Séminaire BOURBAKI Novembre 2013
66ème année, 2013-2014, n$^{\text{o}}$ 1074

CONSTRUCTION DE SOLUTIONS POUR DES EDP SUR-CRITIQUES À DONNÉES INITIALES ALÉATOIRES [d'après N. Burq et N. Tzvetkov]

par **Anne de BOUARD**

INTRODUCTION

L'une des questions fondamentales dans la théorie des équations aux dérivées partielles est la notion de problème bien posé. Pour les problèmes d'évolution, en particulier, il est essentiel de savoir si, étant donné un état à l'instant initial, il existe bien une unique solution de l'équation, et si cette solution dépend bien continûment de cet état initial. La notion de problème bien posé remonte à Hadamard. Pour la plupart des EDP d'évolution classiques, la réponse à cette question est positive si les données sont suffisamment régulières, et il n'est en général pas difficile de démontrer que pour un état initial régulier, il existe bien une unique solution, au moins sur un court intervalle de temps. On peut alors se demander quelle régularité minimale pour la donnée initiale permet d'obtenir un problème bien posé. La question peut paraître futile, dès lors que l'on sait résoudre le problème avec une régularité suffisamment basse pour que les fonctionnelles spécifiques de l'équation (énergie, entropie,...) permettent de globaliser les solutions, mais il s'avère que cette étude peut parfois donner des indications sur les mécanismes qui régissent la dynamique du modèle considéré. Le problème d'existence de solutions peu régulières est également motivé, pour des équations hamiltoniennes comme celles considérées ici, par l'existence de mesures de Gibbs, invariantes au moins formellement pour le flot, et parfois supportées par des espaces de fonctions peu régulières. On renvoie à la section 4 pour un bref aperçu de ces questions.

Pour certaines EDP classiques – comme pour l'équation des ondes semi-linéaires dont nous allons parler plus particulièrement ici, ou pour certaines équations dispersives – pour lesquelles il est naturel de chercher les solutions dans les espaces de Sobolev, cet exposant de régularité critique peut parfois être obtenu de manière heuristique en utilisant un argument d'échelle (voir plus loin). Une fois cet exposant critique obtenu de manière heuristique, on peut tenter de démontrer qu'en dessous de cette régularité critique le problème est mal posé, en exhibant une suite de données initiales qui contredit la continuité de la solution par rapport à l'état initial.

Le but de cet exposé est de décrire, pour certaines équations pour lesquelles la théorie déterministe est bien calibrée, c'est-à-dire que l'on connaît l'exposant de régularité critique et que l'on sait démontrer que le problème est mal posé en dessous de cette régularité critique, comment on peut néanmoins montrer que le problème reste bien posé, à condition de le considérer dans un sens probabiliste. Ces résultats sont tirés de trois articles de N. Burq et N. Tzvetkov ([BT1, BT2, BT3]) qui ont par la suite été généralisés, par les mêmes auteurs et par d'autres, à d'autres modèles (voir la section 4).

Par souci de pédagogie, et pour ne pas mêler les arguments probabilistes utilisés par N. Burq et N. Tzvetkov pour améliorer les résultats déterministes avec des arguments beaucoup plus techniques concernant la résolution du problème d'évolution déterministe, on adopte ici le point de vue de [BT3]. On considère donc l'équation des ondes cubiques défocalisante, posée sur le tore plat en dimension trois :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + u^3 = 0, \\ (u, \partial_t u)_{t=0} = (u_0, u_1), \end{cases} \tag{1}$$

où $u = u(t,x)$, pour $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{T}^3 = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^3$, et $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2$.

Il est naturel de chercher les solutions de (1) qui sont continues en temps à valeurs dans les espaces de Sobolev, puisque ces derniers sont préservés par le flot de l'équation linéaire. Plus précisément, on supposera que $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}^s \equiv H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-1}(\mathbb{T}^3)$, pour un réel $s \geq 0$. On remarque que, pour $s = 1/2$, l'espace $\mathcal{H}^s$ est préservé par le changement d'échelle $u_\varepsilon(t,x) = \frac{1}{\varepsilon} u(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon})$, comme l'est également l'équation (1). Ceci suggère donc que $s = 1/2$ est bien l'exposant critique. Il existe une très vaste littérature concernant le problème de Cauchy pour l'équation des ondes semi-linéaire ([Ge, GV1, GV2, GV3, Gr1, Gr2, LS, SS, Pla1], ...). La théorie locale pour l'équation (1) est maintenant bien comprise (c'est vrai aussi si l'équation est posée sur une variété riemannienne compacte sans bord plus générale), et on peut montrer que l'équation est bien posée dans $\mathcal{H}^s$, pour $s \geq 1/2$, en utilisant les arguments de Ginibre et Velo [GV3] et Lindblad et Sogge [LS] pour le cas de $\mathbb{R}^3$, et les inégalités de Strichartz démontrées par Kapitanski [Kap] si $s < 1$ (voir la section 1). Pour $s < 1/2$, il est connu que le problème est mal posé localement, et des contre-exemples ont été exhibés par Christ-Colliander et Tao [CCT] et Lebeau [Le] dans le cas de $\mathbb{R}^3$, basés sur l'argument d'échelle mentionné plus haut, et qui peuvent être adaptés au cas du tore (voir aussi [BT1] pour un contre-exemple dans le cas d'une variété compacte plus générale). L'idée de N. Burq et N. Tzvetkov est alors de considérer que la donnée initiale est non pas fixée dans $\mathcal{H}^s$, mais distribuée suivant une certaine mesure de probabilité. Sous réserve d'une décroissance suffisante de la « densité » de cette mesure, il est possible de montrer que, presque sûrement, l'évolution libre gagne suffisamment en intégrabilité pour obtenir l'existence d'une unique solution globale de (1) par des arguments déterministes. Des détails sur la construction de la mesure, ses propriétés et la manière dont l'intégrabilité supplémentaire de l'évolution libre peut être obtenue sont donnés dans la section 2. On note que la mesure utilisée pour obtenir des solutions globales dans [BT3] est bien plus générale que celle de [BT2] où la globalisation est obtenue grâce au fait que la mesure utilisée est une mesure invariante pour le flot de (1) (argument utilisé pour la première fois par Bourgain dans [Bo1]). Dans la section 3, on expliquera comment obtenir, pour les solutions construites dans la section précédente, certaines propriétés de continuité « probabiliste » du flot associé, ce qui est essentiel pour pouvoir affirmer qu'en probabilisant la donnée initiale de cette façon, on perd dans un certain sens le caractère mal posé du flot pour s entre 0 et 1/2. La section 4 sera quant à elle consacrée à la description d'un certain nombre de généralisations et de résultats obtenus à la suite des idées développées dans [BT1, BT2, BT3], notamment pour l'équation de Schrödinger non linéaire. On notera qu'en parallèle, un résultat du même type a été obtenu par Colliander et Oh [CO], pour l'équation de Schrödinger non linéaire avec renormalisation de Wick (voir aussi la section 4).

Remerciements. — Je suis particulièrement redevable à N. Tzvetkov pour son éclairage, ses réponses à mes nombreuses questions, pour la preuve de la proposition 3.4 [T1], et pour ses remarques sur le texte. Merci également à B. Merlet pour sa relecture et ses remarques sur une première version du texte.

1. QUELQUES RÉSULTATS DÉTERMINISTES

Afin d'expliquer l'obstruction qui dans la théorie déterministe empêche de descendre en dessous de la régularité $H^{1/2}$, on commence par énoncer le résultat déterministe optimal et donner une idée de la preuve, qui utilise, pour $s < 1$, les inégalités de Strichartz, même si celles-ci ne seront pas nécessaires lors du passage au cadre aléatoire.

Théorème 1.1. — *Le problème de Cauchy (1) est bien posé dans $\mathcal{H}^s$, pour $s \geq 1/2$, i.e. pour tout $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}^s$, il existe $T > 0$ et une unique solution u de (1), avec $u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{T}^3)) \cap C^1([0,T]; H^{s-1}(\mathbb{T}^3))$, et cette solution est continue par rapport à la donnée $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}^s$.*

Preuve (indications). On rappelle que l'évolution libre est donnée, pour $(v_0, v_1) \in \mathcal{H}^s$, par

$$S(t)(v_0, v_1) = \cos(t\sqrt{-\Delta})(v_0) + (\sqrt{-\Delta})^{-1}\sin(t\sqrt{-\Delta})v_1 \tag{2}$$

où les opérateurs ci-dessus sont définis à l'aide de la décomposition en série de Fourier de v_0 et v_1, et avec la convention naturelle sur le terme de fréquence nulle. L'équation (1) se réécrit alors sous la forme intégrale :

$$u(t) = S(t)(u_0, u_1) - \int_0^t (\sqrt{-\Delta})^{-1}\sin((t-\tau)\sqrt{-\Delta})(u^3(\tau))d\tau. \tag{3}$$

Le résultat d'existence locale pour $s \geq 1/2$ peut alors être obtenu grâce aux estimations de Strichartz sur le tore (voir [Kap] pour une variété compacte sans bord, [St] pour le cas de $\mathbb{R}^3$ et [ILP] pour le cas d'une variété à bord). Ces inégalités, couplées aux inégalités de Hölder en temps impliquent que pour tout $(v_0, v_1) \in \mathcal{H}^s$, $s \geq 1/2$ et tout $g \in L^{4/3}(0,T; L^{4/3}(\mathbb{T}^3))$,

$$\|S(t)(v_0, v_1)\|_{L^4(0,T;L^4(T^3))} \leq C(\|v_0\|_{H^s} + \|v_1\|_{H^{s-1}}) \tag{4}$$

et

$$\| \int_0^t (\sqrt{-\Delta})^{-1} \sin((t-\tau)\sqrt{-\Delta}) g(\tau) d\tau \|_{C([0,T];H^s)\cap L^4(0,T;L^4)} \leq CT^{2(s-1/2)} \|g\|_{L^{4/3}(0,T;L^{4/3})}. \tag{5}$$

Les inégalités (4) et (5), combinées avec l'inégalité suivante qui découle immédiatement de l'inégalité de Hölder :

$$\|u^3 - v^3\|_{L^{4/3}(0,T;L^{4/3})} \leq C\|u-v\|_{L^4(0,T;L^4)}(\|u\|^2_{L^4(0,T;L^4)} + \|v\|^2_{L^4(0,T;L^4)})$$

permettent de mener à bien un argument de point fixe dans une boule de l'espace $C([0,T];H^s) \cap L^4(0,T;L^4)$ pour T suffisamment petit, ne dépendant que de $\|u_0\|_{H^s} + \|u_1\|_{H^{s-1}}$, si $s > 1/2$. L'argument reste valable pour $s = 1/2$, mais la dépendance du temps d'existence par rapport à la donnée initiale est plus complexe. L'argument de point fixe permet également de montrer la continuité du flot. On renvoie à [GV1] et [LS] pour des arguments plus précis, ainsi qu'à [CW] pour des arguments similaires pour l'équation de Schrödinger non linéaire. De plus l'unicité peut en fait être montrée (pour $s > 1/2$) dans l'espace plus large $C([0,T];H^s)$ (voir [Pla1, FPT]). □

Pour $s \geq 3/4$, la solution est globale dans le cas de $\mathbb{R}^3$. Ce résultat est dû à Kenig, Ponce et Vega [KPV], Gallagher et Planchon [GP] et Bahouri et Chemin [BC] (voir également [Pla2]) et se généralise probablement au cas du tore. Des améliorations ont également été obtenues par Roy [Ro2] (voir également [Ro1] pour le cas radial). Tous les résultats d'existence globale déterministes utilisent la conservation de l'énergie définie par

$$\mathcal{E}(v)(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^3} \left((\partial_t v)^2 + |\nabla v|^2 + \frac{1}{2} v^4 \right) dx, \tag{6}$$

par le flot de (1). Évidemment, cette conservation n'est pas en soi suffisante pour globaliser les solutions si $s < 1$. L'idée (utilisée pour la première fois par Bourgain [Bo3] pour l'équation de Schrödinger non linéaire) consiste, pour un temps final T_0 fixé, à découper la solution sous la forme $u(t) = S(t)\Pi^N(u_0, u_1) + v_N$ où Π_N est la projection orthogonale (dans L^2) sur l'espace engendré par les N premiers modes de Fourier, et $\Pi^N = 1 - \Pi_N$. La croissance de la partie régulière v_N en fonction de N est alors estimée grâce à l'évolution de l'énergie, et N peut être fixé de manière adéquate pour atteindre le temps final.

On ne détaillera pas ces arguments qui peuvent s'avérer extrêmement techniques, mais on donne ci-après une version « zéro » qui ne présente aucun intérêt pour l'équation déterministe, mais qui, de manière étonnante, est suffisante pour obtenir l'existence globale presque sûrement pour une large classe de distributions probabilistes de données initiales (voir la section 2). Notons que pour le problème déterministe, elle ne permet d'obtenir l'existence globale que pour $s = 1$, qui découle déjà directement de la conservation de l'énergie, puisque l'énergie contrôle $\|\nabla u\|^2_{L^2}$ d'une part, mais également $\|u\|^4_{L^4}$, donc aussi $\|u\|_{L^2}$ (sur le tore).

Proposition 1.2 ([BT3]). — *Soit $T_0 > 0$, fixons $0 < s < 1$ et $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}^s$. Supposons que $S(t)(u_0, u_1) \in L^3(0, T_0; L^6(\mathbb{T}^3)) \cap L^1(0, T_0; L^\infty(\mathbb{T}^3))$; alors il existe une unique solution de* (1) *vérifiant*

$$(u(t), \partial_t u(t)) \in (S(t)(u_0, u_1), \partial_t S(t)(u_0, u_1)) + C([0, T_0]; H^1(\mathbb{T}^3) \times L^2(\mathbb{T}^3)).$$

Preuve (indications). En décomposant une solution $u(t)$ de (1) sous la forme $u(t) = S(t)(u_0, u_1) + v(t)$ on obtient pour v l'équation

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \Delta v + (S(t)(u_0, u_1) + v(t))^3 = 0 \\ (v, \partial_t v)_{t=0} = (v_0, v_1), \end{cases} \tag{7}$$

avec $(v_0, v_1) = (0, 0)$. L'existence locale d'une solution de (7) sur un temps ne dépendant que de

$$\max(\|v_0\|_{H^1}, \|v_1\|_{L^2}, \|S(t)(u_0, u_1)\|_{L^3(0,T_0;L^6)})$$

ne nécessite qu'un argument de point fixe, et quelques estimations élémentaires sur la formulation intégrale de l'équation (7), ainsi que l'injection de Sobolev $H^1(\mathbb{T}^3) \subset L^6(\mathbb{T}^3)$. On renvoie à [BT3] pour les détails. Pour globaliser les solutions, on utilise l'évolution de l'énergie $\mathcal{E}(v)(t)$ définie par (6). Une intégration par parties et l'équation (7) permettent d'obtenir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{E}(v)(t) &= \int_{\mathbb{T}^3} \partial_t v(\partial_t^2 v - \Delta v + v^3) dx \\ &= \int_{\mathbb{T}^3} \partial_t v \left(v^3 - (S(t)(u_0, u_1) + v)^3 \right) dx, \end{aligned}$$

et les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Hölder nous autorisent à majorer le terme précédent par

$$\begin{aligned} C(\mathcal{E}(v))^{1/2} &\|v^3 - (S(t)(u_0, u_1) + v)^3\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \\ &\leq C(\mathcal{E}(v))^{1/2}[g(t) + f(t)\|v(t)\|^2_{L^4(\mathbb{T}^3)}] \\ &\leq (\mathcal{E}(v))^{1/2}[g(t) + f(t)(\mathcal{E}(v))^{1/2}], \end{aligned}$$

où $f(t) = \|S(t)(u_0, u_1)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)}$ et $g(t) = \|S(t)(u_0, u_1)\|^3_{L^6(\mathbb{T}^3)}$; le lemme de Gronwall permet alors de conclure, puisque f et g sont toutes deux intégrables sur $[0, T_0]$. $\square$

On remarque que cette preuve élémentaire ne fonctionnerait pas pour l'équation des ondes semi-linéaires avec une puissance de la non linéarité plus élevée, $|u|^\alpha u$ avec $\alpha > 2$. Dans ce cas, il faudrait pour obtenir des résultats globaux utiliser l'argument de découpage en fréquences décrit précédemment.

Pour $0 < s < 1/2$ au contraire, le problème d'évolution est localement mal posé, comme le montre le résultat suivant.

THÉORÈME 1.3. — *Soit s avec $0 < s < 1/2$; alors il existe $\delta > 0$ et une suite $(t_n)_{n\geq 1}$ de réels strictement positifs, tendant vers zero, et il existe une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de solutions globales de* (1) *dans $C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{T}^3)$ telles que*

$$\|u_n(0)\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} \leq C(\log(n))^{-\delta}, \quad \partial_t u_n(0) = 0,$$

et

$$\|u_n(t_n)\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} + \|\partial_t u_n(t_n)\|_{H^{s-1}(\mathbb{T}^3)} \geq C(\log(n))^{\delta}.$$

Ce résultat, qui montre que le flot associé à l'équation (1) ne peut pas être continu dans $\mathcal{H}^s$ pour $s < 1/2$, est démontré dans [BT1] dans le cas d'une variété riemannienne compacte sans bord plus générale. Les arguments utilisés sont ceux de [CCT] où le cas de $\mathbb{R}^3$ est traité, à l'exception de l'argument d'échelle. On renvoie également à [Le] pour le cas sur-critique H^1, et à [CCT, AC] pour des résultats similaires pour l'équation de Schrödinger non linéaire. L'idée est de considérer une suite de données initiales régulières qui se concentrent en un point, de telle sorte que leur norme dans $H^s(\mathbb{T}^3)$ tend vers zéro à un taux logarithmique, $(\log(n))^{-\delta_1}$. La solution correspondante de (1) – qui est globale puisque l'équation est sous-critique H^1 – est alors comparée avec la solution de l'équation différentielle (ou équation « sans dispersion »)

$$\partial_t^2 v_n + v_n^3 = 0 \tag{8}$$

avec la même donnée initiale. L'utilisation d'une énergie semi-classique permet de montrer que les solutions u_n et v_n restent proches (au sens où leur différence en norme H^s tend vers zéro comme une puissance négative de n) sur un intervalle de temps $[0, t_n]$ court (t_n tend vers zéro également comme une puissance négative de n), mais, si δ_1 est bien choisi, suffisamment long pour que $\lim_{n\to\infty} \|v_n(t_n, .)\|_{H^s} = +\infty$. Cette dernière propriété est simplement obtenue en écrivant la solution v_n de (8) en termes de la solution V de

$$V'' + V^3 = 0, \quad V(0) = 1, \quad V'(0) = 0.$$

2. PROBLÈME DE CAUCHY POUR DES DONNÉES INITIALES ALÉATOIRES

Comme indiqué dans l'introduction l'idée pour obtenir des solutions globales de l'équation (1) pour $s < 1/2$ est de considérer que la donnée initiale n'est pas fixée de manière déterministe dans $\mathcal{H}^s$, mais distribuée suivant une certaine mesure de probabilité. Cette idée prend ses origines dans les travaux de Bourgain [Bo1], inspirés de la physique statistique et concernant l'équation de Schrödinger non linéaire, qui utilisent la mesure de Gibbs invariante de cette équation hamiltonienne pour en obtenir des solutions globales presque sûrement (voir aussi la section 4). Ici, cependant, la situation est différente puisque, dans le cas $s < 1/2$, se présente déjà un problème avec la théorie déterministe locale. De plus, la mesure utilisée est plus générale et n'est pas nécessairement une mesure invariante pour le flot de l'équation considérée, ni même absolument continue par rapport à une telle mesure.

2.1. Mesure sur la donnée initiale

On considère une mesure de probabilité θ sur $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété de décroissance suivante : il existe une constante $c > 0$ telle que pour toute constante $\gamma \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\gamma x} d\theta(x) \leq e^{c\gamma^2}. \tag{9}$$

De manière équivalente, on pourrait supposer qu'il existe des constantes C et c positives telles que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x d\theta(x) = 0, \text{ et pour tout } \gamma \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\gamma x} d\theta(x) \leq C e^{c\gamma^2}.$$

Deux exemples typiques de mesures vérifiant la propriété de décroissance (9) sont donnés par les mesures gaussiennes centrées :

$$d\theta(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\Big(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\Big) dx \tag{10}$$

et toutes les mesures de probabilité de moyenne nulle et à support compact, comme par exemple la mesure de Bernoulli $d\theta(x) = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$.

On utilise, pour décrire la mesure sur $\mathcal{H}^s$, la décomposition en série de Fourier

$$u(x) = a_0 + \sum_{n \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}} (a_n \cos(n.x) + b_n \sin(n.x)),$$

pour $u \in H^s(\mathbb{T}^3)$ à valeurs réelles, avec

$$\|u\|_{H^s}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} (1 + |n|^{2s})(a_n^2 + b_n^2) < +\infty$$

et avec la convention $b_0 = 0$. Soit alors $(\alpha_{n,j}, \beta_{n,j})_{n \in \mathbb{Z}^3, j=0,1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et distribuées selon la loi θ, sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pour $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}^s$ donné par sa décomposition en série de Fourier

$$u_j(x) = a_0 + \sum_{n \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}} a_{n,j} \cos(n.x) + b_{n,j} \sin(n.x), \quad \text{pour } j = 0, 1,$$

on pose pour $j = 0, 1$,

$$u_j(\omega, x) = a_{0,j} \alpha_{0,j}(\omega) + \sum_{n \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}} a_{n,j} \alpha_{n,j}(\omega) \cos(n.x) + b_{n,j} \beta_{n,j}(\omega) \sin(n.x). \tag{11}$$

On obtient ainsi une variable aléatoire $(u_0(\omega), u_1(\omega)) \in L^2(\Omega; \mathcal{H}^s)$ dont la loi $\mu_{(u_0,u_1)}$ est donc une mesure de probabilité sur $\mathcal{H}^s$ (muni de la tribu des boréliens).

Il n'est en fait pas essentiel que les variables aléatoires $(\alpha_{n,j}, \beta_{n,j})_{n \in \mathbb{Z}^3, j=0,1}$ soient identiquement distribuées ; il suffirait, pour tout ce qui suit, que la condition (9) soit vérifiée par chacune des lois, uniformément en n et j.

Remarque 2.1. — Il est intéressant de noter que, dans le cas gaussien (10), la mesure $\mu_{(u_0,u_1)}$ ainsi obtenue sur $\mathcal{H}^s$ est une mesure gaussienne stationnaire, c'est-à-dire invariante par translation en x. Cette dernière propriété découle facilement de la projection (pour n fixé) sur les modes $(\cos(n.x), \sin(n.x))$, et de l'invariance par rotation de la mesure gaussienne à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ définie par $(a_{n,j}\alpha_{n,j}, b_{n,j}\beta_{n,j})$. Réciproquement, toute mesure gaussienne stationnaire sur $\mathcal{H}^s$ peut être représentée comme une mesure $\mu_{(u_0,u_1)}$, avec $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}^s$. En effet, si $u(\omega, x)$ est un champ aléatoire gaussien stationnaire dans $L^2(\Omega, H^s(\mathbb{T}^3))$, alors la décomposition en série de Fourier et la stationnarité impliquent

$$u(\omega, x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^3} \hat{u}_k(\omega) e^{ik.x}$$

où les variables aléatoires gaussiennes $u_k(\omega)$ vérifient $\hat{u}_{-k}(\omega) = \bar{\hat{u}}_k(\omega)$ presque sûrement, et $\mathbb{E}(\hat{u}_k(\omega)\bar{\hat{u}}_l(\omega)) = 0$ si $k \neq l$. Ainsi $u(\omega, x)$ admet bien une décomposition de la forme (11).

Pour une mesure θ plus générale, vérifiant toujours la condition de décroissance (9), quelques propriétés de la mesure $\mu_{(u_0,u_1)}$ obtenue à l'aide de la définition précédente sont démontrées dans [BT1] et [BT3]. Il est important de noter en particulier que la mesure $\mu_{(u_0,u_1)}$ ne charge pas les fonctions plus régulières (au sens des espaces de Sobolev) que (u_0, u_1). Par contre, elle charge bien (avec probabilité totale) les fonctions plus intégrables (au sens L^p) que (u_0, u_1), et c'est là l'argument essentiel du résultat d'existence globale de la section 2.2.

Proposition 2.2. — *Soit $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}^s$, $s \geq 0$ et soit $\mu_{(u_0,u_1)}$ la mesure construite précédemment. Si $s' > s$ et $(u_0, u_1) \notin \mathcal{H}^{s'}$, alors $\mu_{(u_0,u_1)}(\mathcal{H}^{s'}) = 0$, en supposant bien entendu que $\theta \neq \delta_0$.*

De plus, si le support de la mesure θ est égal à $\mathbb{R}$ et si tous les coefficients de Fourier de (u_0, u_1) sont non nuls, alors le support de $\mu_{(u_0,u_1)}$ est égal à $\mathcal{H}^s$. En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, la mesure

$$\mu_{(u_0,u_1)}\Big(\{(v_0, v_1) \in \mathcal{H}^s,\ \|u_0 - v_0\|_{H^s} + \|u_1 - v_1\|_{H^{s-1}} < \varepsilon\} \Big)$$

est strictement positive.

Preuve (indications). L'idée, pour montrer que la mesure $\mu_{(u_0,u_1)}$ ne charge pas les fonctions plus régulières que (u_0, u_1) est de calculer, pour $s' > s$,

$$\mathbb{E}(e^{-(\|u_0(\omega,.)\|^2_{H^{s'}} + \|u_1(\omega,.)\|^2_{H^{s'-1}})}) = \int_{\mathcal{H}^s} e^{-(\|u\|^2_{H^{s'}} + \|v\|^2_{H^{s'-1}})} d\mu_{(u_0,u_1)}(u, v).$$

En utilisant la caractérisation en Fourier de la norme dans $\mathcal{H}^{s'}$, la décomposition (11) et l'indépendance des v.a. $(\alpha_{n,j}, \beta_{n,j})_{n\in\mathbb{Z}^3, j=0,1}$, qui permet d'écrire la mesure $\mu_{(u_0,u_1)}$ comme un produit tensoriel infini de mesures de probabilité, le terme précédent admet une expression de la forme

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\gamma_n^2 x^2} d\theta(x), \qquad \text{avec } \sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n^2 = +\infty.$$

En fixant alors δ et $c > 0$ telles que $\theta([-c, c]) \leq 1 - \delta$, ce qui est toujours possible si $\theta \neq \delta_0$, et en intégrant séparément, dans le produit ci-dessus sur $\{|x| \leq c\}$ et sur $\{|x| > c\}$, ce produit peut être majoré par $\prod_{n\in\mathbb{N}}(1 - \delta(1 - e^{-\gamma_n^2\delta^2}))$, qui est nul si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n^2 = +\infty$. Ainsi

$$\int_{H^s\times H^{s-1}} e^{-(\|u\|^2_{H^{s'}}+\|v\|^2_{H^{s'-1}})} d\mu_{(u_0,u_1)}(u, v) = 0,$$

ce qui implique $\mu_{(u_0,u_1)}(\mathcal{H}^{s'}) = 0$. On renvoie à [BT1] pour les détails. Lorsque la mesure θ est gaussienne, le résultat est une conséquence du théorème de Fernique ([Fe], Théorème 1.3.2).

Le fait que la mesure $\mu_{(u_0,u_1)}$ charge toutes les boules de $\mathcal{H}^s$ si le support de θ est égal à $\mathbb{R}$ et si tous les coefficients de Fourier de (u_0, u_1) sont non nuls s'obtient également en utilisant la caractérisation de la mesure $\mu_{(u_0,u_1)}$ comme un produit tensoriel infini de mesures de probabilité. De plus, la projection sur les hauts modes de Fourier tend vers zéro en probabilité, pour cette mesure $\mu_{(u_0,u_1)}$. Plus précisément, si $\Pi^N = 1 - \Pi_N$ est la projection dans $L^2(\mathbb{T}^3) \times L^2(\mathbb{T}^3)$ sur l'espace engendré par $\{\cos(n.x), \sin(n.x), |n| \geq N + 1\}$, alors

$$\mu_{(u_0,u_1)}\Big(\{(v_0, v_1) \in \mathcal{H}^s,\ \|\Pi^N(v_0, v_1)\|_{\mathcal{H}^s} > \delta\}\Big) \leq Ce^{-c\frac{\delta^2}{\|\Pi^N(u_0,u_1)\|^2_{\mathcal{H}^s}}} \tag{12}$$

et cette remarque permet de se ramener à un produit tensoriel fini de mesures de probabilité équivalentes à θ, pour lequel le résultat est immédiat. L'estimation (12) se montre avec les arguments de la section 2.3. □

Remarque 2.3. — Il est également démontré dans [BT3], à l'aide d'un résultat de Kakutani [Kak] donnant un critère pour l'absolu continuité de produits tensoriels infinis de mesures, que si les coefficients de Fourier de (u_0, u_1) et $(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1)$ sont « suffisamment proches », alors les mesures $\mu_{(u_0,u_1)}$ et $\mu_{(\tilde{u}_0,\tilde{u}_1)}$ sont équivalentes, tandis que dans le cas contraire, elles sont mutuellement singulières. Lorsque la mesure θ est gaussienne, ce résultat découle du théorème de Feldman-Hajek [Va].

2.2. Existence globale pour presque toutes données initiales

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat principal de [BT3].

Théorème 2.4. — *Supposons* $0 \leq s < 1$ *; soit* $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}^s$ *et soit* $\mu = \mu_{(u_0,u_1)}$ *définie dans la section 2.1, pour une mesure* θ *vérifiant la condition* (9)*. Alors il existe un ensemble* Σ *de* μ*-mesure totale dans* $\mathcal{H}^s$*, tel que pour tout* $(v_0, v_1) \in \Sigma$*, il existe une unique solution globale* v *de l'équation*

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)v + v^3 = 0 \\ (v(0), \partial_t(0)) = (v_0, v_1) \end{cases} \tag{13}$$

avec

$$(v(t), \partial_t v(t)) \in (S(t)(v_0, v_1), \partial_t S(t)(v_0, v_1) + C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{T}^3) \times L^2(\mathbb{T}^3)),$$

où l'on rappelle que $S(t)$ *est l'évolution libre définie par* (2)*. De plus, l'ensemble* Σ *peut être choisi invariant par le flot de l'équation* (13)*.*

Enfin, la croissance des normes de la solution ci-dessus peut être estimée de la manière suivante : pour $s \leq 1/2$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des constantes C et δ telles que, si l'on écrit la solution précédente $v(t)$ sous la forme

$$v(t) = S(t)(v_0, v_1) + w(t),$$

il existe $M = M(v_0, v_1)$ tel que

$$\|w(t)\|_{H^1} \leq \begin{cases} C(M + |t|)^{\frac{1-s}{s}+\varepsilon} & si\ 0 < s \leq 1/2, \\ Ce^{C(|t|+M)^2} & si\ s = 0, \end{cases}$$

et on a

$$\mu\Big(\{(v_0, v_1) \in \mathcal{H}^s,\ M > \lambda\}\Big) \leq Ce^{-\lambda^\delta}.$$

La dérivée en temps $\partial_t w$ vérifie des estimations du même type dans H^{s-1}.

Remarque 2.5. — Une estimation similaire a lieu pour $1/2 < s < 1$, à condition de retirer de l'évolution libre la partie constante de la donnée initiale (qui induit une croissance linéaire en temps dans l'évolution libre).

Au vu de la proposition 1.2, la première partie du résultat ci-dessus, c'est-à-dire l'existence globale de v pour μ-presque tout $(v_0, v_1) \in \mathcal{H}^s$ est immédiate si l'on sait que, pour μ-presque tout $(v_0, v_1) \in \mathcal{H}^s$:

$$S(t)(v_0, v_1) \in L^3_{loc}(\mathbb{R}; L^6(\mathbb{T}^3)) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}; L^\infty(\mathbb{T}^3)).$$

Ceci découle, pour $s > 0$, d'une propriété de « régularisation L^p » de la mesure μ qui sera démontrée dans la section 2.3 ci-après (en fait il sera démontré plus précisément une estimation de grandes déviations en norme L^p), propriété qui permet d'affirmer que pour μ-presque tout $(v_0, v_1) \in \mathcal{H}^s$, l'évolution libre vérifie $S(t)(v_0, v_1) \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^+; W^{s,p}(\mathbb{T}^3))$ pour tout p. L'injection de Sobolev $W^{s,p}(\mathbb{T}^3) \subset L^\infty(\mathbb{T}^3)$ pour p suffisamment grand permet alors de conclure dans le cas $s > 0$. Pour obtenir de plus un ensemble de données initiales invariant par le flot, il suffit alors de considérer l'ensemble $\Sigma = \Theta + H^1(\mathbb{T}^3) \times L^2(\mathbb{T}^3)$, où

$$\Theta = \{(v_0, v_1) \in \mathcal{H}^s, \quad S(t)(v_0, v_1) \in L^3_{loc}(\mathbb{R}^+; L^6(\mathbb{T}^3)) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}^+; L^\infty(\mathbb{T}^3))\}.$$

Le cas $s = 0$ nécessite cependant d'autres arguments, à cause de l'absence d'injection de Sobolev dans ce cas. L'idée de [BT3] est d'utiliser un argument similaire à celui de Yudovitch pour l'existence globale des solutions de l'équation d'Euler 2-D, en estimant, en fonction de j et sur un intervalle de temps adéquat, la croissance de l'énergie des solutions pour lesquelles $S(t)(v_0, v_1) \in L^j_{loc}(\mathbb{R}^+; L^j(\mathbb{T}^3))$, puis en utilisant un argument de boostrap.

La borne sur l'évolution des normes s'obtient (pour $s > 0$) en utilisant, en plus des arguments de la proposition 1.2, une décomposition de $S(t)(v_0, v_1)$ en hautes et basses fréquences, et l'estimation de grandes déviations de la section 2.2 sur la partie hautes fréquences.

2.3. Estimations de grandes déviations

Comme énoncé précédemment, l'argument principal permettant d'obtenir des solutions globales par le biais de la proposition 1.2 est la « régularisation L^p » qui est donnée par la proposition suivante, qui de plus fournit une estimation sur la décroissance des queues de la norme L^p, ou estimation de grandes déviations.

PROPOSITION 2.6. — *Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$ pour laquelle on suppose qu'il existe une constante C, avec $\|\varphi_n\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de variables aléatoires indépendantes de loi θ vérifiant la condition de décroissance* (9)*. On considère, pour une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n^2 < +\infty$, la fonction aléatoire $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n g_n(\omega)\varphi_n(x) \in L^2(\mathbb{T})$. Alors $f \in L^p(\mathbb{T})$, presque sûrement, pour tout p avec $1 \leq p < +\infty$, et il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\lambda > 0$,*

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{\omega,\ \Big\|\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n g_n \varphi_n\Big\|_{L^p(\mathbb{T})} > \lambda\Big\}\Big) \leq e^{-C\frac{\lambda^2}{\sum_n c_n^2}}.$$

Remarque 2.7. — Le fait que $f \in L^p(\mathbb{T})$ pour tout p est une conséquence d'un cas particulier d'un théorème dû à Paley et Zygmund, et datant des années 1930 [PZ], au moins dans le cas où les v.a. $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivent une loi de Bernoulli, et où $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la base de Fourier. Paley et Zygmund montrent en réalité que $e^{\lambda|f|^2} \in L^2(\mathbb{T})$, presque sûrement, pour tout $\lambda > 0$, ce qui implique en particulier que $f \in L^p(\mathbb{T})$, p.s. Une fois que l'on sait que $f \in L^p(\mathbb{T})$, p.s., il est naturel d'obtenir une estimation de décroissance exponentielle sur les queues de la probabilité, au moins dans le cas gaussien, grâce au théorème de Fernique.

L'estimation de grandes déviations précédente est en fait équivalente à l'estimation sur les moments d'ordre q suivante :

PROPOSITION 2.8. — *Sous les mêmes hypothèses que dans la proposition 2.6, il existe une constante $C > 0$, telle que pour tout $q \geq p$,*

$$\Big\|\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n g_n(\omega)\varphi_n\Big\|_{L^q(\Omega;L^p(\mathbb{T}))} \leq C\sqrt{q}\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n^2\Big)^{1/2}.$$

Pour montrer que la proposition 2.8 implique la proposition 2.6, il suffit, pour $\lambda > 0$ fixé, d'utiliser l'inégalité de Markov, et d'optimiser l'inégalité obtenue par rapport au paramètre q en prenant $q = \frac{\lambda^2}{e}$.

La proposition 2.8 découle à son tour de la proposition suivante, dont la preuve se révèle assez élémentaire.

PROPOSITION 2.9. — *Sous les mêmes hypothèses que celles de la proposition 2.6 ci-dessus, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\lambda > 0$,*

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{\omega,\ \Big|\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n g_n(\omega)\Big| > \lambda\Big\}\Big) \leq e^{-C\frac{\lambda^2}{\sum_n c_n^2}}. \tag{14}$$

À son tour, le passage de la proposition 2.9 à la proposition 2.8 ne nécessite que des arguments classiques : si ν est la loi de $\left|\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n g_n(\omega)\right|$, alors

$$\|\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n g_n(\omega)\|^q_{L^q(\Omega)} = \int_0^{+\infty} \lambda^q d\nu(\lambda) = q\int_0^{+\infty} \mathbb{P}\Big(\{\omega,\ |\sum_n c_n g_n| > \lambda\}\Big)\lambda^{q-1}d\lambda$$

et il est facile, en utilisant l'estimation (14) ainsi que l'expression explicite (en fonction de q) du moment d'ordre q d'une v.a. gaussienne, de montrer que le terme ci-dessus est majoré par $C(\sqrt{q})^q(\sum_n c_n^2)^{q/2}$ (inégalité de Khinchin). L'utilisation de l'inégalité de Minkowski permet d'écrire

$$\Big\|\sum_n c_n g_n \varphi_n\Big\|_{L^q(\Omega;L^p(\mathbb{T}))} \leq \Big\|\sum_n c_n g_n \varphi_n\Big\|_{L^p(\mathbb{T};L^q(\Omega))}$$

et d'utiliser l'inégalité précédente, à x fixé, avec c_n remplacé par $c_n\varphi_n(x)$; on conclut grâce à l'inégalité de Minkowski pour la somme.

Preuve de la proposition 2.9. Par indépendance des v.a. $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on calcule aisément pour $t > 0$,

$$\mathbb{E}\Big(e^{t\sum_n c_n g_n}\Big) = \prod_{n\geq 0}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tc_n x}d\theta(x).$$

L'hypothèse de décroissance (9) sur la mesure θ permet de majorer le terme précédent par

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} e^{c(tc_n)^2} = e^{ct^2\sum_n c_n^2}.$$

On déduit de l'inégalité de Markov exponentielle que pour $\lambda > 0$, et pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}(\{\omega,\ \sum_n c_n g_n > \lambda\}) \leq e^{-t\lambda + ct^2\sum_n c_n^2}$$

et une optimisation de cette inégalité par rapport au paramètre $t > 0$ induit l'estimation

$$\mathbb{P}(\{\omega,\ \sum_n c_n g_n > \lambda\}) \leq e^{-\frac{\lambda^2}{4c\sum_n c_n^2}}.$$

L'inégalité symétrique s'obtient en remplaçant c_n par $-c_n$. □

Finalement, pour revenir au contexte de l'équation des ondes cubiques, la proposition 2.6 précédente, appliquée avec $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\cos n.x, \sin n.x)_{n\in\mathbb{Z}^3}$, ainsi que l'expression explicite en Fourier de l'évolution libre $S(t)$:

$$\begin{aligned} S(t)(u_0(\omega), u_1(\omega)) &= \alpha_{0,0}a_{0,0} + \alpha_{0,1}a_{0,1}t \\ &\quad + \sum_{n\in\mathbb{Z}^3\setminus\{0\}} \Big(\alpha_{n,0}a_{n,0}\cos(|n|t) + \alpha_{n,1}a_{n,1}\frac{\sin(|n|t)}{|n|}\Big)\cos(n.x) \\ &\quad + \sum_{n\in\mathbb{Z}^3\setminus\{0\}} \Big(\beta_{n,0}b_{n,0}\cos(|n|t) + \beta_{n,1}b_{n,1}\frac{\sin(|n|t)}{|n|}\Big)\sin(n.x) \end{aligned}$$

mènent au corollaire suivant, à l'aide d'arguments identiques à ceux utilisés pour montrer la proposition 2.6.

Corollaire 2.10. — *Fixons* $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}^s$, *avec* $0 \le s < 1$ *et définissons* $\mu = \mu_{(u_0,u_1)}$ *comme dans la section 2.1. Alors pour tout* $T_0 > 0$ *et tout* p *tel que* $2 \le p < +\infty$, *il existe des constantes* C *et* c *positives telles que pour tout* $\lambda > 0$,

$$\mu\Big(\{(v_0, v_1) \in \mathcal{H}^s \ \|S(t)(v_0, v_1)\|_{L^p(0,T_0;W^{s,p}(\mathbb{T}^3))} > \lambda\}\Big) \le C \exp\Big(-\frac{c\lambda^2}{\|(u_0, u_1)\|^2_{\mathcal{H}^s}}\Big).$$

De manière équivalente, il existe une constante $C > 0$ *telle que pour tout* $q \ge p$,

$$\|S(t)(u_0(\omega), u_1(\omega)\|_{L^q(\Omega;L^p(0,T_0;W^{s,p}(\mathbb{T}^3)))} \le C\sqrt{q}(\|(u_0, u_1)\|^2_{\mathcal{H}^s}.$$

Ce dernier corollaire éclaire donc le fait qu'il est possible (au moins pour $s > 0$) d'appliquer la proposition 1.2 pour μ-presque tous $(v_0, v_1) \in \mathcal{H}^s$ pour obtenir l'existence globale des solutions correspondantes de l'équation (1). On obtient ainsi un flot (déterministe) bien défini μ presque sûrement sur $\mathcal{H}^s$.

Remarque 2.11. — Il est utile de remarquer que la seule propriété utilisée ici concernant le flot $S(t)$ est son caractère multiplicateur de Fourier à coefficients uniformément bornés. Il est donc clair que cette méthode – sous réserve évidemment de disposer d'un résultat déterministe du même type que celui de la proposition 1.2 – s'applique à de nombreux autres modèles dont l'évolution linéaire est unitaire dans les espaces de Sobolev. L'absence de résultat déterministe aussi simple que celui de la proposition 1.2 nécessite cependant, en général, d'utiliser des arguments déterministes beaucoup plus techniques. On renvoie à la section 4 pour une brève description des généralisations disponibles a l'heure actuelle. De même, il est clair par cet argument que la généralisation à d'autres variétés n'est pas immédiate, en l'absence de propriétés équivalentes sur les fonctions propres de l'opérateur de Laplace–Beltrami associé. Là encore, on renvoie à la section 4 pour plus de détails.

3. CONTINUITÉ PROBABILISTE DU FLOT

Une question naturelle, au vu des résultats mentionnés dans le théorème 1.3 (section 1) et ceux de la section 2, est celle de la continuité du flot construit dans le théorème 2.4. On peut en effet légitimement se demander si le flot ainsi construit est continu, μ-presque sûrement. Cela signifierait en particulier que la mesure μ ne voit pas les données initiales pathologiques données par le théorème 1.3, qui donnent lieu à des contre-exemples pour la continuité du flot. Ce résultat est en fait faux, ainsi que le montre la seconde partie du théorème ci-dessous. Il est possible néanmoins de démontrer le résultat de continuité plus faible suivant, qui correspond à une certaine notion de « continuité en probabilité ».

Théorème 3.1 ([BT3]). — *On suppose ici que la mesure* θ *est symétrique et vérifie la propriété* (9). *Soit* s *tel que* $0 < s < 1$, *et soient* $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}^s$ *et* $\mu = \mu_{(u_0,u_1)}$ *la mesure* *construite au paragraphe 2.1. On fixe $T > 0$ et on considère le flot $\Phi(t)$ défini μ presque sûrement dans le théorème 2.4. Alors pour tous $\varepsilon, A > 0$, la probabilité conditionnelle*

$$\mu \otimes \mu \left(\{(V_0, V_1) \in (\mathcal{H}^s)^2,\ \|\Phi(t)V_0 - \Phi(t)V_1\|_{X_T} > \varepsilon \ \middle|\ \|V_0 - V_1\|_{\mathcal{H}^s} < \eta,\ \|V_0\|_{\mathcal{H}^s} \leq A,\ \|V_1\|_{\mathcal{H}^s} \leq A\}\right) \tag{15}$$

tend vers zero avec η. Ici l'espace X_T est donné par

$$X_T = \Big(C([0,T]; H^s) \times C^1([0,T]; H^{s-1})\Big) \cap L^4([0,T] \times \mathbb{T}^3).$$

De plus, si la mesure μ est supportée par $\mathcal{H}^s$ (par exemple, si tous les coefficients de Fourier de (u_0, u_1) sont non nuls et si le support de la mesure θ est égal à $\mathbb{R}$) alors la probabilité conditionnelle (15) *est strictement positive pour tout $\eta > 0$, si ε est choisi suffisamment petit.*

Remarque 3.2. — Ce théorème ne dit rien sur la continuité en loi du flot, puisque la mesure μ de la donnée initiale est fixée.

La preuve de la partie positive (continuité en probabilité) du théorème 3.1 contient essentiellement deux ingrédients. Le premier ingrédient est un résultat (entièrement déterministe) de continuité conditionnelle, et le second ingrédient est une amélioration des estimations de grandes déviations de la section 2.3 sous forme d'estimations de grandes déviations conditionnées (voir la proposition 3.4 ci-dessous).

Proposition 3.3 (continuité conditionnelle). — *On fixe $T > 0$. Il existe $\alpha, \beta > 0$ (assez petits) et une constante $C_T > 0$ tels que pour tout $\eta > 0$, si $V_0, V_1 \in \Sigma$ (où Σ est l'ensemble défini par le théorème 2.4) vérifient*

$$\|S(t)(V_0 - V_1)\|_{L^4([0,T];L^6(\mathbb{T}^3))} \leq \eta^{1-\alpha}, \tag{16}$$

et

$$\|S(t)V_j\|_{L^4([0,T];L^6(\mathbb{T}^3))} \leq \beta \log\log(\eta^{-1}),\ j = 0, 1 \tag{17}$$

et si $\|V_0 - V_1\|_{\mathcal{H}^s} < \eta$, alors

$$\|\Phi(t)V_0 - \Phi(t)V_1\|_{X_T} \leq C_T \eta^{1/2}.$$

La preuve de cette proposition s'obtient simplement en utilisant, pour $j = 0, 1$, la décomposition de la solution $v_j(t)$ de l'équation (1) avec $(u_0, u_1) = V_j$ sous la forme

$$v_j(t) = S(t)V_j + w_j(t)$$

et en estimant $\frac{d}{dt}\|w_0 - w_1\|^2_{H^1} + \frac{d}{dt}\|\partial_t(w_0 - w_1)\|^2_{L^2}$ grâce à l'équation vérifiée par w_j, $j = 0, 1$ et à l'évolution de l'énergie $\mathcal{E}(w_j)(t)$.

Ainsi, en notant $\mathcal{A}_\eta$ (resp. $\mathcal{B}_\eta$) l'ensemble des couples $(V_0, V_1) \in (\mathcal{H}^s)^2$ pour lesquels la propriété (16) (resp. (17)) est vérifiée, et si pour $\varepsilon > 0$

$$U_\varepsilon = \Big\{(V_0, V_1) \in (\mathcal{H}^s)^2,\ \|\Phi(t)V_0 - \Phi(t)V_1\|_{X_T} > \varepsilon\Big\},$$

alors la proposition 3.3 dit que pour η suffisamment petit,

$$\mu\otimes\mu(U_\varepsilon\cap\mathcal{A}_\eta\cap\mathcal{B}_\eta\Big|\|V_0-V_1\|_{\mathcal{H}^s}\leq\eta)=0.$$

En particulier, la probabilité (15) peut être majorée par

$$\begin{aligned}&\mu\otimes\mu(\mathcal{A}_\eta^c\;\Big|\;\|V_0-V_1\|_{\mathcal{H}^s}\leq\eta,\ \|V_0\|_{\mathcal{H}^s}\leq A,\ \ \|V_1\|_{\mathcal{H}^s}\leq A)\\&+\mu\otimes\mu(\mathcal{B}_\eta^c\;\Big|\;\|V_0-V_1\|_{\mathcal{H}^s}\leq\eta,\ \|V_0\|_{\mathcal{H}^s}\leq A,\ \ \|V_1\|_{\mathcal{H}^s}\leq A).\end{aligned}\tag{18}$$

Il est moralement facile de voir que le conditionnement par $\max(\|V_0\|_{\mathcal{H}^s},\|V_1\|_{\mathcal{H}^s})\leq A$ n'intervient pas dans le premier terme de (18) car ajouter une même constante à V_0 et V_1 ne change pas la réalisation de $\mathcal{A}_\eta^c$. Quant au second terme, pour η suffisamment petit, il est du même ordre que

$$\mu(\{V\ \in\mathcal{H}^s,\ \|S(t)V\|_{L^4([0,T];L^6)}>\beta\log\log(\eta^{-1})\;\Big|\;\|V\|_{\mathcal{H}^s}\leq A\}).$$

Ainsi, le théorème 2.4 découle de la proposition suivante, par les mêmes arguments qui permettent de déduire le corollaire 2.10 de la proposition 2.6, grâce à nouveau à l'expression de l'évolution libre $S(t)$ comme multiplicateur de Fourier à coefficients bornés.

Proposition 3.4 (Grandes déviations conditionnées [T1]). — *Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$ vérifiant les hypothèses de la proposition 2.6. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendantes de loi θ symétrique et vérifiant la propriété de décroissance (9) ; soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\sum_n c_n^2<+\infty$. Alors pour tout p avec $1\leq p<+\infty$, il existe une constante $c>0$ telle que pour tous $\lambda,\varepsilon>0$, si $f(x)=\sum_n c_ng_n\varphi_n(x)$, alors*

$$\mathbb{P}\Big(\{\omega,\ \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}>\lambda\;\Big|\;\|f\|_{L^2(\mathbb{T})}\leq\varepsilon\}\Big)\leq e^{-c\frac{\lambda^2}{\varepsilon^2}}.$$

Preuve de la proposition 3.4. On considère une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires de Bernoulli iid, indépendantes de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On note μ_0 la mesure induite par $(h_n)_n$ sur $\ell^\infty(\mathbb{R}^\mathbb{N})$ et pour $h\in\ell^\infty(\mathbb{R}^\mathbb{N})$, et $u=\sum_{n\in\mathbb{N}}c_n\varphi_n\in L^2(\mathbb{T})$, on note

$$u\odot h=\sum_{n\in\mathbb{N}}h_nc_n\varphi_n.$$

Alors d'une part, il est clair que la suite $(g_nh_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également une suite de variables aléatoires indépendantes de loi θ (supposée, on le rappelle, symétrique), de sorte que si μ est la mesure induite par f sur $L^2(\mathbb{T})$, on peut écrire

$$\begin{aligned}&\mu(\|f\|_{L^p}>\lambda\;\Big|\;\|f\|_{L^2}\leq\varepsilon)\\=\;&\mathbb{P}(\{\omega,\ \|\textstyle\sum_n c_ng_nh_n\varphi_n\|_{L^p(\mathbb{T})}>\lambda\;\Big|\;\|\sum_n c_ng_nh_n\varphi_n\|_{L^2(\mathbb{T})}\leq\varepsilon\})\\=\;&\mu\otimes\mu_0\,(\|f\odot h\|_{L^p(\mathbb{T})}>\lambda\;\Big|\;\|f\odot h\|_{L^2(\mathbb{T})}\leq\varepsilon).\end{aligned}\tag{19}$$

De plus, puisque $\|f\odot h\|_{L^2}=(\sum_n c_n^2g_n^2)^{1/2}$, le dernier terme de (19) est en fait égal à

$$\mu\otimes\mu_0\,(\|f\odot h\|_{L^p}>\lambda\;\Big|\;\|f\|_{L^2}\leq\varepsilon),\tag{20}$$

qui est majoré par

$$\sup_{u\in L^2(\mathbb{T}),\ \|u\|_{L^2}\leq\varepsilon} \mu_0(\|u\odot h\|_{L^p}>\lambda).$$

Or, pour $u=\sum_n c_n\varphi_n \in L^2(\mathbb{T})$ avec $\|u\|_{L^2}^2=\sum_n c_n^2$, la proposition 2.9 permet de majorer $\mu_0(\|u\odot h\|_{L^p}>\lambda)$ par $e^{-c\frac{\lambda^2}{\sum_n c_n^2}}=e^{-c\frac{\lambda^2}{\|u\|_{L^2}^2}}$ qui elle-même est majorée, si $\|u\|_{L^2}\leq\varepsilon$, par $e^{-c\frac{\lambda^2}{\varepsilon^2}}$, et la proposition est prouvée. □

4. QUELQUES EXTENSIONS

Toujours dans le contexte des ondes semi-linéaires, les résultats déterministes élémentaires utilisés ici (propositions 1.2 et 3.3) restent vraies dans le cas d'une variété plus générale. Par contre, la proposition 2.6 et donc le corollaire 2.10 utilisent de manière essentielle le fait que les fonctions propres de l'opérateur de Laplace sur le tore sont uniformément bornées dans L^p par rapport à n, et ceci pour tout p. On pourra à ce sujet consulter [AT] à propos du caractère nécessaire de cette propriété pour la proposition 2.6. Ainsi, la généralisation à d'autres variétés compactes, à commencer par la sphère, n'est pas immédiate, puisqu'en général cette propriété est fausse. Le problème a été étudié pour la sphère et pour d'autres variétés compactes sans bord M, par Burq et Lebeau [BL], en utilisant une mesure de probabilité sur $L^2(M)$ différente de celle utilisée ici, basée sur un produit tensoriel de mesures définies sur des sous-espaces propres de dimension bien choisie, et qui correspondent à une répartition uniforme de l'énergie dans l'espace T^*M pour la mesure de Liouville. Cette mesure de probabilité sur $L^2(M)$ vérifie également des inégalités de concentration en norme L^p et elle est utilisée dans [BL] pour montrer le caractère localement bien posé presque sûrement de l'équation des ondes semi-linéaire, H^1-sur-critique, en dimension trois (i.e. avec terme non linéaire u^p, $p>5$). Cette nouvelle probabilisation a également généré d'autres travaux. Ainsi, de Suzzoni démontre dans [dS3] un résultat d'existence global presque sûr pour cette mesure, pour l'équation des ondes cubiques sur la sphère S^3, similaire à celui présenté ici, et obtient un résultat similaire sur $\mathbb{R}^3$ grâce à la transformée de Penrose. Le cas de $\mathbb{R}^3$ est également étudié dans [LM], à l'aide d'une mesure définie par la localisation en Fourier sur des couronnes, donc plus proche de celle de [BT3].

Les idées de [BL] ont également été exploitées par Poiret, Robert et Thomann, qui construisent une mesure sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ adaptée à l'oscillateur harmonique $-\Delta+|x|^2$, et qui vérifie également des inégalités de concentration leur permettant de montrer un résultat d'existence globale pour l'équation de Gross-Pitaevskii sur-critique

$$\begin{cases} i\partial_t u+\Delta u-|x|^2u=\pm|u|^{p-1}u \\ u(0)=u_0 \end{cases}$$

où $d\geq 2$ et où $p\geq 3$ est un entier impair (voir [PRT1, PRT2]).

De manière générale, l'obtention de résultats d'existence globale presque-sûrs pour des équations de type Schrödinger non linéaires requiert l'utilisation de la méthode de décomposition haute-basse fréquence de Bourgain mentionnée dans la section 1, à cause du manque de régularisation de l'évolution libre. Ainsi, cette méthode est utilisée par Colliander et Oh [CO] pour obtenir l'existence presque sûre, pour des mesures gaussiennes sur $H^s(\mathbb{T})$, pour l'équation de Schrödinger non linéaire (NLS) cubique 1-D avec renormalisation de Wick, locale si $s > -1/3$ et globale si $s > -1/12$. Dans le même ordre d'idées, Nahmod et Staffilani ont obtenu un résultat d'existence locale presque sûr pour l'équation de NLS quintique périodique en dimension trois, sous la régularité critique H^1, à nouveau avec une renormalisation. La méthode a également été utilisée pour obtenir des solutions globales faibles sur-critiques des équations de Navier-Stokes [NPS] ou des ondes périodiques [BTT2].

Un défi important pour l'avenir sera de déterminer les propriétés qualitatives de la mesure transportée par le flot. En particulier, cette mesure possède-t-elle une densité par rapport à la mesure initiale ?

Enfin, rappelons pour terminer le lien essentiel qui existe entre les travaux mentionnés ici et ceux qui concernent l'existence globale de solutions à l'aide des mesures de Gibbs. En effet, même si l'accent est mis ici sur d'autres méthodes de globalisation, une des motivations essentielles de [BT1] était de pouvoir obtenir l'existence locale de solutions de (1) dans le support de la mesure invariante. Cette motivation prend ses origines dans les travaux de Lebowitz, Rose et Speer [LRS] qui ont introduit la mesure de Gibbs, invariante pour le flot de l'équation de Schrödinger non linéaire, puis de Bourgain [Bo1], qui a formalisé, et utilisé cette mesure pour montrer l'existence globale de solutions dans son support (voir aussi [Zh, Bo4]). L'expression formelle $e^{-\mathcal{E}(u)}du$ de la mesure de Gibbs (où $\mathcal{E}$ est le hamiltonien, ou énergie de l'équation) montre que, quand on peut lui donner un sens, cette mesure est absolument continue par rapport à la mesure gaussienne invariante pour le flot de l'évolution libre, qui s'exprime facilement sur une base de fonctions propres de l'opérateur de Laplace associé à l'EDP considérée. Pour l'équation de NLS considérée par Bourgain dans [Bo1], le support de la mesure de Gibbs contient des fonctions de régularité sous-critique par rapport au scaling, permettant ainsi d'utiliser la théorie locale classique, mais pour de nombreuses autres équations, cette régularité est sur-critique, et nécessite d'utiliser des arguments similaires à ceux de [BT1] pour l'existence locale. La classe des EDP hamiltoniennes possédant formellement une telle mesure invariante est très vaste et ces travaux ont d'ores et déjà engendré une quantité importante de généralisations, parmi lesquelles nous mentionnerons (pour les résultats sur-critiques) [Bo2] pour l'équation de NLS périodique, [BTT1] pour l'équation de Gross-Pitaevskii sur $\mathbb{R}$, [BT2, dS1, dS2] pour les ondes semi-linéaires, et les très récents travaux de Bourgain et Bulut [BB1, BB2, BB3, BB4] dont la partie existence locale comprend des résultats largement sur-critiques.

RÉFÉRENCES

[AC] T. ALAZARD, R. CARLES – *Loss of regularity for supercritical nonlinear Schrödinger equations*, Math. Ann. **343** (2009), 397–420.

[AT] A. AYACHE, N. TZVETKOV – *L^p properties of Gaussian random series*, Trans. Am. Math. Soc. **360** (2008), 4425–4439.

[BC] H. BAHOURI, J.-Y. CHEMIN – *On global well posedness for defocusing cubic wave equation*, Int. Math. Res. Not. (2006).

[Bo1] J. BOURGAIN – *Periodic nonlinear Schrödinger equation and invariant measures*, Comm. Math. Phys. **166** (1994), 1–26.

[Bo2] J. BOURGAIN – *Invariant measures for the 2D-defocusing nonlinear Schrödinger equation*, Comm. Math. Phys. **176** (1996), 421–445.

[Bo3] J. BOURGAIN – *Refinement of Strichartz's inequality and applications to 2D-NLS with critical nonlinearity*, Int. Math. Res. Not. (1998), 253–285.

[Bo4] J. BOURGAIN – *Global solutions of nonlinear Schrödinger equations*, American Mathematical Society Colloquium Publications **46**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[BB1] J. BOURGAIN, A. BULUT – *Gibbs measure evolution in radial nonlinear wave and Schrödinger equations on the ball*, C.R. Acad. Sci. PAris, Ser. I **350** (2012) 571–575.

[BB2] J. BOURGAIN, A. BULUT – *Almost sure global well-posedness for the radial nonlinear Schrödinger equation on the unit ball I : the 2D case*, Prépublication arXiv :1309.4072

[BB3] J. BOURGAIN, A. BULUT – *Almost sure global well-posedness for the radial nonlinear Schrödinger equation on the unit ball II : the 3D case*, Prépublication arXiv :1302.5409

[BB4] J. BOURGAIN, A. BULUT – *Invariant Gibbs measure evolution for the radial nonlinear wave equation on the 3D ball*, Prépublication arXiv :1304.1477

[BL] N. BURQ, G. LEBEAU – *Injections de Sobolev probabilistes et applications*, Prépublication arXiv :1111.7310.

[BTT1] N. BURQ, L. THOMANN, N. TZVETKOV – *Long time dynamics for the one dimensional nonlinear Schrödinger equation*, à paraître dans Annales de l'Institut Fourier.

[BTT2] N. BURQ, L. THOMANN, N. TZVETKOV – *Global infinite energy solutions for the cubic wave equation*, Prépublication arXiv :1210.2086

[BT1] N. BURQ, N. TZVETKOV – *Random data Cauchy theory for supercritical wave equations I : local existence theory*, Invent. Math. **173** (2008), 449–475.

[BT2] N. BURQ, N. TZVETKOV – *Random data Cauchy theory for supercritical wave equations II : A global existence result*, Invent. Math. **173** (2008), 477–496.

[BT3] N. BURQ, N. TZVETKOV – *Probabilistic well-posedness for the cubic wave equation*, à paraître dans J. Eur. Math. Soc.

[CW] T. CAZENAVE, F. WEISSLER – *The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s*, Nonlinear Anal. Theor. Meth. and Applic. **14** (1990), 807–836.

[CCT] M. CHRIST, J. COLLIANDER, T. TAO – *Ill posedness for nonlinear Schrödinger and wave equations*, à paraître dans Ann. H. Poincaré.

[CO] J. COLLIANDER, T. OH – *Almost sure well-posedness for the cubic nonlinear Schrödinger equation below $L^2(\mathbb{T})$*, Duke Math. J. **161** (2012), 367–414.

[Fe] X. FERNIQUE – *Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes*, École d'Été de Probabilités de Saint-Flour IV-1974, Lect. Notes in Math. **480** (1975), Springer-Verlag, 2–96.

[FPT] G. FURIOLI, F. PLANCHON, E. TERRANEO – *Unconditional well-posedness for semilinear Schrödinger and wave equations in H^s*, Harmonic Analysis at Mount Holyoke 147–156, Contemp. Math. **320**, Amer. Math. Soc., Providence RI, 2003.

[GP] I. GALLAGHER, F. PLANCHON – *On global solutions of a defocusing semilinear wave equation*, Rev. Mat. Iberoamericana **19** (2003), 161–177.

[Ge] P. GÉRARD – *Oscillations and concentration effects in semilinear dispersive wave equations*, J. Funct. Anal. **141** (1996), 60–98.

[GV1] J. GINIBRE, G. VELO – *The global Cauchy problem for the nonlinear Klein-Gordon equation*, Math. Z. **189** (1985), 487–505.

[GV2] J. GINIBRE, G. VELO – *Conformal invariance and time decay for nonlinear wave equation II*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Theor. **47** (1987), 263–276.

[GV3] J. GINIBRE, G. VELO – *Generalized Strichartz inequalities for the wave equation*, J. Funct. Anal. **133** (1995), 50–68.

[Gr1] M. GRILLAKIS – *Regularity and asymptotic behaviour of a wave equation with a critical nonlinearity*, Ann. of Math. **132** (1990), 485–509.

[Gr2] M. GRILLAKIS – *Regularity for the wave equation with critical nonlinearity*, Comm. Pure Appl. Math. **45** (1992), 749–774.

[ILP] O. IVANOVICI, G. LEBEAU, F. PLANCHON – *Dispersion for the wave equation inside strictly convex domain I : the Friedlander model case*, à paraître dans Ann. of Math.

[Kak] S. KAKUTANI – *On equivalence of infinite product of measures*, Ann. of Math. 2nd series **49** (1948), 214–224.

[Kap] L. KAPITANSKI – *Some generalizations of the Strichartz-Brener inequality*, Leningrad Math. J. **1** (1990), 693–726.

[KPV] C. KENIG, G. PONCE, L. VEGA – *Global well-posedness for semi-linear wave equations*, Comm. Partial Diff. Equ. **25** (2000), 1741–1752.

[Le] G. LEBEAU – *Perte de régularité pour les équations d'ondes sur-critiques*, Bull. Soc. Math. France **133** (2005), 145–157.

[LRS] J.L. LEBOWITZ, H.A. ROSE, E.R. SPEER – *Statistical mechanics of the nonlinear Schrödinger equation*, J. Statist. Phys. **50** (1988), 657–687.

[LS] H. LINDBLAD, C.D. SOGGE – *On existence and scattering with minimal regularity for semilinear wave equation*, J. Funct. Anal. **130** (1995), 357–426.

[LM] J. LÜHRMANN, D. MENDELSON – *Random data Cauchy theory for nonlinear wave equations of power type on* $\mathbb{R}^3$, Prépublication arXiv :1309.1225

[NPS] A. NAHMOD, N. PAVLOVIC, G. STAFFILANI – *Almost sure existence of global weak solutions for supercritical Navier-Stokes equations*, Prépublication arXiv :1204.5444

[NS] A. NAHMOD, G. STAFFILANI – *Almost sure well posedness for the periodic 3D quintic nonlinear Schrödinger equation below the energy space*, Prépublication arXiv :1308.1169

[PZ] R.E.A.C. PALEY, A. ZYGMUND – *On some series of functions*, Proc. Camb. Philos. Soc. **26** (1930), 337–357 and 456–474, **28** (1932), 190–205.

[Pla1] F. PLANCHON – *On uniqueness for semilinear wave equation*, Math. Z. **244** (2003), 587–599.

[Pla2] F. PLANCHON – *On global solutions to a defocusing semilinear wave equation, A shorter proof*, non publié, `http://math.unice.fr/ fab/wave.html`

[PRT1] A. POIRET, D. ROBERT, L. THOMANN – *Random weighted Sobolev inequalities on* $\mathbb{R}^d$ *and application to Hermite functions*, Prépublication arXiv :1307.4976

[PRT2] A. POIRET, D. ROBERT, L. THOMANN – *Probabilistic global well-posedness for the supercritical nonlinear harmonic oscillator*, Prépublication arXiv :1309.0795

[Ro1] T. ROY – *Global well-posedness for the radial defocusing wave equation on* $\mathbb{R}^3$ *and for rough data*, Elec. J. Differ. Equ. **166** (2007), 22p.

[Ro2] T. ROY – *Adapted linear-nonlinear decomposition and global well-posedness for solutions to the defocusing cubic wave equation on* $\mathbb{R}^3$, Disc. Cont. Dyn. Syst. **24** (2009), 1307–1323.

[SS] J. SHATAH, M. STRUWE – *Regularity results for nonlinear wave equations*, Ann. of Math. **138** (1993), 503–518.

[St] R. STRICHARTZ – *Restriction of Fourier transform to quadratic surfaces and decay of solutions to the wave equations*, Duke Math. J. **44** (1977), 705–714.

[dS1] A.-S. de SUZZONI – *Invariant measure for the cubic wave equation on the unit ball of* $\mathbb{R}^3$, Dyn. Partial Differ. Equ. **8** (2011), 127–147.

[dS2] A.-S. de SUZZONI – *Large data low regularity scattering results for the wave equation on the Euclidean space*, Comm. Partial Diff. Equ. **38** (2013), 1–49.

[dS3] A.-S. de SUZZONI – *Consequences of the choice of a particular basis of $L^2(S^3)$ for the cubic wave equation on the sphere and Euclidean space*, Prépublication arXiv :1207.2384.

[T1] N. TZVETKOV – *Communication personnelle.*

[Va] S.S. VARADHAN – *Stochastic Processes*, Courant Institute, New York University, 1968.

[Zh] P.E. ZHIDKOV – *Korteweg-de Vries and nonlinear Schrödinger equations : qualitative theory*, Lect. Notes in Math. **1756**, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

Anne de BOUARD

École Polytechnique
C.M.A.P.
Route de Saclay
91128 Palaiseau Cedex
E-mail : debouard@cmap.polytechnique.fr