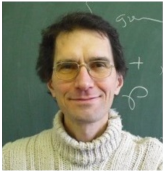
Une introduction aux groupes polonais, et quelques liens avec la théorie des modèles

J. Melleray

Institut Camille Jordan (Université Lyon 1)

Séminaire Betty B. - 21 mai 2021



LIBERTÉ POUR TUNA ALTINEL

I. Groupes polonais

Abréviation que, pour rire, j'ai suggérée à N. Bourbaki en 1949 après avoir appris le sujet dans la *Topologie* de Casimir Kuratowski (Acad. des sciences de Varsovie, 1933, en français, réédité en deux volumes dans les années 1950) et constaté la contribution des Polonais ; j'aurais du reste aussi bien pu les appeler " polono-russes ". La plaisanterie, qui n'en était pas entièrement une, fut prise au sérieux et tous les experts ont depuis adopté cette étrange terminologie, généralement sans mentionner N. Bourbaki à l'exception de Kuratowski lui-même qui, dans un petit livre paru

Les objets de notre attention

Définition

Un groupe polonais est un groupe topologique métrisable, séparable et dont la topologie admet une distance compatible complète.

On parle aussi d'*espace métrique polonais* : espace métrique séparable et complet ; et d'*espace polonais* : espace topologique séparable métrisable, avec une distance compatible complète

Premiers exemples de groupes polonais

- Tout groupe dénombrable discret.
- $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}^n, +)$, les espaces de Banach séparables vus comme groupes additifs.
- Tout groupe localement compact métrisable et séparable est polonais (avec une distance invariante à gauche dont les boules fermées sont compactes).
- Tout groupe d'homéomorphismes d'un espace compact métrisable (avec la topologie compacte-ouverte) ; tout groupe d'isométries d'un espace métrique polonais (avec la topologie de la convergence simple).

Le groupe $\mathfrak{S}_\infty$

Définition

On note $\mathfrak{S}_\infty$ le groupe des bijections de $\mathbb{N}$ dans lui-même ; on le munit de la topologie induite par la topologie produit sur $\mathbb{N}^\mathbb{N}$.

- Distance compatible :
  $d(\sigma,\tau) = \inf\{2^{-n} \colon \forall i \leq n\ \sigma(i) = \tau(i)\}$.
- d est invariante par multiplication à gauche, mais pas complète (considérer $\sigma_i(n) = n+1$ pour $n \leq i$, $\sigma_i(i+1) = 0$, $\sigma_i(n) = n$ pour $n > i+1$).
- Une distance compatible complète, mais pas invariante par multiplication à gauche : $\rho(\sigma,\tau) = d(\sigma,\tau) + d(\sigma^{-1},\tau^{-1})$.

Un exemple issu de la théorie ergodique

Définition

On note MALG l'ensemble des parties mesurables de $([0,1],\lambda)$, identifiées à mesure nulle près, muni de la distance donnée par $d(A,B)=\lambda(A\Delta B)$.

$\mathrm{Aut}([0,1],\lambda)$ est le groupe des bijections bi-mesurables de $[0,1]$ (là encore, identifiées à mesure nulle près).

- (MALG,d) est un espace métrique polonais.
- $\mathrm{Aut}([0,1],\lambda)$ est le groupe des isométries de (MALG,d) qui fixent $\emptyset$. La topologie induite par les applications $T \mapsto T(A)$, où A parcourt MALG, en fait donc un groupe polonais.

Perte de la mesure de Haar

Théorème (Ulam)

Soit G un groupe polonais tel qu'il existe une mesure borélienne σ-finie μ sur G, non nulle et telle que μ et $g_*\mu$ aient les mêmes ensembles négligeables pour tout $g \in G$. Alors G est localement compact.

Preuve :

- Il existe un compact K tel que $0 < \mu(K) < +\infty$.
- Soit H le sous-groupe de G engendré par K. Si H est d'indice non dénombrable alors μ n'est pas σ-finie.
- Donc il existe une suite (g_n) dans G telle que $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} g_n H$; par Baire il doit exister m tel que $(K \cup K^{-1})^m$ soit d'intérieur non vide : G est localement compact. $\square$

Théorème

Soit G un groupe polonais, et H un sous-groupe de G qui est polonais pour la topologie induite. Alors H est fermé.

Preuve :

- H est G_δ parce que polonais.
- Donc H est G_δ et dense dans $\overline{H}$; il en va de même de kH pour tout $k \in \overline{H}$.
- Par Baire : $H \cap kH \neq \emptyset$ pour tout $k \in \overline{H}$, donc $H = \overline{H}$. $\square$

Définition

Une *uniformité* sur X est une famille $\mathcal{U}$ de parties de $X \times X$ (les "entourages") telle que :

- $\forall E \in \mathcal{U} \ \Delta_X \subseteq E$
- $\forall E, F \in \mathcal{U} \ E^{-1} \in \mathcal{U}$ et $E \cap F \in \mathcal{U}$
- $\forall E, F \ ((E \in \mathcal{U}$ et $E \subseteq F) \Rightarrow F \in \mathcal{U})$
- $\forall E \in \mathcal{U} \ \exists F \in \mathcal{U} \quad F \circ F \subseteq E$.

À toute uniformité est associée une topologie sur X (et à toute distance sur X est associée une uniformité)

Par exemple, l'uniformité *à gauche* sur un groupe topologique a une base d'entourages de la forme $\{(g,h) \colon g \in hU\}$, où U est un voisinage de 1.

Structure uniforme de Raikov

Soit G un groupe topologique, et $\mathcal{U}$ la structure uniforme dont une base d'entourages est donnée par les parties

$$\{(g,h)\colon g \in Uh \text{ et } g \in hU\}$$

pour U un voisinage de 1.
Si d est une distance compatible invariante à gauche, $\mathcal{U}$ est induite par la distance donnée par

$$\rho(g,h) = d(g,h) + d(g^{-1},h^{-1})$$

Si G est un groupe polonais, le complété de (G,ρ) est de nouveau un groupe polonais, et G y est fermé : ρ est donc complète.

Parties Baire-mesurables

Définition

Soit G un groupe polonais. $A \subseteq G$ est Baire-mesurable s'il existe un ouvert U tel que $A \Delta U$ soit maigre.

- Les parties Baire-mesurables forment une tribu, qui contient la tribu borélienne.
- Un morphisme Baire-mesurable entre groupes polonais est nécessairement continu (Banach) ; analogue d'un résultat de Weil sur les morphismes Haar-mesurables entre groupes polonais localement compacts.

Quelques phénomènes surprenants

Il existe des groupes polonais G tels que :

- Toute action continue de G par homéomorphismes d'un espace compact admet un point fixe global (par exemple, $\mathrm{Aut}([0,1],\lambda)$ (Giordano-Pestov)
- G n'admet pas de représentation unitaire non triviale (par ex. $\mathrm{Homeo}^+(\mathbb{R})$) (Megrelishvili), ou G admet une représentation unitaire fidèle mais pas de représentation unitaire irréductible (groupe des applications mesurables de $([0,1],\lambda)$ dans $\mathbb{S}^1$) (Glasner)
- G a une classe de conjugaison comaigre (même, des classes de conjugaisons diagonales comaigres dans G^n, pour tout n) ; par exemple $\mathfrak{S}_\infty$.

Aucun de ces phénomènes ne peut se produire dans le cas localement compact.

II. Liens avec la théorie des modèles

Structures du premier ordre

Définition

Une structure du premier ordre est la donnée de :

- Un ensemble M (l'univers de la structure).
- Des relations $(R_i)_{i\in I}$ avec $R_i \subseteq M^{n_i}$ pour tout $i \in I$.
- Des fonctions $(f_j)_{j\in J}$ avec $f_j \colon M^{m_j} \to M$.
- Des constantes $(c_k)_{k\in K}$ avec $c_k \in M$.

L'union des familles $(n_i)_{i\in I}$, $(m_j)_{j\in J}$ et $(c_k)_{k\in K}$ est la signature de la structure $\mathcal{M}$ (je ne considérerai que des signatures contenant $=$, interprété comme l'égalité entre éléments de M).

Par exemple, on peut voir un graphe comme une structure dans la signature avec un symbole de relation binaire, un groupe comme une structure dans la signature $(1, \times)$ ...

- Soit $\mathcal{M}$ une structure d'univers $\mathbb{N}$. Son groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ est un sous-groupe fermé de $\mathfrak{S}_\infty$.
- Réciproquement, tout sous-groupe fermé G de $\mathfrak{S}_\infty$ est le groupe d'automorphismes d'une structure d'univers $\mathbb{N}$ (relationnelle, et dont les relations encodent les orbites pour les actions diagonales $G \curvearrowright \mathbb{N}^k$, pour $k \in \mathbb{N}^*$).

On se restreint jusqu'à nouvel ordre à des structures d'univers $\mathbb{N}$, et dont la signature est au plus dénombrable.

Définition

La théorie d'une structure $\mathcal{M}$ est l'ensemble des énoncés (formules du premier ordre sans variables libres) dans le langage de $\mathcal{M}$ qui sont vrais dans $\mathcal{M}$.

Une structure $\mathcal{M}$ est $\aleph_0$-catégorique si, toute structure dénombrable $\mathcal{N}$ avec la même théorie que $\mathcal{M}$ est isomorphe à $\mathcal{M}$.

Exemples :

- Un ensemble infini dénombrable, dans la signature triviale
- $\mathbb{Q}$ vu comme un ensemble ordonné (signature avec un symbole de relation binaire).

Théorème (Ahlbrandt-Ziegler)

Soit $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ deux structures dénombrables $\aleph_0$-catégoriques. Sont équivalents :

- Les groupes topologiques $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ et $\mathrm{Aut}(\mathcal{N})$ sont isomorphes.
- Les structures $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont *bi-interprétables*.

Ce qu'il faut retenir : dans le contexte des structures $\aleph_0$-catégoriques, les propriétés modèle-théoriques d'une structure donnée sont intimement liées aux propriétés (en tant que groupe topologique) de son groupe d'automorphismes.

Théorème

Soit $\mathcal{M}$ une structure d'univers $\mathbb{N}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\mathcal{M}$ est $\aleph_0$-catégorique
- Pour tout k, $\mathrm{Aut}(\mathcal{M}) \curvearrowright \mathbb{N}^k$ a un nombre fini d'orbites (on dit que $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ est oligomorphe).

On retrouve les exemples de $\mathbb{N}$ et $(\mathbb{Q}, <)$.

Théorème (Tsankov)

Soit $\mathcal{M}$ une structure $\aleph_0$-catégorique. Pour tout ouvert U non vide de $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$, il existe une partie finie F de $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ telle que $\mathrm{Aut}(\mathcal{M}) = UFU$.

Preuve :

- OPS $U = \{g \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}) \colon \forall i \leq n\ g(i) = i\}$, et on doit montrer que $U \backslash G / U$ est fini.
- $\left| U \backslash G / U \right|$ est égal au nombre d'orbites pour l'action diagonale $G \curvearrowright (G/U) \times (G/U)$.
- $G \curvearrowright G/U$ s'identifie à l'action de G sur un sous-ensemble de $\mathbb{N}^{n+1}$, et il n'y a qu'un nombre fini d'orbites pour l'action diagonale $G \curvearrowright \mathbb{N}^{n+1} \times \mathbb{N}^{n+1}$ (par oligomorphie). $\square$

Définition

Un groupe polonais G est précompact pour l'uniformité de Roelcke si pour tout ouvert non vide U il existe un ensemble fini F tel que $G = UFU$.

- L'uniformité de Roelcke a une base d'entourages de la forme $\{(g,h) \colon g \in UhU\}$ où U est un voisinage ouvert de 1 (la propriété ci-dessus revient à affirmer que le complété de G pour cette uniformité est compact).
- Si G est localement compact et précompact pour l'uniformité de Roelcke, alors G est compact.
- Si G est précompact pour l'uniformité de Roelcke, alors toute action continue de G par isométries est à orbites bornées (Rosendal).

Théorème (Tsankov)

Soit G un sous-groupe fermé de $\mathfrak{S}_\infty$. Sont équivalents :

- G est précompact pour l'uniformité de Roelcke.
- Pour tout action continue de G sur $\mathbb{N}$ *avec un nombre fini d'orbites*, chaque action diagonale de G sur $\mathbb{N}^k$ a un nombre fini d'orbites.
- G est isomorphe à une limite projective de groupes oligomorphes.

Définition

Une structure métrique $\mathcal{M}$ est la donnée de :

- Un espace métrique complet et borné (M, d) (l'univers de $\mathcal{M}$)
- Des relations $R_i \colon M^{k_i} \to S_i$ uniformément continues, avec S_i un segment.
- Des fonctions $f_j \colon M^{m_j} \to M$ uniformément continues.
- Des constantes c_k.

On définit la signature comme dans le cas 'discret' (la distance sur M jouant le rôle que joue l'égalité dans le cadre discret), en imposant un module d'uniforme continuité pour chaque relation et fonction.

On peut alors définir une notion de formule, de théorie, puis de structure $\aleph_0$-catégorique.

Groupes Roelcke précompacts et logique continue

Tout groupe polonais G est le groupe d'automorphismes d'une structure métrique séparable (en fait, le groupe d'isométries d'un espace métrique polonais).

Théorème (Rosendal ; Ben Yaacov – Tsankov)

Soit G un groupe polonais. Sont équivalents :

- G est précompact pour l'uniformité de Roelcke.
- G est le groupe d'automorphismes d'une structure métrique séparable et $\aleph_0$-catégorique.

On retrouve ainsi, par exemple, le fait que $\mathrm{Aut}([0,1],\lambda)$ est précompact pour l'uniformité de Roelcke (Glasner).

On peut étendre le théorème d'Ahlbrandt-Ziegler à ce contexte (Ben Yaacov - Kaïchouh) et développer l'interaction entre groupes polonais et théorie des modèles...

Merci pour votre attention !

11 MAI - 30 JUILLET 2019
80 JOURS DE PRISON

12 AVRIL 2019 - ...
TOUJOURS SANS PASSEPORT

SOLIDARITÉ AVEC TUNA ALTINEL

http://math.univ-lyon1.fr/SoutienTunaAltinel

Compte twitter - Chaîne youtube