lambda_i M_i$, la plus grande longueur $|\gamma_3^i|$ soit égale à 1. Supposons par exemple que $|\gamma_1^i| \leq |\gamma_2^i| \leq \varepsilon_i \leq |\gamma_3^i| = 1$ où $\lim \varepsilon_i = 0$. Supposons également, pour simplifier, que $\lambda_i M_i$ soit un fibré au-dessus d'un cercle de longueur 1 dont le diamètre de la fibre est majoré par ε_i et tend vers 0. Le groupe fondamental $\Gamma_{1,i}$ de la fibre est donc le sous-groupe distingué de Γ_i engendré par les lacets $\{\gamma_1^i, \gamma_2^i\}$ dont la longueur tend vers 0. (Notons que, dans le cas général, il n'y a pas de fibration et le sous-groupe de Γ_i engendré par les lacets dont la longueur tend vers 0 n'est pas a priori distingué : s'y ramener est l'un des points délicats de l'argument). On a alors $\Gamma_i/\Gamma_{1,i}$ cyclique et $[\Gamma_i, \Gamma_i] \subset \Gamma_{1,i}$. On recommence ensuite l'argument précédent

avec $M_{1,i} := \lambda_i \tilde{M}_i / \Gamma_{1,i}$. La longueur des générateurs $\{\gamma_1^i, \gamma_2^i\}$ de $\Gamma_{1,i}$ tendant vers 0, on dilate la métrique de $M_{i,1}$ par un facteur μ_i tendant vers l'infini de sorte que, pour la nouvelle métrique $\mu_i M_{i,1}$, les longueurs des générateurs vérifient $|\gamma_1^i| = \varepsilon'_i \leq |\gamma_2^i| = 1$. Comme précédemment, le sous-groupe $\Gamma_{2,i} := \langle \gamma_1^i \rangle$ de $\Gamma_{1,i}$ engendré par les lacets dont la longueur tend vers 0 est distingué et $[\Gamma_{1,i}, \Gamma_{1,i}] \subset \Gamma_{2,i}$. On a donc obtenu une suite de sous-groupes distingués $\{e\} \subset \Gamma_{2,i} \subset \Gamma_{1,i} \subset \Gamma_i$ dont les quotients $\Gamma_i / \Gamma_{1,i}$, $\Gamma_{1,i} / \Gamma_{2,i}$ sont cycliques, avec $[\Gamma_i, \Gamma_i] \subset \Gamma_{1,i}$ et $[\Gamma_{1,i}, \Gamma_{1,i}] \subset \Gamma_{2,i}$.

Pour conclure que Γ_i est nilpotent, il est nécessaire de vérifier que $[\Gamma_i, \Gamma_{1,i}] \subset \Gamma_{2,i}$. C'est le cœur de l'argument. Plaçons-nous sur le revêtement universel $(\tilde{M}_i, \tilde{p}_i)$ de (M_i, p_i) . La longueur d'un lacet γ en p_i est égal à $d(\tilde{p}_i, \gamma \tilde{p}_i)$; donc, pour montrer que $[\Gamma_i, \Gamma_{1,i}] \subset \Gamma_{2,i}$, il suffit de s'assurer que les distances $d([\gamma_3^i, \gamma_1^i] \tilde{p}_i, \tilde{p}_i)$ et $d([\gamma_3^i, \gamma_2^i] \tilde{p}_i, \tilde{p}_i)$ tendent vers 0 pour la métrique $\mu_i \lambda_i \tilde{M}_i$. La difficulté vient précisément des renormalisations que nous avons faites pour « distinguer » les générateurs et les sous-groupes et, en particulier, du fait que la distance $d(\gamma_3^i \tilde{p}_i, \tilde{p}_i)$ tend vers l'infini pour la métrique $\mu_i \lambda_i \tilde{M}_i$ de sorte que les conditions $\lim d([\gamma_3^i, \gamma_1^i] \tilde{p}_i, \tilde{p}_i) = \lim d([\gamma_3^i, \gamma_2^i] \tilde{p}_i, \tilde{p}_i) = 0$ semblent impossibles à vérifier. Pour remédier à ce problème, l'idée est de « ramener » $\gamma_3^i \tilde{p}_i$ arbitrairement près de \tilde{p}_i à l'aide de difféomorphismes de \tilde{M}_i bien choisis. Pour cela, il suffit de construire une suite de difféomorphismes φ_i de $\mu_i \lambda_i \tilde{M}_i$ qui sont isotopes à l'identité, normalisent $\Gamma_{2,i}$ et tels que $\tilde{\gamma}_3^i := \varphi_i \circ \gamma_3^i$ soit asymptotiquement proche de l'identité; en effet, $\tilde{\gamma}_3^i$ vérifie alors $[\tilde{\gamma}_3^i, \gamma_1^i] = [\gamma_3^i, \gamma_1^i]$ et $\lim d([\tilde{\gamma}_3^i, \gamma_1^i] \tilde{p}_i, \tilde{p}_i) = \lim d([\gamma_3^i, \gamma_2^i] \tilde{p}_i, \tilde{p}_i) = 0$. La construction de ces difféomorphismes φ_i découle de l'observation suivante. Dans notre cas, $(\lambda_i \tilde{M}_i / \Gamma_{1,i}, p_{1,i})$ converge au sens de Gromov-Hausdorff vers $(\mathbb{R}, 0)$ où $p_{1,i}$ désigne la projection de \tilde{p}_i sur $\tilde{M}_i / \Gamma_{1,i}$ et γ_3^i , qui agit sur $\tilde{M}_i / \Gamma_{1,i}$ en déplaçant $p_{1,i}$ à distance $d(\gamma_3^i p_{1,i}, p_{1,i}) = 1$, converge (après extraction d'une sous-suite) vers une translation de \mathbb{R} . L'idée est alors d'approximer cette translation par des « presque-isométries » isotopes à l'identité ψ_i de $\lambda_i \tilde{M}_i / \Gamma_{1,i}$ de sorte qu'en posant $\varphi_i = \psi_i^{-1}$, $\tilde{\gamma}_3^i := \varphi_i \circ \gamma_3^i$ converge vers l'identité. Obtenir la même conclusion avec les métriques $\mu_i \lambda_i \tilde{M}_i$ repose sur le fait que les presque-isométries précédentes φ_i restent « presque-isométriques » après dilatations. Ainsi, en notant que $(\mu_i \lambda_i \tilde{M}_i / \Gamma_{1,i}, p_{1,i})$ converge au sens de Gromov-Hausdorff vers $(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^1, (0, p_{1,\infty}))$, on peut voir que $\varphi_i \circ \gamma_3^i$ est proche d'une isométrie de $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^1$ dont la partie de translation sur le facteur \mathbb{R} converge vers l'identité de même que la composante de rotation sur \mathbb{T}^1 après avoir choisi une puissance convenable. On obtient de cette façon que $[\Gamma_i, \Gamma_{1,i}] \subset \Gamma_{2,i}$. De la même manière, en renormalisant une fois de plus, on montre que $[\Gamma_i, \Gamma_{2,i}] \subset \{e\}$ et la nilpotence de Γ_i .

La preuve de V. Kapovitch et B. Wilking est un peu plus complexe mais suit cet argument heuristique. Elle consiste à démontrer par « récurrence sur la dimension de la fibre » que le sous-groupe $\hat{\Gamma}_i := \langle \{\gamma_1^i, \gamma_2^i, \dots, \gamma_{\sigma-1}^i\} \rangle$ de Γ_i , engendré par tous les générateurs sauf le dernier, contient un sous-groupe nilpotent \hat{N}_i d'indice majoré par une constante C dont la suite cyclique nilpotente $\hat{N}_0^i = \{e\} \triangleleft \hat{N}_1^i \triangleleft \dots \triangleleft \hat{N}_p^i = \hat{N}_i$ est de longueur $p \leq (n-1)$ et est préservée par une puissance fixée $(\gamma_\sigma^i)^d$ de γ_σ^i . Dire que $(\gamma_\sigma^i)^d$ préserve la suite cyclique nilpotente $\hat{N}_0^i = \{e\} \triangleleft \hat{N}_1^i \triangleleft \dots \triangleleft \hat{N}_p^i = \hat{N}_i$ signifie que les \hat{N}_h^i

sont normalisés par $(\gamma_\sigma^i)^d$ et que l'action de $(\gamma_\sigma^i)^d$ induite par conjugaison sur \hat{N}_{h+1}/\hat{N}_h est l'identité. Ainsi, $\hat{N}_0^i = \{e\} \triangleleft \hat{N}_1^i \triangleleft \dots \triangleleft \hat{N}_p^i = \hat{N}_i \triangleleft N_i$ est une suite cyclique nilpotente de longueur $(p+1) \leq n$ de $N_i := \langle \hat{N}_i, (\gamma_\sigma^i)^d \rangle$ où N_i est un sous-groupe d'indice inférieur à Cd de Γ_i . Une première difficulté vient de ce que, comme évoqué précédemment, M_i n'est pas a priori un fibré sur le cercle dont la fibre a $\hat{\Gamma}_i$ comme groupe fondamental. Pour contourner cette difficulté, les auteurs font la récurrence sur $n - k$, où k est la dimension du facteur euclidien dans la limite renormalisée $\lim(\tilde{M}_i/\hat{\Gamma}_i, \hat{p}_i) = \mathbb{R}^k \times K$ qui provient du théorème de presque scindement 3.3.

2. CONVERGENCE DE VARIÉTÉS RIEMANNIENNES

2.1. La convergence de Gromov-Hausdorff équivariante

Dans ce paragraphe, (X, G, p) désignera un espace métrique muni d'une action isométrique d'un sous-groupe fermé G du groupe d'isométries de X et d'un point p de X fixé. Pour tout $R > 0$, nous noterons $G(R) := \{g \in G \mid d(gp, p) \leq R\}$. Lorsque X est une variété riemannienne (M, g) , nous adopterons la notation (M, g, G, p) lorsque nous voudrions préciser l'origine de la distance sur M . Pour tout espace métrique (X, d) et tout $\lambda > 0$, nous noterons λX l'espace métrique $(X, \lambda d)$.

Rappelons quelques définitions relatives à la convergence des espaces métriques munis d'actions isométriques.

DÉFINITION 2.1. — Une suite (X_i, G_i, p_i) converge vers (X, G, p) s'il existe une suite ε_i tendant vers 0 et des suites d'applications $f_i : B_{1/\varepsilon_i}(p_i) \rightarrow X$, $\varphi_i : G_i(1/\varepsilon_i) \rightarrow G(1/\varepsilon_i)$ et $\psi_i : G(1/\varepsilon_i) \rightarrow G_i(1/\varepsilon_i)$ telles que :

- a) $f_i(p_i) = p$,
- b) pour tous $x, y \in B_{1/\varepsilon_i}(p_i)$, $|d(f_i(x), f_i(y)) - d(x, y)| \leq \varepsilon_i$,
- c) le ε_i -voisinage de $f_i(B_{1/\varepsilon_i}(p_i))$ contient $B_{1/\varepsilon_i}(p)$,
- d) pour tout i , si $g \in G_i(1/\varepsilon_i)$, $x \in B_{1/\varepsilon_i}(p_i)$ et $gx \in B_{1/\varepsilon_i}(p)$, alors

$$d(f_i(gx), \varphi_i(g)(f_i(x))) \leq \varepsilon_i,$$

- e) pour tout i , si $g \in G(1/\varepsilon_i)$, $x \in B_{1/\varepsilon_i}(p_i)$ et $\psi_i(g)(x) \in B_{1/\varepsilon_i}(p_i)$, alors

$$d(f_i(\psi_i(g)(x)), g(f_i(x))) \leq \varepsilon_i.$$

Remarque 2.2. — L'existence des applications $f_i : B_{1/\varepsilon_i}(p_i) \rightarrow X$ vérifiant a), b) et c) signifie que (X_i, p_i) converge au sens de Gromov-Hausdorff pointé vers (X, d) , [GLP]. Les applications $f_i : B_{1/\varepsilon_i}(p_i) \rightarrow X$ s'appellent des ε_i -approximations de Gromov-Hausdorff entre X_i et X .

Remarque 2.3. — Nous dirons parfois que G_i converge vers G lorsque (X_i, G_i, p_i) converge vers (X, G, p) , ce que nous noterons $\lim G_i = G$ au lieu de $\lim(X_i, G_i, p_i) = (X, G, p)$ pour alléger les notations.

THÉORÈME 2.4 ([GLP],[FY]). — Soit (M_i, G_i, p_i) une suite de variétés riemanniennes munies d'une action d'un sous-groupe fermé du groupe des isométries. On suppose que les variétés M_i sont à courbure de Ricci minorée, $\text{Ric} \geq (n-1)\Lambda$; alors une sous-suite de (M_i, G_i, p_i) converge vers (X, G, p) , où X est un espace métrique et G un sous-groupe fermé du groupe d'isométries de X .

Ce théorème est une conséquence du fait qu'à courbure de Ricci minorée, les « constantes de remplissage » sont bornées : le nombre maximal de boules disjointes de rayon r dans une boule de rayon R de M^n est majoré par $\frac{\bar{V}_{n,\Lambda}(2R+r)}{\bar{V}_{n,\Lambda}(r)}$, où $\bar{V}_{n,\Lambda}(r)$ est le volume d'une boule de rayon r de l'espace simplement connexe de dimension n de courbure sectionnelle constante Λ . Cette propriété des constantes de remplissage découle du théorème de Bishop-Gromov suivant.

THÉORÈME 2.5. — Si M^n est une variété riemannienne de dimension n à courbure de Ricci minorée, $\text{Ric} \geq (n-1)\Lambda$, alors $\frac{\text{vol}(B_r(p))}{\bar{V}_{n,\Lambda}(r)}$ est une fonction décroissante de r pour tout $p \in M^n$.

Remarque 2.6. — Si on oublie les groupes G_i et G ou si on suppose que $G_i = \{\text{Id}\}$ et $G = \{\text{Id}\}$, le théorème 2.4 est le théorème de précompacité de Gromov, [GLP] : si (M_i, p_i) est une suite de variétés riemanniennes de dimension n à courbure de Ricci minorée, $\text{Ric} \geq (n-1)\Lambda$, il existe une sous-suite de (M_i, p_i) convergeant au sens de Gromov-Hausdorff pointé vers un espace métrique (X, p_∞) .

Remarque 2.7. — Soit (M_i, g_i, p_i) une suite de variétés riemanniennes pointées à courbure de Ricci minorée, $\text{Ric} \geq (n-1)\Lambda$. D'après le théorème de précompacité de Gromov 2.6, il existe une sous-suite de (M_i, p_i) convergeant vers un espace métrique (X, p_∞) . Il est possible de faire aussi converger les mesures riemanniennes « renormalisées » $d\mu_i := \frac{dv_{g_i}}{\text{vol } B_1(p_i)}$. En fait, après extraction d'une sous-suite, on peut supposer qu'il existe une mesure de Radon μ sur X telle que, pour tout $q \in X$ et tout $q_i \in M_i$ tels que $\lim q_i = q$ et tout $R > 0$, alors $\mu(B_R(q)) = \lim \mu_i(B_R(q_i))$, [CC1] théorème 1.10.

Remarque 2.8. — Notons que les limites de suites de variétés de dimension n à courbure de Ricci minorée sont des espaces de longueur complets de dimension de Hausdorff inférieure ou égale à n .

Les exemples suivants sont typiques des phénomènes que nous allons rencontrer. Soit $H(\mathbb{R})$ le groupe de Heisenberg muni de la métrique invariante à gauche définie en l'identité par $g(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z) := \varepsilon_x^2 dx^2 + \varepsilon_y^2 dy^2 + \varepsilon_z^2 dz^2$ et soit $H(\mathbb{Z})$ le sous-groupe discret de $H(\mathbb{R})$ formé des éléments à coefficients entiers, cf. 1.1.

Exemple 2.9. — Soit $g_i := g(\varepsilon_i, \varepsilon_i^2, \varepsilon_i^4)$, alors la suite $(H(\mathbb{R}), g_i, H(\mathbb{Z}), 0)$ converge vers $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, 0)$.

Exemple 2.10. — Soit $g_i := g(1, \varepsilon_i, \varepsilon_i^2)$, alors la suite $(H(\mathbb{R}), g_i, H(\mathbb{Z}), 0)$ converge vers $(\mathbb{R}^3, \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2, 0)$.

DÉFINITION 2.11. — Soit (X_i, Γ_i, x_i) une suite d'espaces métriques pointés munis d'une action d'un sous-groupe fermé du groupe d'isométries de X_i . Les sous-groupes $\Upsilon_i \subset \Gamma_i$ sont dits uniformément ouverts s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, Υ_i contient tous les éléments $g \in \Gamma_i$ tels que $d(gx, x) \leq \varepsilon$ pour tout $x \in B_{1/\varepsilon}(x_i)$.

Exemple 2.12. — Si H_1 est le sous-groupe de $H(\mathbb{Z})$ engendré par $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$, alors $(H(\mathbb{R}), g_i, H_1, 0)$ est une suite de sous-groupes uniformément ouverts pour les métriques de l'exemple 2.10 mais pas pour celles de l'exemple 2.9.

Pour des suites de groupes uniformément ouverts, les indices se comportent de façon continue.

PROPOSITION 2.13. — Soit (X_i, Γ_i, x_i) une suite d'espaces métriques pointés munis d'une action isométrique. Soient $\Upsilon_i^j \subset \Gamma_i$, $j = 1, 2$, deux suites de sous-groupes uniformément ouverts dans Γ_i . Supposons que $\lim(X_i, \Gamma_i, x_i) = (Y, G, y)$ et $\lim(X_i, \Upsilon_i^j, x_i) = (Y, \Upsilon_\infty^j, y)$, $j = 1, 2$. Alors :

a) $\Upsilon_i^1 \cap \Upsilon_i^2$ est une suite de groupes uniformément ouverts dans Γ_i et de plus, $\lim(X_i, \Upsilon_i^1 \cap \Upsilon_i^2, x_i) = (Y, \Upsilon_\infty^1 \cap \Upsilon_\infty^2, y)$;

b) si $g_i \in \Gamma_i$ converge vers $g \in G$, alors $g_i \Upsilon_i^1 g_i^{-1}$ est une suite de groupes uniformément ouverts dans Γ_i et $\lim(X_i, g_i \Upsilon_i^1 g_i^{-1}, x_i) = (Y, g \Upsilon_\infty^1 g^{-1}, y)$;

c) si Υ_i^j est engendré par l'ensemble $\{g \in \Upsilon_i \mid d(gx_i, x_i) \leq R\}$, $j = 1, 2$, pour une constante $R > 0$, et si l'indice de $\Upsilon_\infty^1 \cap \Upsilon_\infty^2$ dans Υ_∞^1 est égal à H , alors $\Upsilon_i^1 \cap \Upsilon_i^2$ est d'indice H dans Υ_i^1 pour i assez grand.

Considérons une suite (X_i, G_i, x_i) convergeant vers (X, G, x) et G' un sous-groupe de G . Il n'est pas vrai en général que G' soit la limite d'une suite de sous-groupes de G_i comme on peut le voir sur l'exemple suivant.

Exemple 2.14. — Soit $(X_i, G_i, x_i) = (p_i S^3, \mathbb{Z}/p_i \mathbb{Z}, x_i)$ où p_i est une suite de nombres premiers tendant vers l'infini, $p_i S^3$ la sphère munie de la métrique canonique dilatée par p_i^2 et où le groupe $\mathbb{Z}/p_i \mathbb{Z}$ agit isométriquement sur S^3 de façon standard en préservant la fibration de Hopf. On voit que (X_i, G_i, x_i) converge vers $(\mathbb{R}^3, \mathbb{Z}, 0)$, où \mathbb{Z} agit sur le premier facteur de \mathbb{R}^3 . Aucun sous-groupe propre de $G = \mathbb{Z}$ n'est limite d'une suite de sous-groupes de $G_i = \mathbb{Z}/p_i \mathbb{Z}$ puisque p_i est premier.

Remarque 2.15. — Dans l'exemple précédent, notons que, pour tout sous-groupe $G' = n\mathbb{Z}$ de $G = \mathbb{Z}$, il existe une suite d'ensemble de générateurs $S_i = \{g_i := n + p_i \mathbb{Z}\}$ de $G_i = \mathbb{Z}/p_i \mathbb{Z}$ tel que g_i converge vers un générateur de G' .

Soit (X, G, x) un espace métrique muni d'un sous-groupe fermé G du groupe des isométries de X et muni d'un point base $x \in X$. Rappelons que $G(R)$ désigne le sous-groupe de G engendré par les éléments $g \in G$ tels que $d(gx, x) \leq R$. La remarque suivante nous sera utile ultérieurement.

Remarque 2.16. — Si X/G est un compact K de diamètre D , alors $G = G(R)$ pour tout $R > 2D$.

Lorsqu'une suite de variétés riemanniennes (M_i, p_i) à courbure de Ricci minorée converge, la limite (X, p_∞) peut être un espace métrique assez singulier. Un moyen de mesurer la régularité de (X, p_∞) consiste à regarder les cônes tangents à X .

DÉFINITION 2.17. — *Soit (X, p) un espace métrique. Un cône tangent à X en p est une limite au sens de Gromov-Hausdorff pointé de $(\lambda_i X, p)$ où λ_i est une suite tendant vers l'infini. On le notera $C_p X$.*

Remarque 2.18. — Il peut exister plusieurs cônes tangents à X en p .

DÉFINITION 2.19. — *Soit (X, p) un espace métrique. Le point p est régulier s'il existe un entier k_p tel que tout cône tangent à X en p est isométrique à \mathbb{R}^{k_p} .*

Remarque 2.20. — Soit (M_i, g_i, p_i) une suite de variétés riemanniennes pointées à courbure de Ricci minorée $\text{Ric} \geq -1$ convergeant vers un espace métrique (X, p_∞) . Alors, l'ensemble des points réguliers de (X, p_∞) est dense, [CC1], section 2..

DÉFINITION 2.21. — *Soit (X_i, p_i) une suite de variétés riemanniennes convergeant au sens de Gromov-Hausdorff vers un espace métrique (X, p_∞) . On dira qu'une suite d'applications $f_i : M_i \rightarrow M_i$ converge vers $f_\infty : X \rightarrow X$ si pour tout $r > 0$, il existe une suite δ_i tendant vers 0 et $S_i \subset B_r(p_i^1)$ tels que*

$$(1) \quad \text{vol}(S_i) \geq (1 - \delta_i) \text{vol}(B_r(p_i^1)),$$

$$(2) \quad f_{i|S_i} \text{ est Gromov-Hausdorff proche de } f_{\infty|B_r(p_\infty^1)}.$$

3. APPROXIMATIONS HARMONIQUES ET THÉORÈMES DE CHEEGER-COLDING

Lorsqu'une suite de variétés riemanniennes (M_i, p_i) de courbure de Ricci minorée converge au sens de Hausdorff-Gromov pointé vers un espace métrique (X, d) , il peut être très utile de réaliser cette convergence par des applications ayant de bonnes propriétés de régularité. Lorsque la limite (X, d) est l'espace euclidien $(\mathbb{R}^k, 0)$ et le minorant de la courbure de Ricci tend vers 0, J. Cheeger et T. Colding ont montré qu'il existe des approximations harmoniques.

THÉORÈME 3.1 ([CC3]). — *Soit (M_i, p_i) une suite de variétés riemanniennes de dimension n de courbure de Ricci minorée, $\text{Ric} \geq -1/i$, convergeant au sens de Hausdorff-Gromov pointé vers $(\mathbb{R}^k, 0)$. Il existe une constante $C(n)$, une suite ε_i telle que $\lim \varepsilon_i = 0$ et une suite de fonctions harmoniques $\{b_1^i, \dots, b_k^i\}$, $b_j^i : B_2(p_i) \rightarrow \mathbb{R}$, telles que*

$$(1) \quad \|\nabla b_j^i\| \leq C(n);$$

$$(2) \quad f_{B_R(p_i)} \Sigma_{j,l} | \langle \nabla b_j^i, \nabla b_l^i \rangle - \delta_{j,l} | + \Sigma_j \|\text{Hess } b_j^i\|^2 \leq \varepsilon_i;$$

(3) *les applications $\Phi_i := (b_1^i, \dots, b_k^i) : M_i \rightarrow \mathbb{R}^k$ réalisent une suite de ε_i -Gromov-Hausdorff approximations entre $B_1(p_i)$ et $B_1(0) \subset \mathbb{R}^k$.*

Démonstration. — Esquissons l’argument dans le cas où $k = 1$. On considère ρ_i tendant vers l’infini tel que la distance de Gromov-Hausdorff entre $B_{4\rho_i}(p_i)$ et $B_{4\rho_i}(0, p_\infty)$ tend vers 0. Sur $\mathbb{R} \times Y$, la projection $\mathbb{B} : \mathbb{R} \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ est la limite, lorsque i tend vers l’infini, des fonctions de Busemann définies par $\mathbb{B}_i(t, y) := d((t, y), (\rho_i, p_\infty)) - d((0, p_\infty), (\rho_i, p_\infty))$. En approximant (ρ_i, p_∞) par $x_i \in M_i$, la suite de fonctions B_i définies sur M_i par $B_i(x) := d_i(x, x_i) - d_i(p_i, x_i)$, où d_i est la distance sur M_i , converge faiblement vers \mathbb{B} . J. Cheeger et T. Colding considèrent la fonction harmonique b_i qui coïncide avec B_i sur le bord de la boule $B_2(p_i)$ et montrent que son gradient ∇b_i est de norme proche de 1 et que son hessien $\text{Hess}(b_i)$ tend vers 0 en moyenne sur $B_2(0, p_\infty)$, i.e.

$$\int_{B_2(p_i)} (|\nabla b_i| - 1 + \text{Hess}(b_i))^2 \leq \varepsilon_i,$$

où $\lim \varepsilon_i = 0$, et de plus $|\nabla b_i| \leq C(n)$. □

Le théorème précédent admet une sorte de réciproque.

LEMME 3.2. — Soit (M_i, p_i) une suite de variétés riemanniennes de dimension n de courbure de Ricci minorée $\text{Ric} \geq -1/i$ telle que $\overline{B_{r_i}(p_i)}$ est compacte avec $\lim r_i = \infty$. Supposons qu’il existe $L > 0$ et des suites de fonctions harmoniques $b_j^i : B_{r_i}(p_i) \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, k$, vérifiant :

(1) les b_j^i sont L -lipschitziennes ;

(2) pour tout $R > 0$, $\lim \int_{B_R(p_i)} |\nabla b_j^i| < \nabla b_j^i, \nabla b_l^i > -\delta_{j,l} = 0$;

alors, quitte à extraire une sous-suite, (M_i, p_i) converge au sens de Gromov-Hausdorff pointé vers $(\mathbb{R}^k \times X, p_\infty)$, où X est un espace métrique et $\Phi_i := (b_1^i, \dots, b_k^i)$ converge vers la projection sur le facteur euclidien \mathbb{R}^k .

Le théorème 3.1 est un outil important dans la théorie de Cheeger-Colding, en particulier pour démontrer les résultats suivants, de presque scindement et de stabilité. Dans un espace métrique X , une ligne désigne un plongement isométrique de \mathbb{R} dans X .

THÉORÈME 3.3 (Presque scindement, [CC1]). — Soit M_i une suite de variétés riemanniennes complètes de courbure de Ricci minorée $\text{Ric} \geq -\varepsilon_i$, où ε_i tend vers 0, telle que (M_i, p_i) converge au sens de Hausdorff-Gromov pointé vers un espace métrique (X, p) . Alors, X est isométrique à $\mathbb{R}^k \times Y$ où Y ne contient pas de ligne.

THÉORÈME 3.4 (Stabilité, [CC2], Théorème A.1.8). — Soit (M_i, p_i) une suite de variétés riemanniennes de dimension n à courbure de Ricci minorée $\text{Ric} \geq -(n-1)$ convergeant vers $(\mathbb{R}^n, 0)$. Alors, pour tout $R > 0$, il existe $i_0(R)$ tel que pour tout $i \geq i_0(R)$, la boule $B_R(p_i)$ est contractile dans $B_{R+1}(p_i)$.

Le théorème 3.1 fournit des estimées intégrales du gradient et du hessien des approximations harmoniques. Il sera utile de pouvoir transformer ces estimées en estimées le long de segments géodésiques. C’est l’objet de l’inégalité du segment, due à Cheeger et Colding.

THÉORÈME 3.5 ([CC1]). — *Pour tout n et $r_0 > 0$, il existe $\tau(n, r_0)$ tel que si M^n est une variété riemannienne de dimension n à courbure de Ricci minorée $\text{Ric} \geq -(n-1)$ et $h : M^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction mesurable positive ou nulle, alors pour tout $r \leq r_0$ et tout $p \in M^n$, on a :*

$$\int_{B_r(p) \times B_r(p)} \int_0^{d(x_1, x_2)} h(c_{x_1, x_2}(t)) dt dx_1 dx_2 \leq \tau.r. \int_{B_{2r}(p)} h(x) dx,$$

où $c_{x_1, x_2}(t)$ désigne un segment géodésique minimal entre x_1 et x_2 .

4. LES OUTILS DE LA DÉMONSTRATION

4.1. Les bases courtes des groupes fondamentaux

Soient M une variété riemannienne, \tilde{M} son revêtement universel et $\tilde{p} \in \tilde{M}$ un point de \tilde{M} se projetant sur $p \in M$. Le groupe fondamental $\pi_1(M, p)$ de M agit sur \tilde{M} et pour $\gamma \in \pi_1(M, p)$, on note $|\gamma| := d(\tilde{p}, \gamma\tilde{p})$, qui est la longueur d'un lacet géodésique sur M en p représentant γ et que l'on appellera longueur de γ_i par abus. On considère une suite d'éléments $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots\}$ de $\pi_1(M, p)$ tels que, quel que soit $i = 1, 2, \dots$, $\gamma_{i+1} \in \pi_1(M, p) \setminus \langle \gamma_1, \dots, \gamma_i \rangle$ est de longueur $|\gamma_{i+1}|$ minimale, où $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_i \rangle$ est le sous-groupe engendré par $\{\gamma_1, \dots, \gamma_i\}$.

DÉFINITION 4.1 ([Gro2]). — *Toute suite ainsi construite s'appelle une base courte de $\pi_1(M, p)$.*

Exemple 4.2. — Dans les deux exemples 2.9 et 2.10, $\{c, b, a\}$ est une base courte de $(H(\mathbb{Z}), g_i)$, où $a = (1, 0, 0)$, $b = (0, 1, 0)$ et $c = (0, 0, 1)$.

Une base courte peut être de cardinal infini. Toutefois, si M est compacte ou si $\pi_1(M, p)$ est engendré par des lacets de longueur bornée, toute base courte de $\pi_1(M, p)$ est finie et forme un système générateur d'après la remarque 0.5 et le fait que $\pi_1(M, p)$ agisse proprement discontinûment sur \tilde{M} . Lorsqu'une variété M de dimension n est à courbure de Ricci minorée, $\text{Ric} \geq -(n-1)$, et de diamètre majoré, $\text{diam}(M) \leq D$, V. Kapovitch et B. Wilking ont montré que les bases courtes sont de cardinal uniformément majoré par une constante $C(n, D)$. Ils montrent en fait le théorème un peu plus général suivant.

THÉORÈME 4.3 ([KW]). — *Il existe une constante $C(n, R)$ telle que, pour toute variété riemannienne M de dimension n dont la boule $B_{2R}(p)$ de centre p et rayon $2R$ est compacte, la courbure de Ricci est minorée, $\text{Ric} \geq -(n-1)$, et telle que $\pi_1(M, p)$ est engendré par des lacets de longueur inférieure à R , alors $\pi_1(M, p)$ possède une famille génératrice de cardinal inférieur à $C(n, R)$. De plus, il existe un point $q \in B_{\frac{R}{2}}(q)$ tel que toute base courte de $\pi_1(M, q)$ possède au plus $C(n, R)$ générateurs.*

Démonstration (Esquisse). — On démontre la deuxième partie de l'énoncé par l'absurde. On considère une suite de variétés (M_i, p_i) à courbure de Ricci minorée, $\text{Ric} \geq -(n-1)$ telle que, pour tout $q_i \in B_{R/2}(p_i)$, le cardinal d'une base courte en q_i est supérieur à 3^i . On peut supposer que (M_i, p_i) converge vers un espace (X, p_∞) et que q_i converge vers un point régulier q_∞ de X .

Notons que, par définition, les générateurs g d'une base courte en q_i tels que $d(gq_i, q_i) \in [\varepsilon, R]$ forment un ensemble ε -séparé dont le cardinal est nécessairement majoré par $P_{n,R}(\frac{1}{\varepsilon})$, où $P_{n,R}$ est un polynôme en $\frac{1}{\varepsilon}$ dont les coefficients dépendent de n, R . En particulier, il suffit, quitte à changer les constantes, et en choisissant $\lambda_i = i$, de contredire l'existence d'une suite (M_i, p_i) telle que, pour tout $q_i \in B_{1/4}(p_i)$ et pour tout $x \in B_{\frac{1}{4\lambda_i}}(q_i)$, le nombre de générateurs d'une base courte de $\pi_1(M_i, x)$ de longueur majorée par $\frac{1}{4\lambda_i}$ est supérieur à 2^i et $(\lambda_i M_i, q_i)$ converge vers le cône tangent de X en q_∞ , $(C_{q_\infty} X, 0) = (\mathbb{R}^k, 0)$. Mais l'existence d'une telle suite permet, à l'aide du lemme 3.2, de construire, pour r_i tendant vers 0 bien choisi, une nouvelle suite « dilatée » $\frac{1}{r_i} M_i$ ayant les mêmes propriétés que M_i et convergeant vers $\mathbb{R}^k \times Z$ où Z est de diamètre non nul. On conclut par récurrence inverse sur la dimension de l'espace limite. \square

Lorsque (M_i, p_i) est une suite de variétés riemanniennes à courbure de Ricci minorée convergeant vers (X, p_∞) , les bases courtes de $\pi_1(M_i, p_i)$ satisfont un principe de dichotomie uniforme :

LEMME 4.4. — *Soit (M_i, p_i) une suite de variétés riemanniennes à courbure de Ricci minorée, $\text{Ric} \geq -(n-1)$, convergeant vers (X, p_∞) et telle que p_∞ est un point régulier. Il existe $\delta > 0$ et une suite ε_i tendant vers 0 tels que si $\{\gamma_{1,i}, \gamma_{2,i}, \dots, \gamma_{l_i,i}\}$ est une base courte de $\pi_1(M_i, p_i)$, alors pour tout j fixé, soit $|\gamma_{j,i}| \leq \varepsilon_i$ et soit $|\gamma_{j,i}| \geq \delta$.*

Exemple 4.5. — Dans la base courte $\{c, b, a\}$ de l'exemple 2.10, les deux premiers générateurs c et b sont de longueur inférieure à ε_i tendant vers 0 et $|a| \geq \delta := 1$.

4.2. Difféomorphismes asymptotiquement isométriques à petite échelle

Soit $f : X \rightarrow Y$ une application entre deux espaces métriques. La distorsion à l'échelle r de f est la fonction définie sur $X \times X$ par

$$(3) \quad dt_r^f(p, q) = \min\{r, |d(p, q) - d(f(p), f(q))|\}.$$

Dans la définition suivante, on considère une suite de difféomorphismes f_i entre des variétés riemanniennes telle que localement, la distorsion moyenne des f_i à petite échelle tend vers 0.

DÉFINITION 4.6. — *Soient (M_i, p_i^1) et (N_i, p_i^2) deux suites de variétés riemanniennes à courbure de Ricci minorée, $\text{Ric} \geq -1$. On dit qu'une suite de difféomorphismes $f_i : M_i \rightarrow N_i$ est asymptotiquement isométrique à petite échelle si les conditions suivantes sont réalisées : il existe des suites r_i et ε_i telles que $\lim r_i = \infty$ et $\lim \varepsilon_i = 0$,*

une constante R_1 , et $B_{2r_i}(p_i^j)' \subset B_{2r_i}(p_i^j)$, $S_i^j \subset B_1(p_i^j)$, $j = 1, 2$, vérifiant les propriétés suivantes.

- (a) Pour tout $q \in B_{r_i}(p_i^j)$, $\text{vol}(B_1(q) \cap B_{2r_i}(p_i^j)') \geq (1 - \varepsilon_i) \text{vol}(B_1(q))$.
- (b) $\text{vol}(S_i^j) \geq \frac{1}{2} \text{vol}(B_1(p_i^j))$, $f_i(S_i^1) \subset B_{R_1}(p_i^2)$ et $f_i^{-1}(S_i^2) \subset B_{R_1}(p_i^1)$.
- (c) Pour tout $p \in B_{r_i}(p_i^1)'$, $q \in B_{r_i}(p_i^2)'$ et $r \in]0, 1]$,

$$\int_{B_r(p) \times B_r(p)} dt_r^{f_i}(x, y) dx dy \leq r \varepsilon_i$$

et

$$\int_{B_r(q) \times B_r(q)} dt_r^{f_i^{-1}}(x, y) dx dy \leq r \varepsilon_i.$$

Une telle suite $f_i : M_i \rightarrow N_i$ sera notée $[M_i, p_i^1] \rightarrow [N_i, p_i^2]$. Remarquons que la définition 4.6 n'impose pas que $f_i(p_i^1) = p_i^2$, mais que la seconde partie de la condition b) dit que la plupart des points de $B_1(p_i^1)$ sont envoyés à distance bornée de p_i^2 et de même pour f_i^{-1} .

L'intérêt de cette définition réside dans les deux propriétés suivantes : une suite de difféomorphismes asymptotiquement isométrique à petite échelle converge, après extraction d'une sous-suite, vers une isométrie et le fait d'être une suite asymptotiquement isométrique à petite échelle est invariant par dilatation de l'espace.

PROPOSITION 4.7. — Soient (M_i, p_i^1) et (N_i, p_i^2) deux suites de variétés riemanniennes à courbure de Ricci minorée $\text{Ric} \geq -1$ et $f_i : [M_i, p_i^1] \rightarrow [N_i, p_i^2]$ une suite de difféomorphismes asymptotiquement isométriques à petite échelle.

(a) Après extraction de sous-suites, (M_i, p_i^1) et (N_i, p_i^2) convergent au sens de Gromov-Hausdorff vers (X_1, p_∞^1) et (X_2, p_∞^2) respectivement et f_i converge faiblement vers une isométrie préservant le volume $f_\infty : X_1 \rightarrow X_2$.

(b) Il existe deux suites ρ_i et δ_i telles que $\lim \rho_i = \infty$ et $\lim \delta_i = 0$, et $T_i^1 \subset B_{\rho_i}(p_i^1)$ vérifiant $\text{vol}(T_i^1 \cap B_1(q)) \geq (1 - \delta_i) \text{vol}(B_1(q))$ pour tout $q \in B_{\rho_i/2}(p_i^1)$ tels que pour tout λ_i tendant vers l'infini et toute suite $q_i \in T_i^1$, la suite $f_i : (\lambda_i M_i, q_i) \rightarrow (\lambda_i N_i, f_i(q_i))$ est asymptotiquement isométrique à toutes les échelles. On dit alors que f_i est asymptotiquement isométrique à toutes les échelles en q_i .

Démonstration. — Rappelons que la convergence faible de f_i vers f_∞ signifie que pour tout $r > 0$, il existe une suite δ_i tendant vers 0 et $S_i \subset B_r(p_i^1)$ tels que $\text{vol}(S_i) \geq (1 - \delta_i) \text{vol}(B_r(p_i^1))$ et $f_i|_{S_i}$ est Gromov-Hausdorff proche de $f_\infty|_{B_r(p_\infty^1)}$, définition 2.21. Donnons juste une esquisse de la démonstration de a). La propriété de petite distorsion en moyenne à toutes les échelles de f_i , cf. définition 4.6 c) entraîne que, pour tout point $p \in B_{r_i}(p_i^1)'$ et tout $r \leq 1$, une grande proportion de l'ensemble des points de $B_r(p)$ est envoyée par f_i à distance inférieure à $2r$ de $f_i(p)$.

LEMME 4.8. — Il existe une constante $C := C(n) > 0$ telle que pour tout $r \leq 1$ et tout $x \in B_{r_i}(p_i^1)'$, il existe une partie $B_r(x)'' \subset B_r(x)$ vérifiant $f_i(B_r(x)') \subset B_{2r}(x)$ et $\text{vol}(B_r(x)') \geq (1 - C\varepsilon_i) \text{vol}(B_r(x))$.

Démonstration. — La démonstration se fait par « récurrence » sur r . Le principe est le suivant. Soit $x \in B_{r_i}(p_i^1)'$; la différentielle de f_i [resp. f_i^{-1}] en x [resp. $f_i(x)$] a une constante de lipschitz majorée par $e^{C_1\varepsilon_i}$, pour i assez grand et C_1 une constante indépendante de i ; donc les conclusions du lemme 4.8 sont vérifiées pour tout r assez petit. Il reste à prouver que si les conclusions du lemme sont vraies pour un $r \leq 1/10$, alors elles le sont aussi pour $10r$. Par hypothèse de récurrence, il existe $B_r(x)'' \subset B_r(x)$ vérifiant $f_i(B_r(x)') \subset B_{2r}(x)$ et $\text{vol}(B_r(x)'') \geq (1 - C_1\varepsilon_i) \text{vol}(B_r(x))$. Par ailleurs, d'après la définition 4.6 c), on a

$$\int_{B_{10r}(x) \times B_{10r}(x)} dt_{10r}^{f_i}(x, y) dx dy \leq 10r\varepsilon_i,$$

ce qui entraîne aisément que

$$\int_{B_r(x)'' \times B_{10r}(x)} dt_{10r}^{f_i}(x, y) dx dy \leq C_2(n)r\varepsilon_i,$$

où $C_2(n)$ dépend à la fois de C_1 et du majorant de $\frac{\text{vol}(B_{10r}(x))}{\text{vol}(B_r(x))}$ pour $r \leq 1$ provenant de l'inégalité de Bishop-Gromov. On déduit de la dernière estimation l'existence d'un ensemble $B_{10r}(x)'' \subset B_{10r}(x)$ de volume $\text{vol}(B_{10r}(x)'') \geq (1 - \frac{C_2(n)\varepsilon_i}{2}) \text{vol}(B_{10r}(x))$ tel que pour tout $q \in B_{10r}(x)''$, il existe $p \in B_r(x)''$ tel que $dt_{10r}^{f_i}(p, q) \leq 2r$. On conclut que $f_i(B_{10r}(x)'') \subset B_{20r}(f_i(x))$ par inégalité triangulaire. \square

Ce lemme permet de montrer que pour tout δ tel que $0 < \delta \leq \frac{1}{10}$, pour tous $x_i, y_i \in B_{r_i}(p_i^1)'$ tels que $d(x_i, y_i) \leq \frac{1}{2}$ et pour $i \geq i_0$ assez grand, on a le contrôle suivant de la distorsion, $|d(f(x_i), f(y_i)) - d(x_i, y_i)| \leq 7\delta$. En effet, soient $B_\delta(x_i)''$ et $B_\delta(y_i)''$ les ensembles définis dans le lemme 4.8. On a

$$\int_{B_\delta(x_i)'' \times B_\delta(y_i)''} dt_1^{f_i}(x, y) dx dy \leq C_2 \int_{B_1(x_i)^2} dt_1^{f_i}(x, y) dx dy \leq C_2\varepsilon_i,$$

où la constante $C_2 := C_2(n, \delta)$ est le majorant de $\frac{\text{vol}(B_1(x_i))^2}{\text{vol}(B_\delta(x_i)'') \cdot \text{vol}(B_\delta(y_i)'')}$ provenant de l'inégalité de Bishop-Gromov. Pour i tel que $C_2\varepsilon_i \leq \delta$, il existe donc $x'_i \in B_\delta(x_i)''$ et $y'_i \in B_\delta(y_i)''$ tels que $dt_1^{f_i}(x'_i, y'_i) \leq \delta$ et, comme $d(f_i(x_i), f_i(x'_i)) \leq 2\delta$ et $d(f_i(y_i), f_i(y'_i)) \leq 2\delta$ d'après le lemme 4.8, on déduit $dt_1^{f_i}(x_i, y_i) \leq 7\delta$. En utilisant la partie b) de la définition 4.6 et le fait que la constante de Lipschitz de $df_i(x)$ et $df_i(x)^{-1}$ est majorée par $e^{C_1\varepsilon_i}$ pour tout $x \in B_{r_i}(p_i^1)'$ pour i assez grand et C_1 une constante indépendante de i , il est aisé de construire une sous-suite de f_i convergeant vers une isométrie f_∞ préservant le volume. \square

Considérons une suite de variétés riemanniennes (M_i, p_i) à courbure de Ricci minorée, $\text{Ric} \geq -1$. La proposition suivante montre que les flots $\phi_{i,t}$ de champs de vecteurs de divergence nulle sur M_i qui sont « presque parallèles » le long de leurs courbes intégrales fournissent des isométries asymptotiques à petite échelle entre $(\lambda_i M_i, p_i)$ et $(\lambda_i M_i, \phi_{i,1}(p_i))$ pour tout λ_i tendant vers l'infini. Un exemple typique de ces champs de vecteurs est le gradient des fonctions harmoniques provenant du théorème 3.1. Pour un

champ de vecteurs X^t dépendant du temps et constant par morceaux par rapport au temps sur une variété riemannienne M et $\alpha > 1$ une constante fixée, on notera

$$(4) \quad u_s(x) := (Mx_2(\|\nabla X^s\|^\alpha)^{1/\alpha}(x),$$

où $Mx_\rho f$ est la fonction maximale de Hardy-Littlewood de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $\rho > 0$ par

$$(5) \quad Mx_\rho f(x) := \sup_{r \leq \rho} \int_{B_r(x)} f.$$

PROPOSITION 4.9. — *Soit (M_i, p_i) une suite de variétés riemanniennes à courbure de Ricci minorée $\text{Ric} \geq -1$ et X_i^t une suite de champs de vecteurs sur M_i de divergence nulle, à support compact, dépendant du temps et constants par morceaux par rapport au temps. On considère une courbe intégrale $c_i : [0, 1] \rightarrow M_i$ de X_i^t $c_i(0) = p_i$ et on suppose que $\lim \int_0^1 u_{i,s}(c_i(t)) dt = 0$, où $u_{i,s}$ est la fonction associée à X_i^t définie par (4). Soit f_i le flot au temps 1 de X_i^t . Alors, pour toute suite λ_i tendant vers l'infini, les difféomorphismes $f_i : [\lambda_i M_i, c_i(0)] \rightarrow [\lambda_i M_i, c_i(1)]$ sont asymptotiquement isométriques à toutes les échelles.*

Démonstration. — Le fait qu'un champ de vecteurs X^t sur une variété M soit « presque parallèle » le long de l'une de ses courbes intégrales $c : [0, 1] \rightarrow M$ permet de contrôler la distorsion moyenne du flot de X au voisinage de $c(0)$, ce que formule le lemme suivant. Avant de l'énoncer notons $dt_r(t)$ la fonction de distorsion du flot ϕ_{tau} de X^t à l'échelle r , définie pour $p, q \in M$ par

$$(6) \quad dt_r(t)(p, q) := \min \{r, \max_{0 \leq \tau \leq t} |d(p, q) - d(\phi_\tau(p), \phi_\tau(q))|\}.$$

LEMME 4.10. — *Soit M^n une variété riemannienne de dimension n à courbure de Ricci minorée, $\text{Ric} \geq -1$ et X^t un champ de vecteurs dépendant du temps, constant par morceaux par rapport au temps, de divergence nulle et à support compact. Soit $c : [0, 1] \rightarrow M^n$ une courbe intégrale de X^t , avec $c(0) = p_0$. Posons $\varepsilon := \int_0^1 Mx_1(\|\nabla X^t\|)(c(t)) dt$, alors pour tout $r \leq \frac{1}{10}$*

$$(7) \quad \int_{B_r(p_0) \times B_r(p_0)} dt_r(1)(p, q) dpdq \leq Cr\varepsilon,$$

et il existe un sous-ensemble $B_r(p_0)' \subset B_r(p_0)$ tel que $\text{vol}(B_r(p_0)') \geq (1 - C\varepsilon) \text{vol}(B_r(p_0))$ et $\phi_t(B_r(p_0)') \subset B_{2r}(c(t))$ pour tout $t \in [0, 1]$, où $C := C(n)$ est une constante dépendant de la dimension de M^n .

Démonstration (Esquisse). — Supposons pour simplifier que $X^t = X$ est indépendant du temps. La démonstration du lemme se fait par récurrence sur r de la façon suivante. Pour r assez petit, le lemme est vérifié puisque la différentielle de ϕ_t a une constante de bilipschitz majorée par $e^{\int_0^t \|\nabla X\|(c(s)) ds}$. On suppose que le lemme est vrai pour tout $\frac{r}{10} \leq 1/100$ et on montre qu'il est vérifié pour r . En utilisant l'hypothèse de récurrence et

le fait que $dt'_r(s)(p, q) \leq dt'_r(0)(\phi_s(p), \phi_s(q))$ et $dt'_r(0)(p, q) \leq d(p, q) \int_0^1 \|\nabla X\|(\gamma_{pq}(t)) dt$, on peut déduire, en utilisant l'inégalité du segment, théorème 3.5, que

$$(8) \quad \int_{B_{\frac{r}{10}}(p_0)' \times B_r(p_0)} dt_r(1)(p, q) dpdq \leq C_1(n)r\varepsilon.$$

L'ensemble $B_r(p_0)' := \{p \in B_r(p_0) \mid \int_{B_{\frac{r}{10}}(p_0)'} dt_r(1)(p, q) dq \leq r/2\}$ est donc de volume $\text{vol}(B_r(p_0)') \geq (1 - 2C_1(n)\varepsilon) \text{vol}(B_r(p_0))$ et satisfait alors $\phi_t(B_r(p_0)') \subset B_{2r}(c(t))$. En appliquant à nouveau l'argument donnant (8), on obtient,

$$(9) \quad \int_{B_r(p_0)' \times B_r(p_0)} dt_r(1)(p, q) dpdq \leq C_2(n)r\varepsilon,$$

et par l'inégalité triangulaire et le théorème de Bishop-Gromov,

$$(10) \quad \int_{B_r(p_0) \times B_r(p_0)} dt_r(1)(p, q) dpdq \leq C_3(n)r\varepsilon.$$

□

On déduit aisément la proposition 4.9 de ce lemme. En effet, soit λ_i une suite de réels tendant vers l'infini. Pour tout $R > 0$, soit $r_i := \frac{R}{\lambda_i}$. D'après le lemme 4.10, il existe une suite $S_i \subset B_{r_i}(c_i(0))$ telle que $\text{vol}(S_i) \geq (1 - \delta_i) \text{vol}(B_{r_i}(c_i(0)))$ et $\phi_{i,t}(S_i) \subset B_{2r_i}(c_i(t))$ pour tout $t \in [0, 1]$. Le fait que le flot $\phi_{i,t}$ de X_i préserve le volume et le théorème de Bishop-Gromov entraîne alors que

$$\begin{aligned} \int_{S_i} \int_0^1 Mx_1(\|\nabla X_i\|)(\phi_{it}(p)) dt dp &= \int_0^1 \int_{\phi_{i,t}(S_i)} Mx_1(\|\nabla X_i\|)(p) dp dt \\ &\leq C \int_0^1 \left(\int_{B_{2r_i}(c_i(t))} Mx_1(\|\nabla X_i\|)(p) dp \right) dt \\ &\leq C \int_0^1 Mx_1(Mx_1(\|\nabla X_i\|))(c_i(t)) dt. \end{aligned}$$

On déduit, en remarquant que sur une variété M^n à courbure de Ricci minorée, la fonction maximale de Hardy-Littlewood satisfait, pour toute fonction $f \geq 0$,

$$(11) \quad Mx_\rho[Mx_\rho(f)](p) \leq C(n, \alpha) (Mx_{2\rho}[f^\alpha](p))^{1/\alpha},$$

que

$$\int_{S_i} \int_0^1 Mx_1(\|\nabla X_i\|)(\phi_{i,t}(p)) dt dp \leq C.C(n, \alpha) \int_0^1 (Mx_2[(\|\nabla X_i\|)^\alpha](c_i(t)))^{1/\alpha} dt,$$

et donc que $\int_{S_i} \int_0^1 Mx_1(\|\nabla X_i\|)(\phi_{it}(p)) dt dp$ tend vers 0, et de même en remplaçant $r_i = \frac{R}{\lambda_i}$ par $r_i = \frac{R_i}{\lambda_i}$ avec R_i tendant vers l'infini. On conclut en appliquant le lemme 4.10 sur un ensemble $B_{r_i}(p_i)$ de grand volume relatif de S_i . □

Les suites de difféomorphismes isométriques à petite échelle apparaissent naturellement dans la situation suivante. On considère une suite (M_i, p_i) convergeant au sens de Hausdorff-Gromov pointé vers $(\mathbb{R}^k \times Y, (0, p_\infty))$. Les translations de \mathbb{R}^k agissent sur l'espace limite $\mathbb{R}^k \times Y$ et il est alors possible de « relever » ces isométries en des isométries asymptotiques à petite échelle de M_i :

PROPOSITION 4.11. — Soit (M_i, g_i, p_i) une suite de variétés riemanniennes à courbure de Ricci minorée $\text{Ric} \geq -1/i$ convergeant vers $(\mathbb{R}^k \times Y, (0, p_\infty))$. Alors pour tout $v \in \mathbb{R}^k$, il existe une suite de difféomorphismes asymptotiquement isométriques à petite échelle $f_i : [M_i, p_i] \rightarrow [M_i, p_i]$, isotopes à l'identité et convergeant faiblement vers une isométrie f_∞ de $\mathbb{R}^k \times Y$ agissant trivialement sur Y et comme la translation de vecteur v sur \mathbb{R}^k .

Démonstration (Esquisse). — Pour simplifier, on suppose $k = 1$. On considère la fonction harmonique $b_i : M_i \rightarrow \mathbb{R}$ construite comme dans le théorème 3.1. On vérifie que $X_i = \nabla b_i$ satisfait les hypothèses du lemme 4.10, donc pour tout $v \in \mathbb{R}$, le flot $\phi_{i,v}$ de X_i est asymptotiquement isométrique à petite échelle. La proposition 4.7 permet alors de conclure que $\phi_{i,v}$ converge vers une isométrie de $\mathbb{R} \times K$ et celle-ci agit par translation de v sur le facteur \mathbb{R} et trivialement sur K . \square

La proposition suivante s'en déduit aisément.

PROPOSITION 4.12. — Soit (M_i, g_i, p_i) une suite de variétés riemanniennes à courbure de Ricci minorée $\text{Ric} \geq -1/i$ convergeant vers $(\mathbb{R}^k \times K, p_\infty)$ où K est compact. Soit $f_i : [\tilde{M}_i, \tilde{p}_i] \rightarrow [\tilde{M}_i, \tilde{p}_i]$ une suite de difféomorphismes asymptotiquement isométriques à petite échelle, où \tilde{p}_i est un relevé de p_i . Il existe une suite d'entiers $\{\nu_b\}_{b \in \mathbb{N}}$, une suite d'éléments $g_b \in \pi_1(M_{i(b)})$, une suite de difféomorphismes asymptotiquement isométriques à petite échelle $h_b : [\tilde{M}_{i(b)}, \tilde{p}_{i(b)}] \rightarrow [\tilde{M}_{i(b)}, \tilde{p}_{i(b)}]$ isotopes à l'identité et une sous-suite $\{f_{i(b)}\}$ de $\{f_i\}$ telles que $(h_b \circ f_{i(b)})^{\nu_b} \circ g_b$ converge faiblement vers l'identité. De plus, si les f_i normalisent $\pi_1(M_i)$, il en est de même de $(h_b \circ f_{i(b)})^{\nu_b} \circ g_b$.

4.3. Renormalisation

Considérons une suite de variétés riemanniennes pointées (M_i, p_i) à courbure de Ricci minorée et une suite d'isométries f_i de M_i telle que la distance $d(f_i(p_i), p_i) = 1$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que (M_i, p_i) converge au sens de Gromov-Hausdorff vers un espace métrique (X, p) et f_i vers une isométrie de (X, p) . Lorsque l'on dilate la métrique sur M_i par un facteur λ_i tendant vers l'infini, on peut encore supposer que $(\lambda_i M_i, p_i)$ converge au sens de Gromov-Hausdorff vers (Y, q) , mais la nouvelle distance $\lambda_i d(f_i(p_i), p_i) = \lambda_i$ tend vers l'infini et f_i ne converge pas. Le théorème suivant permet de remédier à cet inconvénient.

THÉORÈME 4.13. — Soit (M_i, g_i, p_i) une suite de variétés riemanniennes de dimension n à courbure de Ricci minorée $\text{Ric} \geq -\mu_i$ telle que $\overline{B_{r_i}(p_i)}$ est compacte, où $\lim \mu_i = 0$ et $\lim r_i = \infty$. Supposons que (M_i, g_i, p_i) converge au sens de Gromov-Hausdorff vers $(\mathbb{R}^k, 0)$, où $k < n$. Alors quitte à extraire une sous-suite, il existe un espace métrique compact K de diamètre 10^{-n^2} , une suite de sous-ensembles $G_1(p_i) \subset B_1(p_i)$ vérifiant $\lim \frac{\text{vol}(G_1(p_i))}{\text{vol}(B_1(p_i))} = 1$ et une suite λ_i tendant vers l'infini tels que :

- (i) pour tout point $q_i \in G_1(p_i)$, la limite de $(\lambda_i M_i, q_i)$ est isométrique à $\mathbb{R}^k \times K$;
- (ii) pour toute suite de points a_i et b_i appartenant à $G_1(p_i)$, il existe une suite de difféomorphismes asymptotiquement isométriques à petite échelle $\varphi_i : [\lambda_i M_i, a_i] \rightarrow [\lambda_i M_i, b_i]$

telle que φ_i est isotope à l'identité; de plus, pour tous relevés \tilde{a}_i et \tilde{b}_i sur le revêtement universel \tilde{M}_i de M_i , il existe un relevé $\tilde{\varphi}_i : [\lambda_i \tilde{M}_i, \tilde{a}_i] \rightarrow [\lambda_i \tilde{M}_i, \tilde{b}_i]$ de φ_i asymptotiquement isométrique à petite échelle;

(iii) si les groupes fondamentaux $\pi_1(M_i, p_i)$ sont engendrés par des lacets de longueur uniformément majorée, alors $\pi_1(M_i, q_i)$ est engendré par des lacets de longueur majorée par $\frac{1}{\lambda_i}$ pour i assez grand et pour tout $q_i \in G_1(p_i)$.

Démonstration (Esquisse). — Le théorème 3.1 fournit une suite d'applications harmoniques uniformément $C(n)$ -lipschitziennes

$$\Phi_i = (b_1^i, \dots, b_k^i) : B_i(p_i) \subset M_i \rightarrow B_{i+1}(0) \subset \mathbb{R}^k$$

réalisant des $\frac{1}{2^i}$ -approximations entre $B_i(p_i)$ et $B_i(0)$ et telles que $f_{B_R(p_i)} h_i \leq \varepsilon_i$ pour tout $R, 0 < R \leq i$, où $h_i : M_i \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction définie par

$$h_i := \sum_{j,l} | \langle \nabla b_j^i, \nabla b_l^i \rangle - \delta_{j,l} | + \sum_j \| \text{Hess } b_j^i \|^2,$$

et $\lim \varepsilon_i = 0$. La courbure de Ricci étant supposée minorée, M_i vérifie une propriété de doublement local du volume et les propriétés de Φ_i sont alors invariantes par changements d'échelles. En fait, pour toute fonction h_i définie sur M_i , les fonctions maximales de Hardy-Littlewood $Mx_\rho h_i(x) := \sup_{r \leq \rho} f_{B_r(x)} h_i$ vérifient les mêmes propriétés que si M_i était l'espace euclidien, cf. [Ste]. Précisément, en notant $G_4(p_i) := \{x \in B_4(p_i) \mid Mx_4(h_i) \leq \varepsilon_i^2\}$ et, pour tout point $q \in B_2(p_i)$ et $r \leq 2$, $G_r(q) := B_r(q) \cap G_4(p_i)$, nous avons

$$\lim \frac{\text{vol } G_1(p_i)}{\text{vol } B_1(p_i)} = 0.$$

Pour tout $q_i \in G_1(p_i)$, soit $\rho(q_i)$ le supremum des $\rho \in]0, 1[$ tel que la distorsion de $\Phi_i : B_\rho(q_i) \rightarrow \mathbb{R}^k$ est égale à $\rho \cdot 10^{-n^2}$. Le lemme 3.2 assure alors que, pour tout point $q_i \in G_1(p_i)$, $(\frac{1}{\rho_i(q_i)} M_i, q_i)$ converge vers $\mathbb{R}^k \times Y$ où Y est un espace métrique compact de diamètre 10^{-n^2} qui dépend a priori des points q_i . Il est aisé de voir que $\rho_i := \sup_{q_i \in G_1(p_i)} \rho(q_i)$ tend vers 0 (c'est encore une application du lemme 3.2), et on pose $\lambda_i := \frac{1}{\rho_i}$. Le théorème 4.13 est une conséquence du lemme suivant.

LEMME 4.14. — *Il existe des constantes $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ et $L > 1$ (indépendantes de i) telles que pour tout $p \in G_1(p_i)$, tout $r \leq 2$, il existe un sous-ensemble $B_r(p)' \subset B_r(p)$ de volume $\text{vol } B_r(p)' \geq (1 - C_1 r \varepsilon_i) \text{vol } B_r(p)$ et tel que pour tout $q \in B_r(p)'$, il existe un point $p' \in B_{L\rho_i}(p)$ et un champ de vecteurs dépendant du temps (et de q) X_i^t dont la courbe intégrale $c_{i,q} : [0, 1] \rightarrow B_2(p)$ vérifie $c_{i,q}(0) = p'$, $c_{i,q}(1) = q$ et*

$$\frac{1}{\text{vol } B_r(p)'} \int_{B_r(p)'} \int_0^1 (Mx_2(\|\nabla X_i^t\|^{3/2})^{2/3}(c_{i,q}(t))) dt dq \leq C_2 r \varepsilon_i.$$

En effet, choisissons des points $x_i, y_i \in G_1(p_i)$. D'après le lemme 4.14, $\text{vol}(B_2(x_i)' \cap B_2(y_i)') > 0$ pour i assez grand et il existe donc $q \in B_2(x_i)' \cap B_2(y_i)'$, $x_i' \in B_{L\rho_i}(x_i)$ et $y_i' \in B_{L\rho_i}(y_i)$ et un champ de vecteurs X_i^t dont la courbe intégrale $c_i : [0, 1] \rightarrow B_2(p_i)$ vérifie $c_i(0) = x_i'$, $c_i(\frac{1}{2}) = q$ et $c_i(1) = y_i'$. De plus, $\int_0^1 (Mx_2(\|\nabla X_i^t\|^{3/2})^{2/3} dt \leq C_3 \varepsilon_i$ pour une constante C_3 dépendant de C_1 et C_2 mais indépendante de i . La proposition 4.9

permet alors de conclure que la suite des flots au temps 1 de ces champs de vecteurs, $\varphi_i : [\lambda_i M_i, x_i] \rightarrow [\lambda_i M_i, y_i]$, sont asymptotiquement isométriques à petite échelle pour $\lambda_i = \frac{1}{\rho_i}$. Cela montre la partie (ii) du théorème 4.13 et (i) s'en déduit puisque φ_i converge vers une isométrie d'après la proposition 4.7. La partie (iii) découle de l'observation suivante. Pour tout $q \in G_1(p_i)$, notons $r_i(q)$ l'infimum des $r > 0$ tels que $\pi_1(M_i, q)$ est engendré par des lacets de longueur inférieure à r . Posons $r_i := \sup_{q \in G_1(p_i)} r_i(q)$ et choisissons q_i tel que $r(q_i) \geq \frac{9}{10}r_i$. Si $\lambda_i r_i \geq 1/4$ pour une sous-suite, alors d'après le lemme 3.2, $(\frac{1}{r_i} M_i, q_i)$ convergerait, après extraction d'une sous-suite, vers $(\mathbb{R}^k \times K', q_\infty)$ où $\text{diam } K' \leq 4.10^{-n^2}$ ce qui entraînerait que $\pi_1(\frac{1}{r_i} M_i, q_i)$ serait engendré, pour i assez grand, par des lacets de longueur majorée par $2 \text{diam } K' + c_i \leq 4/5 + c_i$ avec $\lim c_i = 0$ contredisant le fait que $\pi_1(\frac{1}{r_i} M_i, q_i)$ a un générateur de longueur supérieure à $9/10$.

La preuve du lemme 4.14 est un peu technique, en voici très schématiquement l'idée. On fait encore une « récurrence » sur r . Pour R assez petit, il suffit de prendre $X = 0$. Supposons que les conclusions du lemme sont vérifiées pour $r \in [\rho_i, \frac{2}{L}]$ et montrons qu'elles restent vraies pour Lr . L'idée consiste à construire un premier champ de vecteurs X_1 dont la courbe intégrale $c_1(t)$ issue de $q = c_1(0) \in B_{Lr}(p)$ « atterrit » dans $B_r(p)$, i.e $c_1(1/2) \in B_r(p)$, et à appliquer l'hypothèse de récurrence pour obtenir un second champ de vecteurs X_2 dont la courbe intégrale $c_2(t)$ vérifie $c_2(1/2) = c_1(1/2)$ et $c_2(1) \in B_{\rho_i r}(p)$. Il suffit alors de considérer le champ de vecteurs $X := X^t$ tel que $X^t = X_1$ pour $0 \leq t \leq 1/2$ et $X^t = X_2$ pour $1/2 \leq t \leq 1$. Pour construire X_1 , on choisit un ensemble $r/2$ -séparé maximal $\{q_1, \dots, q_l\}$ de B_{Lr} . D'après le théorème de Bishop-Gromov, le cardinal l de cet ensemble est uniformément majoré et pour tout q_m , le champ de vecteurs

$$X_1(x) := \sum_{\alpha=1}^k (b_\alpha^i(p) - b_\alpha^i(q_m)) \nabla b_\alpha^i(x)$$

vérifie donc les propriétés suivantes :

$$(12) \quad |X_1(x)| \leq C(n)Lr,$$

$$(13) \quad Mx_4(\|\nabla X_1\|)^2(p) \leq C\varepsilon_i^2 L^2 r^2.$$

Rappelons que M_i converge vers \mathbb{R}^k et que l'application (b_1^i, \dots, b_k^i) est une approximation de Gromov-Hausdorff entre M_i et \mathbb{R}^k , donc le champ de vecteurs X_1 se comporte comme le « champ de vecteurs constant $\overrightarrow{q_m p}$ ». La propriété (11) et le lemme 4.10 permettent de construire, en choisissant $L = 9^n$, pour tout m , un sous-ensemble $B_{r/2}(q_m)''$ de volume $\text{vol}(B_{r/2}(q_m)') \geq (1 - C(n)\varepsilon_i) \text{vol}(B_{r/2}(q_m))$ tel que $\phi_{1/2}(q) \in B_r(p)$ pour tout $q \in B_{r/2}(q_m)''$ et

$$\int_{B_{r/10}(q_m)} \int_0^1 (Mx_2(\|\nabla X\|^\alpha))^{1/\alpha} (\phi_t(x)) dx \leq C(n)r\varepsilon_i,$$

avec $\alpha = 3/2$, ce qui permet de conclure. □

5. LE LEMME DE MARGULIS

5.1. Récurrence

La démonstration par l'absurde du théorème 0.3 repose sur le théorème suivant.

THÉORÈME 5.1. — *Soit (M_i, p_i) une suite de variétés à courbure de Ricci vérifiant $\text{Ric} \geq \mu_i$ où $\lim \mu_i = 0$ et qui converge vers $(\mathbb{R}^k \times K, (0, p_\infty))$ où K est compact. On suppose qu'il existe $R > 0$ tel que le morphisme naturel $\pi_1(B_R(p_i)) \rightarrow \pi_1(M_i)$ est surjectif. On suppose aussi qu'il existe une famille de difféomorphismes asymptotiquement isométriques à petite échelle $f_j^i : [\tilde{M}_i, \tilde{p}_i] \rightarrow [\tilde{M}_i, \tilde{p}_i]$, $j = 1, \dots, k$, qui normalisent $\pi_1(M_i)$. Alors, il existe une constante C telle que pour $i \geq i_0$ assez grand, $\pi_1(M_i)$ contient un sous-groupe nilpotent N_i d'indice majoré par C ayant une chaîne nilpotente cyclique de longueur $p \leq (n - k)$ préservée par les $(f_j^i)^{C!}$, i.e $N_0^i = \{e\} \triangleleft N_1^i \triangleleft \dots \triangleleft N_p^i = N_i$ et l'action de $(f_j^i)^{C!}$ induite par conjugaison sur N_{h+1}/N_h est l'identité.*

Démonstration. — On raisonne par récurrence inverse sur k ; rappelons que $k \leq n$. Lorsque $k = n$, c'est-à-dire que (M_i, p_i) converge vers $(\mathbb{R}^n, 0)$, le théorème 3.4 permet de conclure que $\pi_1(M_i)$ est trivial pour i assez grand puisque, par hypothèse, $\pi_1(M_i)$ est un quotient de $\pi_1(B_R(p_i))$.

On suppose que le théorème 5.1 est vrai pour tout k' tel que $0 \leq k < k' \leq n$ et nous voulons l'établir pour k .

On raisonne par l'absurde : on suppose que (M_i, p_i) converge vers $(\mathbb{R}^k \times K, (0, p_\infty))$ avec $k < n$ et, pour tout i , tout sous-groupe de $\pi_1(M_i)$ d'indice majoré par i ne contient pas de chaîne nilpotente cyclique de longueur majorée par $n - k$ préservée par les $(f_j^i)^{i!}$, et on va démontrer l'existence d'une sous-suite de M_i , encore notée M_i , telle que $\pi_1(M_i)$ satisfait les conclusions du théorème pour une constante C et pour $i \geq i_0$.

Pour faire fonctionner l'argument de récurrence sur k , il est important que K ne soit pas réduit à un point; en effet, si $\lim(M_i, p_i) = (\mathbb{R}^k \times K, (0, p_\infty))$ et K n'est pas réduit à un point, on peut dilater M_i de sorte que $\lim(\mu_i M_i, p_i) = (\mathbb{R}^k \times C_{p_\infty} K, (0, p_\infty))$, où le cône tangent $C_{p_\infty} K$ de K contient au moins un facteur \mathbb{R} supplémentaire. Il faut en même temps « garder » les difféomorphismes asymptotiquement isométriques à petite échelle f_j^i , ce que fait la proposition suivante.

PROPOSITION 5.2. — *Soit (M_i, p_i) une suite de variétés à courbure de Ricci vérifiant $\text{Ric} \geq \mu_i$ où $\lim \mu_i = 0$ et qui converge vers $(\mathbb{R}^k, 0)$. On suppose qu'il existe $R > 0$ tel que le morphisme naturel $\pi_1(B_R(p_i)) \rightarrow \pi_1(M_i)$ est surjectif. On suppose aussi qu'il existe une famille de presque-isométries à toutes les échelles $f_j^i : [\tilde{M}_i, \tilde{p}_i] \rightarrow [\tilde{M}_i, \tilde{p}_i]$, $j = 1, \dots, k$, qui normalisent $\pi_1(M_i)$. Alors, il existe une suite λ_i tendant vers l'infini, un point $q_i \in B_{1/2}(p_i)$ tels que $(\lambda_i M_i, q_i)$ converge vers $(\mathbb{R}^k \times K, (0, p_\infty))$ où K est un compact de diamètre égal à 10^{-n^2} , et une suite de difféomorphismes asymptotiquement isométriques à petite échelle $\tilde{f}_j^i : [\tilde{M}_i, \tilde{q}_i] \rightarrow [\tilde{M}_i, \tilde{q}_i]$, $j = 1, \dots, k$ telle que \tilde{f}_j^i est isotope*

à f_j^i et normalise $\pi_1(M_i)$. De plus, $\pi_1(\lambda_i M_i, q_i)$ est engendré par des lacets de longueur majorée par 1.

Démonstration. — Notons $\bar{f}_j^i : [M_i, p_i] \rightarrow [M_i, p_i]$ la suite de difféomorphismes asymptotiquement isométriques à petite échelle induite par f_j^i sur M_i . À l'aide du théorème 4.13 et de la proposition 4.7, on peut trouver un point $q_i \in G_{1/2}(p_i) \cap T_i^1$ tel que $f_j^i(q_i) \in G_1(p_i)$ et les f_j^i sont asymptotiquement isométriques à petite échelle en q_i , et une suite λ_i tendant vers l'infini de sorte que, après extraction éventuelle d'une sous-suite, $\lim(\lambda_i M_i, q_i) = (\mathbb{R}^k \times K, (0, q_\infty))$ où le diamètre de K vérifie $\text{diam}(K) = 10^{-n^2}$ et $f_j^i : [\lambda_i M_i, q_i] \rightarrow [\lambda_i M_i, f_j^i(q_i)]$ est encore une suite asymptotiquement isométrique à petite échelle. La partie (ii) du théorème 4.13 entraîne également l'existence d'une suite de difféomorphismes asymptotiquement isométriques à petite échelle $g_j^i : [\lambda_i M_i, f_j^i(q_i)] \rightarrow [\lambda_i M_i, q_i]$ qui sont isotopes à l'identité; en relevant q_i et \tilde{g}_j^i à \tilde{M}_i , et en remplaçant f_j^i par $\tilde{f}_j^i := \tilde{g}_j^i \circ f_j^i$, on obtient une nouvelle suite $(\lambda_i M_i, q_i)$ et une famille $\tilde{f}_j^i, j = 1, \dots, k$ vérifiant les hypothèses du théorème 5.1 avec $\lim(\lambda_i M_i, q_i) = (\mathbb{R}^k \times K, (0, q_\infty))$ où le diamètre de K vérifie $\text{diam}(K) = 10^{-n^2}$. Enfin, par hypothèse, $\pi_1(M_i, p_i)$ est engendré par des lacets de longueur majorée par $2R$, cf. remarque 0.5, donc la partie (iii) du théorème 4.13 entraîne que $\pi_1(\lambda_i M_i, q_i)$ est encore engendré par des lacets de longueur uniformément majorée par 1. \square

Un point important dans la conclusion du théorème 5.1 est le fait que les f_j^i préservent la suite cyclique nilpotente du sous-groupe N_i de $\pi_1(M_i)$. Les différents sous-groupes de cette suite correspondent « moralement » à des échelles différentes auxquelles les longueurs des générateurs de N_i tendent vers 0. Une façon de s'assurer que les f_j^i respectent cette filtration est de savoir que f_j^i converge vers l'identité. La proposition 4.12 permet de se ramener à ce cas.

Grâce à la remarque précédente et à la proposition 5.2, nous pouvons dorénavant supposer que (M_i, p_i) satisfait les hypothèses du théorème 5.1 avec de plus $\lim(M_i, p_i) = (\mathbb{R}^k \times K, (0, p_\infty))$ où le diamètre de K est égal à 10^{-n^2} et les f_j^i convergent vers l'identité.

Notons $\Gamma_i := \pi_1(M_i, p_i)$ et choisissons \tilde{p}_i un relevé de p_i sur le revêtement universel \tilde{M}_i de M_i . Soit $\Gamma_{i,\varepsilon} := \langle \{\gamma \in \Gamma_i / d(\tilde{p}_i, \gamma \tilde{p}_i) \leq \varepsilon\} \rangle$ le sous-groupe de Γ_i engendré par les lacets en p_i de longueur majorée par ε . On considère une base courte $\{d_1^i, d_2^i, \dots, d_{\sigma_i}^i\}$ de Γ_i ; par hypothèse et d'après 0.5 la longueur des d_j^i est majorée par $2R$ donc d'après le théorème 4.3, le cardinal de ces bases courtes est uniformément majoré, $\sigma_i \leq \sigma$. On peut supposer, quitte à extraire une sous-suite encore notée M_i , que $\{d_1^i, d_2^i, \dots, d_\sigma^i\}$ est une base courte de Γ_i avec σ fixé. De plus, d'après le lemme 4.4, en choisissant $(0, p_\infty)$ un point régulier de $\mathbb{R}^k \times K$, cf. 2.19, on peut supposer qu'il existe $\varepsilon > 0, \tau$ tel que $1 \leq \tau \leq \sigma$ et ε_i tendant vers 0 tels que $|d_j^i| \leq \varepsilon_i$ si $1 \leq j \leq \tau$ et $|d_j^i| \geq \varepsilon$ si $\tau < j$. En particulier, $\Gamma_{i,\varepsilon} = \Gamma_{i,\varepsilon_i}$.

Nous pouvons supposer, quitte à extraire une sous-suite, que l'indice $[\Gamma_i : \Gamma_{i,\varepsilon}]$ tend vers l'infini. En effet, dans le cas contraire, il existe C tel que $[\Gamma_i : \Gamma_{i,\varepsilon}] \leq C$ et en

remplaçant $M_i = \tilde{M}_i/\Gamma_i$ par $\tilde{M}_i/\Gamma_{i,\varepsilon}$ on peut supposer que $\Gamma_i = \Gamma_{i,\varepsilon}$; on suppose également que p_i converge vers p_∞ un point régulier de K , quitte à déplacer légèrement p_i . On renormalise alors M_i en choisissant λ_i tendant vers ∞ suffisamment lentement pour que $\pi_1(\lambda_i M_i, p_i)$ soit engendré par des lacets de longueur majorée par 1 et telle que $\lim(\lambda_i M_i, p_i) = (\mathbb{R}^k \times C_{p_\infty} K, 0) = \mathbb{R}^{k'}$ avec $k' > k$ puisque p_∞ est un point régulier de K . On conclut alors en utilisant l'hypothèse de récurrence. On peut donc supposer que l'indice $[\Gamma_i : \Gamma_{i,\varepsilon}]$ tend vers l'infini et les applications f_j^i convergent vers l'identité.

L'idée à présent est que l'on peut se ramener au cas où $\Gamma_{i,\varepsilon}$ est distingué dans Γ_i et $\Gamma_i/\Gamma_{i,\varepsilon}$ est abélien.

PROPOSITION 5.3. — *Il existe une constante H , une suite de sous-groupes $\Upsilon_i \subset \Gamma_{i,\varepsilon}$ d'indice $[\Gamma_{i,\varepsilon} : \Upsilon_i] \leq H$ tel que Υ_i est normalisé par un sous-groupe Γ'_i de Γ_i d'indice majoré par H tel que Γ'_i/Υ_i est abélien.*

Démonstration. — La proposition 5.3 va se déduire des propriétés des actions limites de Γ_i et $\Gamma_{i,\varepsilon}$. Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que $\lim(\tilde{M}_i, \Gamma_i, \tilde{p}_i) = (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \times \tilde{K}, G, (0, p_\infty))$ et $\lim(\tilde{M}_i, \Gamma_{i,\varepsilon}, \tilde{p}_i) = (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \times \tilde{K}, G_\varepsilon, (0, p_\infty))$. La situation idéale serait que G_ε soit distingué dans G et d'en déduire que $\Gamma_{i,\varepsilon}$ est distingué dans Γ_i , mais cela n'est pas vrai. L'idée consiste alors à appliquer le théorème de Bieberbach à l'action de G sur le facteur euclidien \mathbb{R}^l et à remplacer G par un sous-groupe G' d'indice fini ayant de gros quotients abéliens.

L'action de G sur le premier facteur euclidien \mathbb{R}^k est triviale et cocompacte sur $\mathbb{R}^l \times \tilde{K}$. On considère à présent seulement l'action de G sur $\mathbb{R}^l \times \tilde{K}$. Le sous-groupe G_ε de G n'a pas de raison d'être distingué. Cependant, notons $pr : \text{Isom}(\mathbb{R}^l \times K) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{R}^l)$ la projection du groupe d'isométries de $\mathbb{R}^l \times K$ sur le premier facteur ; $pr(G)$ est alors un sous-groupe fermé de $\text{Isom}(\mathbb{R}^l)$ (puisque le noyau de pr est compact) et la version de K. Fukaya et T. Yamaguchi du théorème de Bieberbach, [FY], théorème 4.1, fournit un sous-groupe distingué $G' \triangleleft G$ d'indice fini de G tel que $pr(G')/pr(G)_0$ est abélien libre de type fini, où $pr(G)_0$ est la composante connexe de l'identité de $pr(G)$. Notons que $G'_\varepsilon := G_\varepsilon \cap G'$ est d'indice fini dans G_ε . En remarquant que $pr(G)_0 \subset pr(G'_\varepsilon) \subset pr(G')$, on constate par ailleurs que $pr(G'_\varepsilon)$ est distingué dans $pr(G')$, de sorte que $\hat{G}_\varepsilon := G' \cap pr^{-1}(pr(G'_\varepsilon))$ est distingué dans G' . De plus, pr ayant un noyau compact, le quotient $\hat{G}_\varepsilon/G'_\varepsilon$ est compact, et comme G'_ε est ouvert, $\hat{G}_\varepsilon/G'_\varepsilon$ est discret et donc fini. On conclut de cette discussion que $G'_\varepsilon \subset \hat{G}_\varepsilon \subset G'$, où G'_ε est d'indice fini H_1 dans \hat{G}_ε et \hat{G}_ε est distingué dans G' . En particulier, pour tout $g \in G'$, $gG'_\varepsilon g^{-1}$ est un sous-groupe d'indice H_1 dans \hat{G}_ε et l'indice $[G'_\varepsilon : gG'_\varepsilon g^{-1} \cap G'_\varepsilon] \leq H_1$. On en déduit, puisque $[G_\varepsilon : G'_\varepsilon]$ est fini, le lemme suivant.

LEMME 5.4. — *Il existe une constante H_1 telle que $[G_\varepsilon : gG'_\varepsilon g^{-1} \cap G_\varepsilon] \leq H_1$ pour tout $g \in G'$.*

Nous aimerions en déduire que $\bigcap_{g \in G'} (gG'_\varepsilon g^{-1} \cap G_\varepsilon)$ est un sous-groupe distingué d'indice fini de G_ε . Pour cela, nous allons appliquer les deux lemmes suivants.

LEMME 5.5 ([LS], corollaire 1.1.2). — *Pour tout $N > 0$ et tout $H > 0$, il existe $C(N, H)$ telle que, si Γ est un groupe engendré par moins de N générateurs, alors Γ possède moins de $C(N, H)$ sous-groupes d'indice inférieur à H .*

LEMME 5.6. — *Soit (X, G, x) un espace métrique localement compact muni d'un sous-groupe fermé G du groupe des isométries. On suppose qu'il existe $R > 0$ tel que $G = G(R)$. Soit $U \subset G$ un sous-groupe ouvert de G . Alors, il existe un nombre fini d'éléments $g \in G$ tels que $d(gx, x) \leq R$ et représentant des classes distinctes modulo U . En particulier, il existe $g_1, \dots, g_l \in G$ tels que $d(g_j x, x) \leq R$, $j = 1, \dots, l$, et G est engendré par U et $\{g_1, \dots, g_l\}$.*

Démonstration. — Comme U est un sous-groupe ouvert de G , il existe $\varepsilon > 0$ tel que U contienne tous les éléments de G tels que $d(gp, p) \leq \varepsilon$ pour tout $p \in B_{\frac{1}{\varepsilon}}(x)$. Soit $\{x_1, \dots, x_l\}$ un ensemble $\frac{\varepsilon}{10}$ -dense dans $B_{\frac{10}{\varepsilon}}(x)$. Considérons $g, g' \in G$ représentant deux classes distinctes modulo U et tels que $d(gx, x) \leq R$ et $d(g'x, x) \leq R$. Alors, les points (gx_1, \dots, gx_l) et $(g'x_1, \dots, g'x_l)$ sont à distance au moins $\varepsilon/2$ dans $(B_{R+\frac{10}{\varepsilon}}(x))^l$. \square

Rappelons que $(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \times \tilde{K}, G_\varepsilon, (0, p_\infty)) = \lim(\tilde{M}_i, \Gamma_{i,\varepsilon}, \tilde{p}_i)$. D'après la définition 2.11, $\Gamma_{i,\varepsilon}$ est une suite de sous-groupes uniformément ouverts de Γ_i , donc pour tout $g \in G'$ et toute suite $g_i \in \Gamma_i$ convergeant vers g , $\lim g_i \Gamma_{i,\varepsilon} g_i^{-1} \cap \Gamma_{i,\varepsilon} = g G_\varepsilon g^{-1} \cap G_\varepsilon$ et l'indice de $g_i \Gamma_{i,\varepsilon} g_i^{-1} \cap \Gamma_{i,\varepsilon}$ dans $\Gamma_{i,\varepsilon}$ est inférieur à H_1 pour i assez grand d'après la proposition 2.13 c) et le lemme 5.4. Par ailleurs, d'après le théorème 4.3 et le lemme 5.5, $\Gamma_{i,\varepsilon}$ possède au plus $C'(C, H_1)$ sous-groupes d'indice inférieur à H_1 pour i assez grand, où $C := C(n, \varepsilon)$ est un majorant du nombre de générateurs de toute base courte de $\Gamma_{i,\varepsilon}$. Il existe donc, lorsque $g \in G'$, au plus $\alpha := \alpha(n, H_1)$ sous-groupes du type $g G_\varepsilon g^{-1} \cap G_\varepsilon = \lim g_i \Gamma_{i,\varepsilon} g_i^{-1} \cap \Gamma_{i,\varepsilon}$, que l'on note $\{g_1 G_\varepsilon g_1^{-1} \cap G_\varepsilon, \dots, g_\alpha G_\varepsilon g_\alpha^{-1} \cap G_\varepsilon\}$, de sorte que $\Upsilon_\infty := \bigcap_{g \in G'} (g G_\varepsilon g^{-1} \cap G_\varepsilon) = \bigcap_{j=1, \dots, \alpha} (g_j G_\varepsilon g_j^{-1} \cap G_\varepsilon)$ est un sous-groupe d'indice fini de G_ε normalisé par G' . De plus, si $g_j^i \in \Gamma_i$ est une suite telle que $\lim g_j^i = g_j$, pour $j = 1, \dots, \alpha$, alors $\Upsilon_i := \bigcap_{j=1, \dots, \alpha} (g_j^i \Gamma_{i,\varepsilon} (g_j^i)^{-1} \cap \Gamma_{i,\varepsilon})$ est une suite de sous-groupes uniformément ouverts de $\Gamma_{i,\varepsilon}$ convergeant vers Υ_∞ dont l'indice $[\Gamma_{i,\varepsilon} : \Upsilon_i]$ est égal à $[G_\varepsilon : \Upsilon_\infty]$ pour i assez grand d'après la proposition 2.13 c).

Il reste à trouver Γ'_i , une suite de sous-groupes de Γ_i d'indice uniformément majoré tels que Γ'_i normalise Υ_i . D'après la remarque 2.16, rappelons que $G = G(R)$ pour tout $R > 2D$, où D est le diamètre de $K = (\mathbb{R}^l \times \tilde{K})/G$ et, G' , étant d'indice fini dans G , vérifie la même propriété. Soit $R > 0$ tel que $G' = G'(R)$. Rappelons que G' est un sous-groupe ouvert de G puisque $G(\varepsilon) \subset G'$ donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que G' contienne le sous-groupe U de G engendré par les éléments $g \in G$ tels que $d(gp, p) \leq 2\varepsilon$ pour tout $p \in B_{\frac{1}{2\varepsilon}}(\tilde{p}_\infty)$. D'après le lemme 5.6, il existe donc $g_1, \dots, g_l \in G'$ tels que G' soit engendré par $\{g_1, \dots, g_l\} \cup U$. Soient $g_j^i \in \Gamma_i$, tels que $\lim g_j^i = g_j$, $j = 1, \dots, l$. Soit $U_i \in \Gamma_i$ la suite de sous-groupes ouverts de Γ_i engendrés par $\{g \in \Gamma_i \mid d(gp, p) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \forall p \in B_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tilde{p}_i)\}$. D'après le théorème 4.3, on peut choisir un ensemble générateur de U_i de cardinal uniformément borné $\{a_1^i, \dots, a_r^i\}$ tel que $d(a_j^i \tilde{p}_i, \tilde{p}_i) \leq \varepsilon$. Par notre choix de ε , on peut

supposer que $\lim a_j^i = a_j \in G_\varepsilon \subset G'$. Considérons à présent Γ'_i la suite de sous-groupes ouverts de Γ_i engendrés par $\{a_1^i, \dots, a_\tau^i\} \cup \{g_1^i, \dots, g_l^i\}$ et notons $G'_\infty := \lim \Gamma'_i$. Alors $G' \subset G'_\infty$ et l'indice $[\Gamma_i : \Gamma'_i]$ est égal à $[G : G'_\infty]$ pour i assez grand grâce au théorème 2.13 c). Vérifions à présent que Υ_i est normalisé par Γ'_i . D'après la proposition 2.13, Υ_i est une suite de sous-groupes de Γ_i uniformément ouverte convergeant vers Υ_∞ . De plus, les générateurs de Γ'_i vérifient $\lim a_j^i = a_j \in G'$ et $\lim g_j^i = g_j \in G'$, donc d'après le théorème 2.13 c), l'indice de $a_j^i \Upsilon_i (a_j^i)^{-1} \cap \Upsilon_i$ dans Υ_i est égal à celui de $a_j \Upsilon_\infty a_j^{-1} \cap \Upsilon_\infty$ et de même, l'indice de $g_j^i \Upsilon_i (g_j^i)^{-1} \cap \Upsilon_i$ dans Υ_i est égal à celui de $g_j \Upsilon_\infty g_j^{-1} \cap \Upsilon_\infty$ dans Υ_∞ , c'est-à-dire 1 pour i assez grand. On en conclut que Γ'_i normalise Υ_i pour i assez grand.

En remplaçant Γ_i par Γ'_i , on peut supposer que $\Upsilon_i \subset \Gamma_{i\varepsilon} \subset \Gamma_i$, où Υ_i est distingué dans Γ_i et l'indice $[\Gamma_{i\varepsilon} : \Upsilon_i]$ est uniformément majoré. Enfin, comme Υ_i est uniformément ouvert dans Γ_i , Γ_i/Υ_i converge vers le groupe virtuellement abélien G/Υ_∞ de façon uniformément discrète, de sorte que Γ_i/Υ_i contient un sous-groupe abélien d'indice uniformément majoré d'après le théorème 2.13 c) pour i assez grand. Ceci achève la démonstration de la proposition 5.3. \square

D'après la proposition 5.3, on peut supposer que $\Gamma_{i,\varepsilon}$ est distingué dans Γ_i et que $\Gamma_i/\Gamma_{i,\varepsilon}$ est abélien ; de plus, d'après ce qui précède, on peut également supposer que $[\Gamma_i : \Gamma_{i,\varepsilon}]$ tend vers l'infini. On considère alors $\hat{\Gamma}_i := \langle \{d_1^i, \dots, d_{\sigma-1}^i\} \rangle$ le sous-groupe de Γ_i engendré par tous les générateurs d'une base courte sauf le dernier. Rappelons que $\lim(\tilde{M}_i, \Gamma_i, \tilde{p}_i) = (\mathbb{R}^{k+l} \times \tilde{K}, G, (0, \tilde{p}_\infty))$ avec $\mathbb{R}^{k+l} \times \tilde{K}/G = \mathbb{R}^k \times K$ où l'action de G sur $(\mathbb{R}^{k+l} \times \tilde{K})$ est triviale sur le facteur \mathbb{R}^k et le quotient $(\mathbb{R}^l \times \tilde{K})/G = K$ est compact. De même, nous pouvons supposer, après extraction d'une sous-suite, que $\lim(\tilde{M}_i, \hat{\Gamma}_i, \tilde{p}_i) = (\mathbb{R}^{k+l} \times \tilde{K}, \hat{G}, (0, \tilde{p}_\infty))$. Les deux groupes G et \hat{G} sont deux groupes fermés d'isométries de $\mathbb{R}^{k+l} \times \tilde{K}$ et comme $\hat{\Gamma}_i$ est distingué dans Γ_i , \hat{G} est distingué dans G , et $((\mathbb{R}^{k+l} \times \tilde{K})/\hat{G})/(G/\hat{G}) = (\mathbb{R}^{k+l} \times \tilde{K})/G = \mathbb{R}^k \times K$. À nouveau, on peut supposer que $[\Gamma_i : \hat{\Gamma}_i]$ tend vers l'infini, sinon on remplace Γ_i par $\hat{\Gamma}_i$. Comme $\{d_1^i, d_2^i, \dots, d_\sigma^i\}$ est une base courte de Γ_i et d_σ^i déplace \tilde{p}_i d'au moins ε on voit que la $\hat{\Gamma}_i$ -orbite $\hat{\Gamma}_i \tilde{p}_i$ de \tilde{p}_i est également déplacée d'au moins ε par d_σ^i ainsi que ses puissances non nulles dans $\Gamma_i/\hat{\Gamma}_i$. La limite $d_\infty \in G$ de d_σ^i ainsi que ses puissances déplacent donc aussi la \hat{G} -orbite $\hat{G} \cdot (0, \tilde{p}_\infty)$ de $(0, \tilde{p}_\infty)$ d'au moins ε , ce qui assure que G/\hat{G} est non compact. Ainsi, $(\mathbb{R}^{k+l} \times \tilde{K})/\hat{G} = \mathbb{R}^{k+p} \times K'$ avec K' compact a pour quotient par G/\hat{G} l'espace $(\mathbb{R}^{k+l} \times \tilde{K})/G = \mathbb{R}^k \times K$, donc, comme G/\hat{G} est non compact, $p > 0$.

Considérons la suite de variétés $(\tilde{M}_i/\hat{\Gamma}_i, \hat{p}_i)$. D'après la discussion précédente, nous avons $\lim(\tilde{M}_i/\hat{\Gamma}_i, \hat{p}_i) = (\mathbb{R}^{k'} \times K', (0, \hat{p}_\infty))$ avec K' compact, \hat{p}_i le projeté de \tilde{p}_i sur $\lim \tilde{M}_i/\hat{\Gamma}_i$ où $k' > k$. Posons de plus $f_{k+1}^i := d_\sigma^i$; la famille $\{f_1^i, \dots, f_k^i, f_{k+1}^i\}$ vérifie les hypothèses du théorème 5.1 : en effet, nous nous sommes ramenés au cas où, pour $j = 1 \dots, k$, les f_j^i convergent faiblement vers l'identité, de sorte que $[f_j^i, \gamma_i]$ converge également vers l'identité si les γ_i ont un déplacement borné, ce qui assure que $[f_j^i, \gamma_i] \in \Gamma_{i\varepsilon} \subset \hat{\Gamma}_i$ donc que les f_j^i normalisent $\hat{\Gamma}_i$. Le fait que f_{k+1}^i normalise $\hat{\Gamma}_i$ vient de ce que $\Gamma_i/\hat{\Gamma}_i$ est abélien. L'hypothèse de récurrence s'applique donc à la suite $(\tilde{M}_i/\hat{\Gamma}_i, \hat{p}_i)$, donc

il existe une suite cyclique nilpotente $N_0 = \{e\} \subset N_1 \subset \cdots \subset N_{n-k-1} = \hat{\Gamma}_i$ préservée par les $(f_j^i)^{C!}$, $j = 1, \dots, k+1$. Posons $N_k := \langle N_{n-k-1}, (f_{k+1}^i)^{C!} \rangle$. L'indice de N_k dans $\hat{\Gamma}_i$ est majoré par $C.C!$. La suite $N_0 = \{e\} \subset N_1 \subset \cdots \subset N_{n-k-1} \subset N_k$ est alors une suite cyclique nilpotente de longueur $n - k$ et de plus, pour $j = 1, \dots, k+1$, les $(f_j^i)^{C!}$ préservent cette suite; en effet, il suffit juste de vérifier que $[(f_{k+1}^i)^{C!}, (f_j^i)^{C!}] \in N_{n-k-2}$, ce qui résulte du fait que les f_j^i convergent faiblement vers l'identité, $j = 1 \cdots, k$. Ceci achève la démonstration du théorème 5.1. \square

5.2. Lemme de Margulis

Rappelons l'énoncé du théorème 0.3.

THÉORÈME 5.7 ([KW]). — *Il existe des constantes $\varepsilon := \varepsilon(n) \in]0, 1[$ et $C(n) > 0$ telles que, pour toute variété riemannienne complète M de dimension n à courbure de Ricci minorée $\text{Ric} \geq -(n-1)$, l'image de l'homomorphisme induit par l'inclusion $\pi_1(B_\varepsilon(p)) \rightarrow \pi_1(B_1(p))$ contient un sous-groupe nilpotent N d'indice majoré par $C(n)$. De plus, N a une base de longueur au plus n .*

Démonstration. — Pour toute variété riemannienne M et $B_1(p) \subset M$ la boule de centre $p \in M$ et rayon 1, on note \tilde{N} le revêtement universel de $B_1(p)$ et \tilde{p} un relevé de p et pour tout sous-groupe Γ de $\pi_1(B_1(p), p)$, on notera $N := \tilde{N}/\Gamma$ et \hat{p} le projeté de \tilde{p} sur N . La preuve du théorème ci-dessus est une conséquence directe des deux propositions suivantes. \square

PROPOSITION 5.8. — *Il existe des constantes $\varepsilon_1(n)$ et $C_1(n)$ telles que Γ , le sous-groupe de $\pi_1(B_1(p), p)$ engendré par les éléments $g \in \pi_1(B_1(p), p)$ tels que $d(gq, q) \leq \varepsilon_1(n)$ pour tout $q \in B_{\frac{1}{2}}(\tilde{p})$, contienne un sous-groupe d'indice majoré par $C_1(n)$ ayant une base nilpotente de longueur inférieure à n .*

Démonstration. — On raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe une suite de variétés riemanniennes M_i à courbure de Ricci minorée, $\text{Ric} \geq -(n-1)$, une suite de boules $B_1(p_i) \in M_i$ telles que $\overline{B_{\frac{3}{4}}(p_i)}$ est compacte et telles que Γ_i , le sous-groupe de $\pi_1(B_1(p_i), p_i)$ engendré par les éléments $g \in \pi_1(B_1(p_i), p_i)$ tels que $d(gq, q) \leq 2^{-i}$ pour tout $q \in B_{\frac{1}{2}}(\tilde{p}_i)$, ne contienne pas de sous-groupe d'indice inférieur à 2^i ayant une base nilpotente de longueur inférieure à n . Par définition, pour tout $q \in B_{\frac{1}{2}}(p_i)$, le groupe fondamental $\pi_1(N_i, q)$ est engendré par des lacets de longueur majorée par 2^{-i} , où $N_i := \tilde{N}_i/\Gamma_i$ et \tilde{N}_i est le revêtement universel de $B_1(p_i)$. Quitte à extraire une sous-suite, on suppose que (N_i, p_i) converge au sens de Gromov-Hausdorff vers un espace métrique (X, p_∞) ; on choisit alors une suite λ_i tendant vers l'infini et une suite de points $q_i \in \tilde{N}_i$ convergeant vers un point régulier q de X telles que $(\lambda_i N_i, q_i)$ converge vers le cône tangent $(C_q(X), 0) = (\mathbb{R}^k, 0)$ et $\pi_1(\lambda_i N_i, q)$ est engendré par des lacets de longueur uniformément bornée. La suite de variétés $(\lambda_i N_i, q_i)$ vérifie alors les hypothèses du théorème 5.1 et $\pi_1(\lambda_i N_i, q_i) = \Gamma_i$ contient donc un sous-groupe nilpotent d'indice

uniformément majoré par une constante C et de longueur inférieure à $k \leq n$ pour i assez grand, ce qui contredit l'hypothèse. \square

PROPOSITION 5.9. — *Soit Γ le sous-groupe obtenu dans la proposition 5.8 précédente. Il existe des constantes $\varepsilon_2(n)$ et $C_2(n)$ telles que, si H est le sous-groupe de $\pi_1(B_1(p), p)$ engendré par les éléments $g \in \pi_1(B_1(p), p)$ tels que $d(g\tilde{p}, \tilde{p}) \leq \varepsilon_2(n)$, alors $\Gamma \cap H$ est d'indice majoré par $C_2(n)$ dans H .*

Démonstration. — Si H est le sous-groupe de $\pi_1(B_1(p), p)$ engendré par les éléments $g \in \pi_1(B_1(p), p)$ tels que $d(g\tilde{p}, \tilde{p}) \leq \varepsilon_2$, alors d'après le théorème 4.3, il existe un ensemble de générateurs $\{b_1, \dots, b_h\}$ de H de cardinal $h \leq h(n, \varepsilon_2)$ tels que $d(b_i\tilde{p}, \tilde{p}) \leq \varepsilon_2$, $i = 1, \dots, h$. Nous allons montrer qu'il existe une constante $L = L(\varepsilon_1(n))$ ($\varepsilon_1(n)$ étant la constante de la proposition 5.8) telle que, si $\varepsilon_2 \leq \frac{1}{100L}$, alors tout élément $g \in H$ peut s'écrire $g = w\gamma$ où w est un mot de longueur inférieure à L en les générateurs $\{b_1, \dots, b_h\}$ et γ un élément de Γ . L'existence de cette constante L découle des deux lemmes suivants. Soit Γ' le sous-groupe de $\pi_1(B_1(p), p)$ engendré par les éléments $g \in \pi_1(B_1(p), p)$ tels que $d(gq, q) \leq \varepsilon_1(n)$ pour tout $q \in B_{\frac{2}{3}}(\tilde{p})$. On a clairement $\Gamma' \subset \Gamma$.

LEMME 5.10. — *Il existe une constante $L : L(\varepsilon_1(n))$, ($\varepsilon_1(n)$ étant la constante de la proposition 5.8), telle que si $\varepsilon_2 \leq \frac{1}{100L}$ et si $w := g_1g_2 \cdots g_L$ est un mot quelconque de longueur L en les générateurs $\{b_1, \dots, b_h\}$, alors il existe k, l , $1 \leq k \leq l \leq L$ tels que le mot $g_kg_{k+1} \cdots g_l \in \Gamma'$.*

Démonstration. — Par inégalité triangulaire et choix de ε_2 , nous avons pour tout k, l , $1 \leq k \leq l \leq L$, l'inclusion $g_1 \cdots g_l(B_{\frac{2}{3}}(\tilde{p})) \subset B_{\frac{3}{4}}(\tilde{p})$. Soit $\{a_1, \dots, a_m\}$ un sous-ensemble $\varepsilon_1(n)$ -séparé maximal de $B_{\frac{2}{3}}(\tilde{p})$. Notons que m est majoré uniformément en fonction de $\varepsilon_1(n)$. Supposons qu'un mot $w = g_1g_2 \cdots g_L$ soit tel que $g_1 \cdots g_l \notin \Gamma'$; alors pour tout k, l , $1 \leq k \leq l \leq L$, il existe $u := u(k, l)$ tel que $d(g_kg_{k+1} \cdots g_la_u, a_u) \geq \frac{\varepsilon_1(n)}{4}$ de sorte que $d(g_1 \cdots g_la_{u(k,l)}, g_1 \cdots g_{k-1}a_{u(k,l)}) \geq \frac{\varepsilon_1(n)}{4}$. On en déduit que l'ensemble des points $\{g_1 \cdots g_ka\}$, $k = 1, \dots, L$, où $a := (a_1, \dots, a_m)$ et où $ga = (ga_1, \dots, ga_m)$, est un ensemble $\frac{\varepsilon_1(n)}{4}$ -séparé dans le produit $(B_{\frac{2}{3}}(\tilde{p}))^m$ et est donc de cardinal majoré par une constante dépendant de $\varepsilon_1(n)$ d'après le théorème de Bishop-Gromov 2.5. \square

LEMME 5.11. — *Soit L la constante obtenue dans le lemme 5.10, $\varepsilon_2 \leq \frac{1}{100L}$ et $w = b_{k_1} \cdots b_{k_l}$ un mot en les générateurs $\{b_1, \dots, b_h\}$ de longueur $l \leq L$. Alors, $w\Gamma'w^{-1} \subset \Gamma$.*

Démonstration. — Soient $\gamma' \in \Gamma'$ et $w = b_{k_1} \cdots b_{k_l}$ un mot de longueur $l \leq L$. Comme $\varepsilon_2 \leq \frac{1}{100L}$, on déduit de l'inégalité triangulaire que $w^{-1}q \in B_{\frac{2}{3}}(\tilde{p})$ pour tout $q \in B_{\frac{1}{2}}(\tilde{p})$, donc $d(q, w\gamma'w^{-1}q) = d(w^{-1}q, \gamma'w^{-1}q) \leq \varepsilon_1(n)$, ce qui signifie que $w\gamma'w^{-1} \in \Gamma$. \square

Les lemmes 5.10 et 5.11 achèvent la preuve de la proposition 5.9. et donc du théorème 0.3. \square

Remerciements. Je remercie chaleureusement Vitali Kapovitch et Burkhard Wilking qui ont patiemment et gentiment répondu à toutes mes questions pendant la rédaction de ce texte. Un grand merci également à Alix Deruelle et Vincent Minerbe pour leur aide indispensable pendant la lecture de l'article ainsi qu'à Simone Diverio, Elisha Falbel, Julien Marché et Maxime Wolff pour leurs précieux conseils.

RÉFÉRENCES

- [BGS] W. Ballmann, M. Gromov, V. Schröder – *Manifolds of nonpositive curvature*, Progress in Math., vol. 61, Birkhäuser, 1985.
- [B] L. Bieberbach – *Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Raume*, I : Math. Ann. 70 (1911), 297-336, II : Math. Ann. 72 (1912), 400-412.
- [BGT] E. Breuillard, B. Green, T. Tao – *The structure of approximate groups*, Publ. Math. I.H.É.S. 116 (2012), 115-221.
- [BZ] Y. D. Burago, V. A. Zalgaller – *Geometric inequalities*, Grundlehren Math. Wissenschaften Mathematik 285.
- [BK] P. Buser, H. Karcher – *Gromov's almost flat manifolds*, Astérisque, 81. Société Mathématique de France, 1981.
- [CC1] J. Cheeger, T. H. Colding – *Lower bounds on Ricci curvature and the almost rigidity of warped products*, Ann. of Math. 144 (1996), 189-237.
- [CC2] J. Cheeger, T. H. Colding – *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below I*, J. Differential Geom. 46 (1997), 406-480.
- [CC3] J. Cheeger, T. H. Colding – *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below II*, J. Differential Geom. 54 (2000), 13-35.
- [CC4] J. Cheeger, T. H. Colding – *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below III*, J. Differential Geom. 54 (2000), 37-74.
- [CE] J. Cheeger, D. G. Ebin – *Comparison theorems in Riemannian geometry*, North-Holland Mathematical Library, Vol. 9. North-Holland Publishing Co., New York, 1975.
- [CN] T. H. Colding, A. Naber – *Sharp Hölder continuity of tangent cones for spaces with a lower Ricci curvature bound and applications*, arXiv :1102.5003 [math.DG] 2010.
- [Co] T. H. Colding – *Large manifolds with positive Ricci curvature*, Invent. Math., 124 (1996), 193-214.
- [FY] K. Fukaya, T. Yamaguchi – *The fundamental group of almost nonnegatively curved manifolds*, Ann. of Math. 136 (1992), 253-333.
- [Ga] S. Gallot – *Volumes, courbure de Ricci et convergence des variétés (d'après T. H. Colding et Cheeger-Colding)*, Séminaire Bourbaki (1997/98), exp. n° 835, Astérisque 252 (1998), 7-32.

- [Gro1] M. Gromov – *Volume and bounded cohomology*, Publ. Math. I.H.É.S. 56 (1982), 5-99.
- [Gro2] M. Gromov – *Almost flat manifolds*, J. Differential Geom. 13 (1978), 231-241.
- [GLP] M. Gromov, J. Lafontaine, P. Pansu – *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, Cedric/Fernand Nathan 1981.
- [KM] D. A. Každan, G. A. Margulis – *A proof of Selberg hypothesis*, Mat. Sb. (N.S.) 75 (1968), 163-168.
- [KPT] V. Kapovitch, A. Petrunin, W. Tuschmann – *Nilpotency, almost nonnegative curvature and the gradient push*, Ann. of Math. 171 (2010), 343-373.
- [KW] V. Kapovitch, B. Wilking – *Structure of fundamental groups of manifolds with Ricci curvature bounded below*, arXiv :1105.5955v2 [math.DG] 2011.
- [LS] A. Lubotsky, D. Segal – *Subgroup growth*, Progress in Math., Birkhäuser, 2000.
- [Ma] G. A Margulis – *Discrete groups of motions of manifolds of nonpositive curvature*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B.C,1974), Vol. 2, 21-24, Canadian Math. Congress, Montreal, Que., 1975.
- [Ra] M. S. Raghunathan – *Discrete subgroups of Lie groups*, Springer-Verlag, New-York, 1972. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 68.
- [Ste] E. Stein – *Harmonic Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1993.
- [VDD] L. van den Dries – *Approximate groups*, Séminaire Bourbaki, novembre 2013.
- [Za] H. Zassenhaus – *Beweis eines Satzes über diskrete Gruppen*, Agh. math. Sem. Hansische Univ. 12 (1938), 289-312.

Gilles COURTOIS

Institut de Mathématiques de Jussieu
 Analyse Complexe et Géométrie
 UMR 7586 du C.N.R.S.
 4, place Jussieu
 75252 Paris Cedex 09
E-mail : courtois@math.jussieu.fr